Cálculo e Geometria Analítica para Arquitetos

Notas de aula – Professora Miriam Telichevesky

Porto Alegre, março de 2016

Capítulo 1

Vetores

Um *vetor* (no plano ou no espaço) é um objeto geométrico que é caracterizado por três informações: direção, sentido e comprimento[1]. Pode ser representado por segmentos de reta orientados, da seguinte forma: se A e B são dois pontos, $\overrightarrow{AB}$ é a seta que começa em A e termina em B, e que é constituída pelo segmento de reta $\overline{AB}$. A direção do vetor representado pela seta $\overrightarrow{AB}$ é a direção da reta que contém os pontos A e B, o sentido é *"de A para B"* e o comprimento é a distância entre A e B.

Na Figura 1.1 vemos dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo representados por setas distintas.

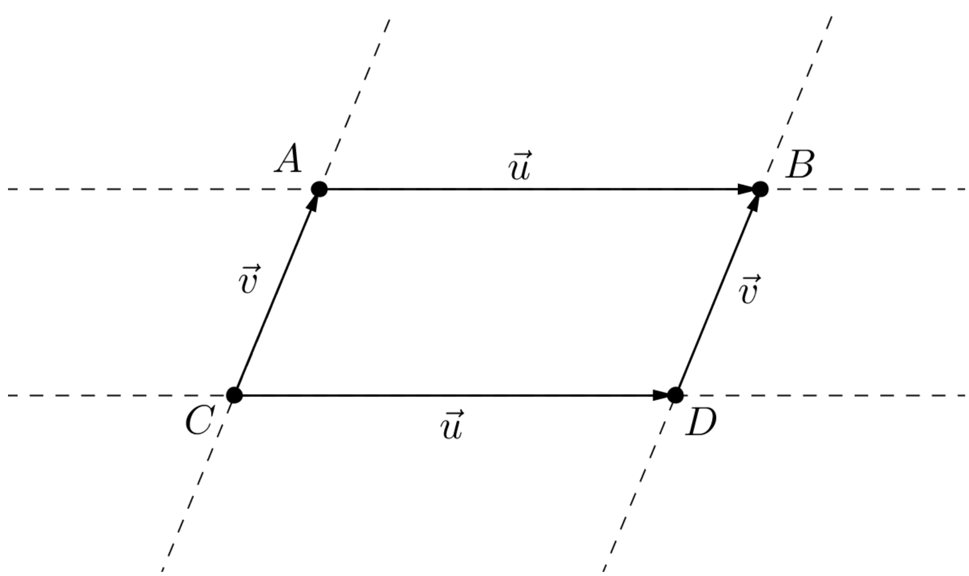


Figura 1.1: Diferentes representações de um mesmo vetor

Em termos de vetores, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$ e $\vec{CA} = \vec{DB} = \vec{v}$.

Observação 1.
- Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ na Figura 1.1, embora congruentes, são distintos. No entanto, se verifica a igualdade entre vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.

[1] Há uma única exceção para a regra: o vetor nulo, que não tem direção nem sentido definido, mas é plenamente caracterizado pelo seu comprimento.

- Embora se verifique a igualdade de segmentos $\overline{AB} = \overline{BA}$, temos $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$: eles têm mesma direção e comprimento, mas sentidos contrários.

Definição 1. Dois vetores são ditos *paralelos* se puderem ser representados por flechas paralelas (ou seja, se tiverem a mesma direção).

Exemplo 1. $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BA}$.

Exercício 1. V ou F? Justifique. Se $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$, e este é paralelo a $\vec{w}$, então $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{w}$.

Definição 2. Dois vetores paralelos são ditos de *mesmo sentido* se os segmentos de reta que unem as origens e as pontas de duas flechas que os representam não se interseccionam.

Exercício 2. Note que não definimos precisamente o que é *sentido*, mas sim o que significa *mesmo sentido*. Explique por que isso pode ter acontecido.

Definição 3. O *comprimento* (ou *norma*) de um vetor é o comprimento de qualquer flecha que o representa. Denotamos a norma do vetor $\vec{v}$ por $\|\vec{v}\|$.

Com as definições acima, podemos dizer que dois vetores que tenham mesma direção, sentido e comprimento são na verdade os mesmos vetores.

Seguem algumas outras definições e notações importantes:

- O *vetor nulo* é o vetor representado por um ponto, ou seja, por um segmento de comprimento nulo. Notação: $\vec{0}$ ou $\vec{AA}$. Por convenção, dizemos que o vetor nulo é paralelo a qualquer vetor.

- O *oposto* de um vetor é o vetor que tem mesma direção e comprimento que ele, mas sentido contrário. Isto é, o oposto de $\overrightarrow{AB}$ é $\overrightarrow{BA}$. Denotamos o oposto de $\vec{v}$ por $-\vec{v}$.

Uma das propriedades que torna os vetores tão importantes na Geometria Analítica é o fato que eles podem ser somados e multiplicados por números reais. Vamos dar as definições precisas a seguir.

1.1 Adição de vetores

Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores, a *soma* de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ é o vetor denotado por $\vec{u}+\vec{v}$ e determinado pela seguinte forma: se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, então, escolhendo como representante para $\vec{v}$ uma flecha que comece em B, digamos, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, então

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \underbrace{=}_{\text{por definição}} \overrightarrow{AC}.$$

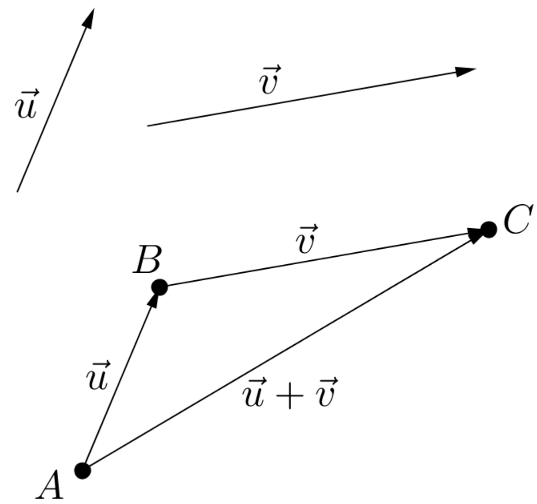


Figura 1.2:

Exercício 3. V ou F? Justifique com precisão. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$?

Exercício 4. Mostre que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.

A *subtração* de vetores é definida por

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v}).$$

Exercício 5. V ou F? Justifique

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{v}-\vec{u}.$$

Exercício 6. Represente graficamente $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$. (Dica: use paralelogramos)

1.2 Multiplicação por escalar (número)

Dados um número real α e um vetor $\vec{v}$, denotamos por $\alpha\vec{v}$ o **vetor** caracterizado por:

- $\vec{0}$ caso $\alpha=0$ ou $\vec{v}=\vec{0}$;
- Se $\vec{v}\neq\vec{0}$ e $\alpha\neq 0$, então $\alpha\vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$, possui comprimento $|\alpha|\|\vec{v}\|$, e o sentido é o mesmo que $\vec{v}$ se $\alpha>0$ e contrário a $\vec{v}$ se $\alpha<0$.

Proposição 1. *Se $\vec{u}\neq\vec{0}$ e $\vec{v}$ são paralelos, então existe $\beta\in\mathbb{R}$ tal que $\vec{v}=\beta\vec{u}$.*

Exercício 7. A recíproca da proposição acima é verdadeira?

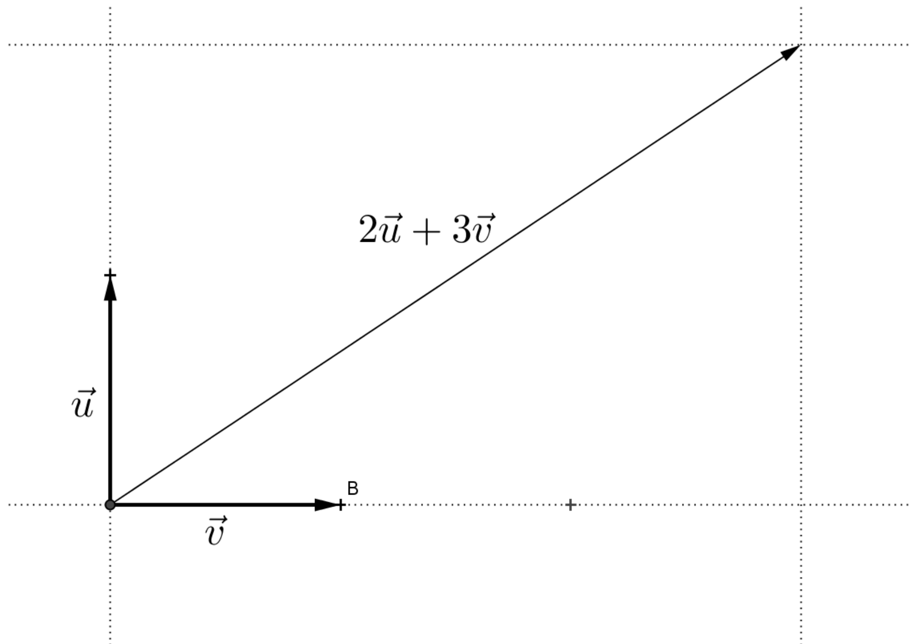
1.3 Combinação linear e algumas noções sobre base

Uma *combinação linear* dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é uma expressão da forma

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v},$$

onde α e β são números reais.

Exemplo 2. Na figura abaixo vemos a combinação linear $2\vec{u} + 3\vec{v}$ de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Exercício 8. 1. Supondo que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, calcule $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$.

2. A suposição de ortogonalidade no item anterior é fundamental? Justifique.

Exercício 9. Expresse $\vec{CX}$ como combinação linear de $\vec{CA}$ e $\vec{CB}$, sabendo que $X \in \overline{AB}$ e $\|\vec{AX}\| = \frac{1}{3}\|\overrightarrow{AB}\|$.

Exercício 10. 1. V ou F? Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ distintos, qualquer vetor do plano pode ser expresso como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

2. V ou F? Dados três vetores distintos no espaço, qualquer vetor do espaço pode ser expresso como combinação linear deles.

Um conjunto de vetores é dito *linearmente independente* (l.i.) se a única combinação linear deles capaz de gerar o vetor nulo $\vec{0}$ é aquela onde todos os escalares são nulos. Em outras palavras, nenhum deles pode ser escrito como combinação linear dos demais. Caso contrário, eles dizem-se ser *linearmente dependentes* (l.d.).

Exercício 11. Existe uma quantidade máxima de vetores linearmente independentes no plano, ou seja, qualquer conjunto com mais vetores do que esta quantidade deve ser linearmente dependente? Se sim, qual esta quantidade? E no espaço?

Recuperamos com o Exercício acima o conceito de *dimensão*. A dimensão de um espaço euclidiano é o número máximo de vetores que um conjunto l.i. pode ter.

Proposição 2. *Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são l.i., então combinações lineares distintas destes vetores geram vetores distintos.*

Exercício 12. Mostre que a Proposição acima é válida para 3 vetores l.i. no espaço.

Definição 4. Uma *base* para um espaço de vetores é um conjunto l.i. que seja capaz de gerar qualquer vetor do espaço por combinações lineares.

Com o que discutimos nos Exercícios acima, uma base do espaço de vetores no plano é um conjunto de dois vetores l.i. e uma base de vetores no espaço tridimensional é um conjunto de 3 vetores l.i.

Vantagem computacional das bases: Se fixamos uma *ordem* para os vetores de uma base, cada vetor poderá ser associado à lista ordenada de seus coeficientes: são as coordenadas do vetor nesta tal base.

1.4 Ângulo entre vetores e o produto interno

Definição 5. O *ângulo entre dois vetores* é o ângulo formado no plano que contém dois representantes de mesma origem, e é menor ou igual a 180^o.

Podemos definir uma nova quantidade, a saber, o produto interno dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

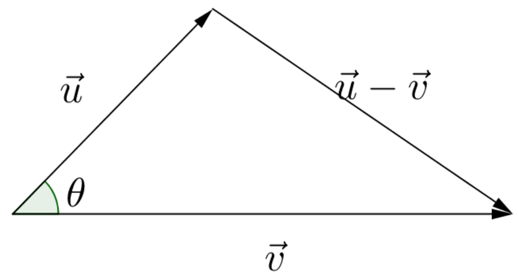
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta,$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exercício 13. Mostre que $\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$.

Exercício 14. V ou F? $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$.

Usando o paralelogramo definido por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, podemos calcular o produto interno em termos das normas. Para isso, utilizamos a Lei dos Cossenos.



$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta \Rightarrow$$
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{\vec{u}} - \vec{\vec{v}}\|^2\right).$$

Obs: por convenção, o vetor nulo é perpendicular a qualquer vetor. Note que essa definição é concorda com as expressões acima.

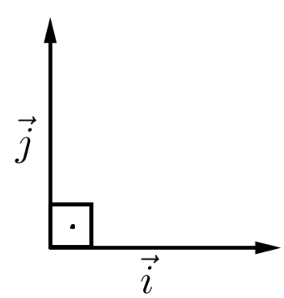
Observe que vale o seguinte:

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se e somente se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

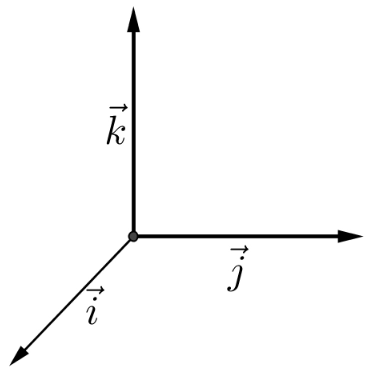
Vamos trabalhar mais com produto interno depois de estudar sistemas de coordenadas.

1.5 Bases ortonormais

Uma base de vetores no plano é dita *ortonormal* quando os dois vetores que a constituem são ortogonais e têm norma 1. É comum ordenar a base "no sentido antihorário" e denotar os vetores desta base ordenada por $\vec{i}$ e $\vec{j}$, conforme a figura:



Já no espaço, uma base é dita *ortonormal* quando os vetores são dois a dois ortogonais e todos têm norma 1. A base ordenada mais comum de ser utilizada no espaço é denotada por $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, e são ordenados conforme a figura:



Exercício 15. Há alguma semelhança com a ordem dos vetores nestas bases ordenadas e a dos eixos coordenados?

1.6 Representação em bases ordenadas e primeiras consequências

Vimos na Seção anterior que numa base ordenada, as coordenadas de cada vetor são únicas. Observe que se $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ é uma base ortonormal ordenada e se $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, então

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}.$$

Ou seja: a soma de vetores pode ser feita coordenada a coordenada! Analogamente, as combinações lineares podem ser feitas também coordenada a coordenada. Por isso, é conveniente denotar estes vetores com ternas ordenadas: $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$, $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$, por exemplo. Outra vantagem é o cálculo da norma de um vetor: **Usando o fato que $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ formam uma base ortonormal,** o Teorema de Pitágoras nos dá

$$\|\vec{u}\|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Proposição 3. *Na notação acima, tem-se*

$$\langle [x_1, y_1, z_1], [x_2, y_2, z_2] \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Consequentemente, deduz-se a seguinte propriedade do produto interno:

$$\langle \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w} \rangle = \alpha\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \beta\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

Em outras palavras, o produto interno se comporta bem perante as combinações lineares.

Demonstração. Vimos que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{\vec{u}} - \vec{\vec{v}}\|^2\right)$$

Mas note que (como a base é ortonormal)

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right) + \left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right) \tag{1.1}$$

e

$$\|\vec{\vec{u}} - \vec{\vec{v}}\|^2 \;=\; (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 -$$
$$\left(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right) + \left(y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2\right) + \left(z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2\right).$$

Subtraindo: (1.1) $-$ (1.2), temos o desejado.

A segunda afirmação fica como exercício, e a dica é utilizar coordenadas. $\square$

Exercício 16. Se $\vec{u} = [a, b]$ (no plano), mostre que qualquer vetor ortogonal a $\vec{v}$ é da forma $[-\lambda b, \lambda a]$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Capítulo 2

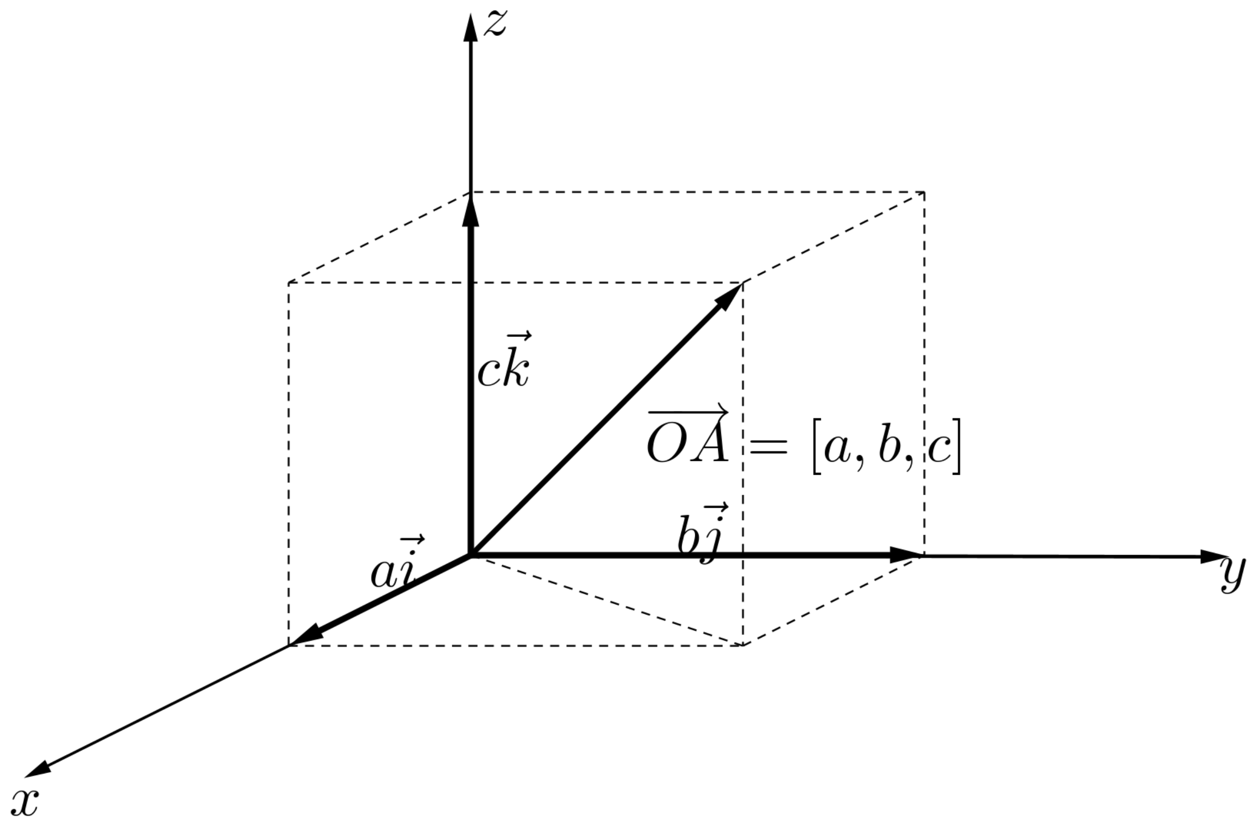
Sistema de coordenadas e vetores

Agora estamos aptos unir o que sabemos sobre o sistema cartesiano de coordenadas (que é utilizado para localizar **pontos**) com o que sabemos sobre vetores. Vai ser muito útil utilizar as duas linguagens simultaneamente, principalmente no estudo de retas e de planos.

Definição 6. Um *sistema de coordenadas* (no espaço) é formado por uma base ortonormal ordenada $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ e por um ponto O chamado *origem do sistema de coordenadas*.

Colocamos a base ortonormal ordenada sobre os eixos, de modo que $O = (0, 0, 0)$, $\vec{i}$ esteja sobre o eixo x, $\vec{j}$ sobre o eixo y, e $\vec{k}$ (automaticamente) sobre o eixo z, todos apontando na direção positiva e com representantes começando em O (veja Figura). Daí se um ponto A do espaço tem coordenadas $A = (a, b, c)$, então

$$\overrightarrow{OA} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = [a, b, c].$$



A partir de agora, faremos algo que pode ser um pouco estranho, mas que acostuma: vamos substituir a notação $[a, b, c]$ dada previamente por notação com parênteses (a, b, c). Ou seja, estaremos a partir de agora **denotando da mesma forma o ponto A e o vetor $\overrightarrow{OA}$**, onde $O = (0, 0, 0)$. Em certo sentido, estaremos *confundindo* (matematicamente falando isso faz sentido) pontos com vetores. Observe como isso pode ser útil.

Observação 2. Tudo pode ser feito de modo análogo para o plano, com $\vec{i}, \vec{j}$ sobre os eixos x e y, e $O = (0, 0)$. Preferimos já dar a definição em três dimensões porque é o caso mais difícil, e se soubermos lidar com ele, certamente saberemos lidar com duas dimensões.

Proposição 4. *Se* $A = (x_1, y_1, z_1)$ *e* $B = (x_2, y_2, z_2)$, *então*

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Demonstração.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$ $\square$

Capítulo 3

Retas

Da Geometria Euclidiana (plana ou espacial), sabemos que

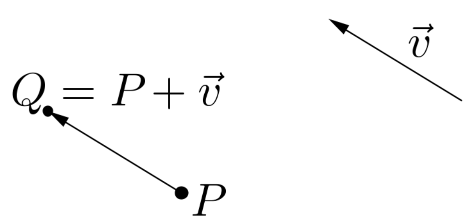
i) Por dois pontos distintos passa uma e só uma reta.

ii) Por um ponto e com uma dada direção, passa uma e só uma reta.

Note que dois pontos distintos determinam um vetor, que determina uma direção, e portanto podemos sempre que pensar que uma reta vem a ser definida a partir de um de seus pontos e de um vetor que represente a sua direção (que sabemos existir infinitos, pois todos os múltiplos de um mesmo vetor determinam direções paralelas). Chamaremos um tal vetor de *vetor diretor da reta*.

Com esta observação, estamos prontos para obter equações de retas no plano e no espaço. Antes de começarmos, convencionamos aqui o que vem a ser a soma de um ponto P com um vetor $\vec{v}$: significa obter o ponto final do representante de $\vec{v}$ que comece em P. Em outras palavras,

$$Q = P + \vec{v} \text{ se e somente se } \vec{v} = \vec{PQ}.$$



Proposição 5. *Se* $P = (a, b, c)$ *e* $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$*, então* $P + \vec{v} = (a + x_1, b + y_1, c + z_1)$*.*

Demonstração. Seja $Q = P + \vec{v}$ Digamos que suas coordenadas sejam $Q = (a', b', c')$.

Então pela definição de soma de ponto com vetor e pela Proposição 4, segue que $\vec{v} = \vec{PQ} = (a' - a, b' - b, c' - c)$, e portanto (x_1, y_1, z_1) e $(a' - a, b' - b, c' - c)$ são duas maneiras de escrever o mesmo vetor na base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Sabemos que esta maneira é única, donde segue que $x_1 = a' - a$, $y_1 = b' - b$ e $z_1 = c' - c$. Assim, $a' = a + x_1$, $b' = b + y_1$ e $c' = c + z_1$, como no enunciado. $\square$

Exemplo 3. Calcule as coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{AB}$, onde $A = (1, 9, -1)$ e $B = (9, -3, 5)$.

Solução: Note que $M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Por outro lado,

$$\overrightarrow{AB} = (9-1, -3-9, 5-(-1)) = (8, -12, 6) \Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (4, -6, 3).$$

Assim, $M = (1, 9, -1) + (4, -6, 3) = (5, 3, 2)$.

Exercício 17. Observe que no exemplo acima cada coordenada é a média aritmética das coordenadas de A e B correspondentes. Mostre que isso é um fato geral: Se $A = (a, b, c)$ e $B = (a', b', c')$, então o ponto médio de $\overline{AB}$ é

$$M = \left(\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2}, \frac{c+c'}{2} \right).$$

Representação vetorial de retas

Suponha que r é uma reta que passa pelo ponto A e tem como vetor diretor $\vec{v}$. Então o que podemos dizer sobre um dado ponto P sobre essa reta?

Ora, sabemos que $\vec{AP}$ deve ter a mesma direção de $\vec{v}$. Assim, $\vec{AP}$ e $\vec{v}$ são paralelos, e portanto existe um número real t tal que

$$\vec{AP} = t\vec{v}.$$

Utilizando a notação de soma de ponto com vetor que vimos acima, isto é equivalente a

$$P = A + t\vec{v}.$$

Cada ponto P da reta terá um valor de t diferente na equação acima; reciprocamente, cada $t \in \mathbb{R}$ dará origem a um ponto diferente. Assim, concluímos que

$$\boxed{r = \{A + t\vec{v} \,|\, t \in \mathbb{R}\}.}$$

A equação acima é chamada representação vetorial da reta r. Existem infinitas equações vetoriais para a mesma reta. Por exemplo, note que

$$r = \{A + t\vec{v} \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{A + 5t\vec{v} \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{A + t\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{v} \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \dots$$

O *conjunto* não muda, o que muda é a representação de cada ponto nele de acordo com o parâmetro t.

Se sabemos a informação que a reta r passa por dois pontos A e B, então $\vec{AB}$ é um possível vetor diretor para r, e portanto podemos escrever

$$r = \{A + t\vec{AB} \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Equações (paramétricas) de uma reta

Colocamos tudo que foi visto acima em coordenadas, e assim temos as chamadas *equações de reta*. O que isso quer dizer? Que associamos à reta r um conjunto de informações, dadas por igualdades matemáticas, que dirão se um ponto pertence ou não a ela: se o ponto pertence, então suas coordenadas satisfazem as equações; se não pertence, então as coordenadas não satisfazem.

Precisamente, digamos que r é a reta que passa pelo ponto $A = (a, b, c)$ e tem vetor diretor $\vec{v} = (x_0, y_0, z_0)$, então um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a r se, e somente se, suas coordenadas x, y e z satisfazem, para algum valor $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x = a + tx_0 \\ y = b + ty_0 \\ z = c + tz_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Dizemos, então, que estas são equações da reta r. Quando escritas nesta forma, são chamadas as *equações paramétricas da reta r*.

Exemplo 4. 1. As equações paramétricas da reta r que passa por $A = (1, 3, -1)$ e tem como vetor diretor $\vec{v} = (1, 1, 5)$ *podem ser*

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$$

2. Pertence ou não?

$(2, 4, 4) \in r$, basta tomar $t = 1$.

$(-1, 1, -11) \in r$, basta tomar $t = -2$.

$A \in r$, basta tomar $t = 0$.

Mas note que $(5, 0, 1) \notin r$. De fato, é impossível existir (verifique!) $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 5 = 1 + t \\ 0 = 3 + t \\ 1 = -1 + 5t \end{cases}$$

3. Equações para a reta s que passa por $(5,0,1)$ e é paralela a r:

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 0 + t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

Exercício 18. Determine outra equação para a reta r.

Exercício 19. Determine equações, no plano, para a reta que passa pelos ponto $A = (3,0)$ e $B = (3, \sqrt{10})$.

Façamos agora um raciocínio contrário: considere r dada pelas equações paramétricas

$$r := \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 5 + 4t \\ z = 7 \end{cases}.$$

Como determinamos um vetor diretor para a reta? Ora, note que fazendo $t = 0$ e $t = 1$, respectivamente, temos que os pontos $A = (-2,5,7)$ e $B = (1,9,7)$ pertencem a r. Logo um possível vetor diretor é $\overrightarrow{AB} = (3,4,0)$. Note que são exatamente os coeficientes de t nas equações paramétricas. Observamos mais uma vez que qualquer vetor paralelo a este é também vetor diretor de r.

Ângulo entre duas retas

Dadas duas retas r e s, o ângulo entre elas é definido como sendo o ângulo $\angle(r,s)$ entre suas direções, ou seja, o ângulo θ com $0 \leq \theta \leq \pi/2$ tal que o ângulo entre dois de seus vetores diretores é θ (ou $\pi - \theta$). As retas são paralelas quando têm mesma direção, e portanto quando o ângulo entre elas é zero. São perpendiculares, ou ortogonais, quando o ângulo entre elas é de $\pi/2$.

3.1 Retas no plano

No plano temos uma vantagem especial quanto à determinação de equações para uma reta. Além das equações paramétricas, como foi explorado acima no espaço, podemos falar também na *equação reduzida* e na equação *ponto-inclinação* de uma reta, ambas utilizando a ideia de ângulo entre retas. Vejamos em detalhes:

3.1.1 Equação reduzida

Observe que no plano cada direção têm uma e somente uma direção perpendicular correspondente. No espaço isso não é verdade (por quê?), como veremos mais aprofundadamente ao estudar planos, no próximo capítulo. Essa particularidade bidimensional nos permite obter equações da reta conhecendo as seguintes informações:

iii) Dados um ponto A e um vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$, existe uma única reta passando pelo ponto A e **perpendicular** ao vetor $\vec{u}$.

Exemplo 5. Determine equações para a reta r do plano que contém o ponto $A = (1, 1)$ e é perpendicular ao vetor $\vec{u} = (5, 4)$.

Solução 1: Obtenção de equações paramétricas.

Observe inicialmente (como foi proposto em um exercício) que o vetor $(-4, 5)$ (ou qualquer vetor paralelo a ele) é perpendicular a $(5, 4)$, logo é um possível vetor diretor para r. Assim, equações paramétricas para r podem ser

$$r : \{x = 1 - 4t; y = 1 + 5t\}.$$

Solução 2: Obtenção de uma equação **reduzida**

Seja $P = (x, y)$ um ponto da reta. Então $\vec{AP} = (x - 1, y - 1)$ é paralelo aos vetores diretores da reta, e portanto é perpendicular a $\vec{u} = (5, 4)$. Logo temos que o ângulo entre $\vec{AP}$ e $\vec{u}$ é $\pi/2$, e portanto o produto interno entre eles é nulo. Ou seja,

$$\langle (x - 1, y - 1), (5, 4) \rangle = 0$$

e isso é equivalente a

$$\boxed{5(x - 1) + 4(y - 1) = 0.}$$

O caso geral é o seguinte: a reta r que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0)$ e é perpendicular ao vetor (a, b) tem como (possível) equação reduzida

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Observe que esta equação não depende mais de um parâmetro t, ela apenas atrela os valores de x e y.

Exercício 20. 1. Esboce no plano xy a reta que tem como equação reduzida:

(a) $x + 4y = 0$

(b) $-5(x - 1) + 2(y + 1) = 0$

(c) $y = -2$

(d) $x + 5 = 0$

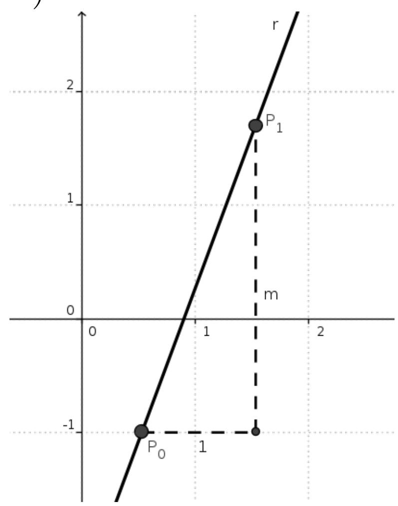
(e) $10x - 4y - 14 = 0$.

2. Algumas das retas acima são paralelas? E perpendiculares? Indique quais. Você consegue detectar isto sem o esboço?

3.1.2 Equação ponto-inclinação (de retas não-verticais)

Diremos que uma reta r é *não-vertical* quando ela não for paralela ao eixo y (ou seja, quando não for paralela a $\vec{j}$.)

Retas não-verticais carregam a noção de *inclinação* (ou *coeficiente angular*). Precisamente, se $P_0 = (x_0, y_0)$ é um ponto de r, sua inclinação é o (único!) número real m tal que o ponto $P_1 = (x_0 + 1, y_0 + m)$ pertence também a r. (por que a definição só faz sentido para retas não verticais?).



Pergunta: Alguma semelhança com o que foi visto sobre retas no Ensino Médio?

Mas o que acontece se eu escolho um ponto P_0 para começar, e você escolhe outro? Os dois produzem o mesmo valor para m?

A resposta é que sim, ou seja, esta quantidade está bem definida! A razão é muito simples. Independentemente da escolha de P_0, note que $P_1 = P_0 + (1, m)$, ou seja, $(1, m)$ é vetor diretor de r. Ok, mas não existem infinitos vetores diretores para r? Sim, existem, mas só um deles tem a primeira coordenada como sendo 1. Assim sendo, m está bem definido!

Exercício 21. Esboce uma reta no plano xy para cada uma das situações: $m > 0$, $m < 0$ e $m = 0$.

Exercício 22. Obtenha uma equação para a reta que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e tem inclinação m.

Observe que quando $m = 0$, trata-se de uma reta horizontal. À medida que m aumenta, a reta vai formando um ângulo θ, com $0 \leq \theta < \pi/2$, com o eixo x. Quanto maior for m, mais perto de se tornar vertical fica a reta. Da mesma forma para valores negativos de m, mas com a diferença que a reta "desce" quando viemos da esquerda para a direita.

Proposição 6. *Considere a reta r dada pela equação $y - y_0 = m(x - x_0)$. Seja θ o ângulo que r faz com o eixo x, que é a reta dada por $y = 0$. Então m satisfaz*

$|m| = \tan\theta$. *Além disso, se* $m < 0$, *então* y *decresce à medida que* x *cresce; se* $m > 0$, *então* y *cresce quando* x *cresce.*

Demonstração. Um vetor diretor para r é $(1, m)$ e um vetor diretor para o eixo x é $(1, 0)$. Observe que $\|(1, m)\| = \sqrt{1 + m^2}$ e $\|(1, 0)\| = 1$. Assim,

$$\cos\theta = \frac{\langle(1, m), (1, 0)\rangle}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Como $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (por definição de ângulo entre retas), temos que $\operatorname{sen}\theta$ satisfaz

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + m^2}} = \sqrt{\frac{m^2 + 1 - 1}{1 + m^2}} = \sqrt{\frac{m^2}{1 + m^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Dividindo $\operatorname{sen}\theta$ por $\cos\theta$, obtemos $\tan\theta = |m|$.

Vejamos agora a segunda parte da Proposição. Para isso, fixemos um ponto $P_1 = (x_1, y_1) \in r$. Observe que para $s > 0$, o ponto $P_s = P_1 + s\overrightarrow{(1, m)}$ também está sobre a reta e é um ponto cuja coordenada x é maior que a de P_1. , e tem coordenadas $(x_1 + s, y_1 + sm)$. Para sabermos se a coordenada y de P_s é maior ou menor que a de P_1, basta comparar os números y_1 e $y_1 + sm$. Ora, se $m < 0$, então $y_1 + sm < y_1$ e portanto o ponto P_s está abaixo de P_1. Se $m > 0$, então P_s está acima de P_1. Como $s > 0$ é qualquer número positivo, está demonstrada a segunda parte. □

Exercício 23. Sejam $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$. dois pontos distintos. Mostre que m, a inclinação da reta que passa por P_0 e P_1, satisfaz

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Comparação com o que foi visto no Ensino Médio

Podemos manipular algebricamente a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$. Note que ela é equivalente a $y = mx + (y_0 - mx_0)$. Chamando de b a quantidade $y_0 - mx_0$, temos que a equação fica

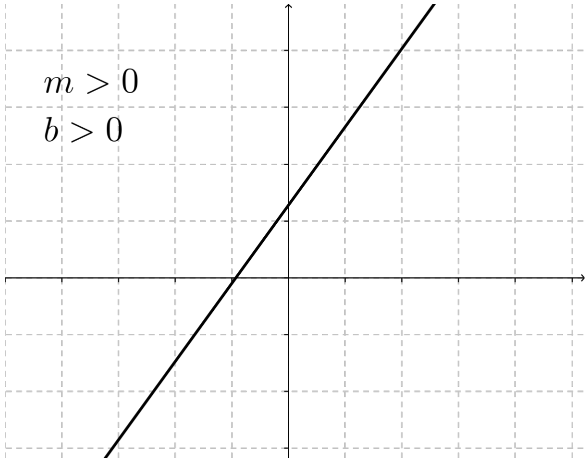
$$y = mx + b.$$

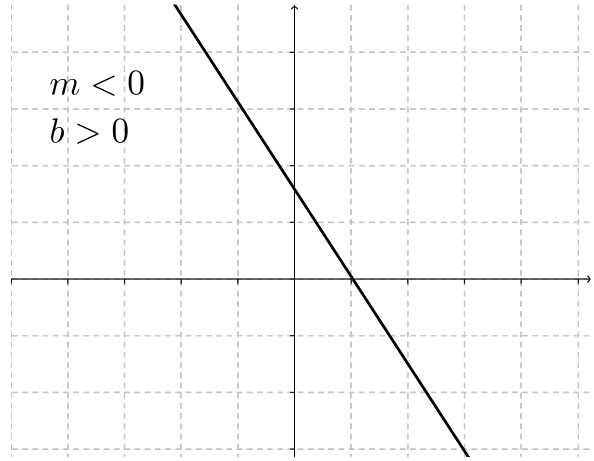
Observe os seguintes fatos, possivelmente já familiares:

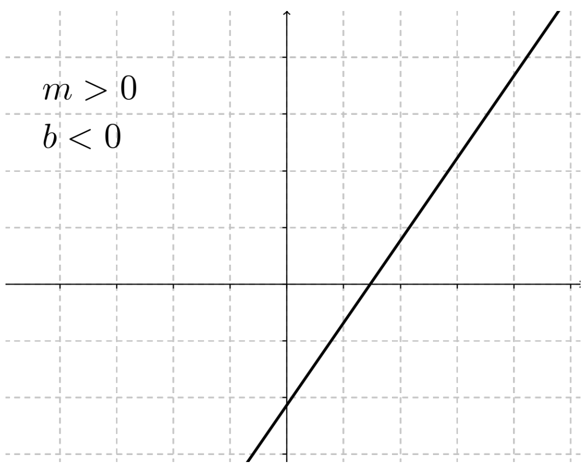
1. O número b representa a altura que a reta corta o eixo y. Isso ocorre porque esta intersecção satisfaz ambas as equações: a da reta e a que diz que o ponto está sobre o eixo y, a saber, $x = 0$. Assim, o ponto de coordenadas $(0, b)$ está na reta.

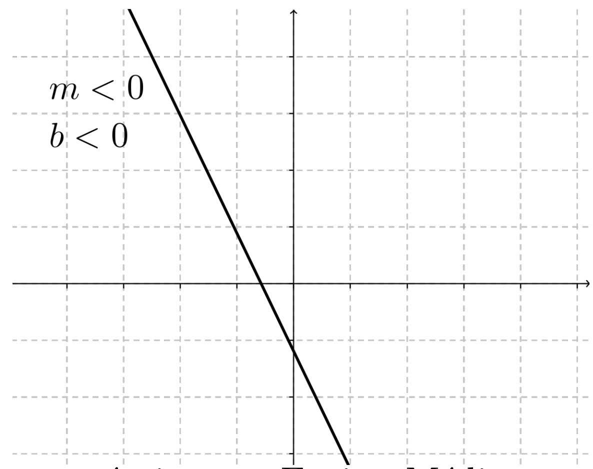
2. Se $m \neq 0$, então a reta intersecciona o eixo x no ponto $(-b/m, 0)$.

3. Os itens acima nos dão as possíveis configurações de reta de acordo com os sinais de m e b, se ambos forem não nulos:









Agora vamos demonstrar um fato que muitas vezes é visto no Ensino Médio, sem demonstração rigorosa: duas retas são perpendiculares se e somente se o produto de seus coeficientes angulares é -1.

Proposição 7. *Sejam m_r e m_s as inclinações das retas r e s do plano, respectivamente. Então*

$$r \perp s \iff m_r \cdot m_s = -1.$$

Demonstração. Observe que $\vec{v}_r = (1, m_r)$ e $\vec{v}_s = (1, m_s)$ são vetores diretores de r e s, respectivamente. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $r \perp s$. Então $\langle \vec{v}_r, \vec{v}_s \rangle = 0$. Logo $1 + m_r m_s = 0$, o que mostra que $m_r m_s = -1$. ($\Leftarrow$) Reciprocamente, se $m_r m_s = -1$, então $1 + m_r m_s = 0$, e portanto $\vec{v}_r \perp \vec{v}_s$, e então $r \perp s$. $\square$

Exercício 24. 1. Determine uma equação de reta em cada um dos casos:

(a) A reta passa pelos pontos $(1, 3)$ e $(-4, 5)$.

(b) A reta tem inclinação $m = -4$ e passa pelo ponto $(0, 0)$.

(c) A reta é perpendicular à reta do item (b) acima e passa por $(\sqrt{2}, -7)$.

(d) Forma um ângulo de $\pi/6$ com o eixo x, o interseccionando em $(4, 0)$, para valores de x maiores que 4, está contida no primeiro quadrante.

(e) Passa por $(5, 4)$ e é paralela ao eixo y.

(f) Passa por $(5, -1)$ e é paralela ao eixo y.

2. Determine o ponto de intersecção, quando hover, entre a reta de cada item com a reta do item seguinte (sendo que pode-se pensar que o item (a) vem depois do item (f)).

Capítulo 4

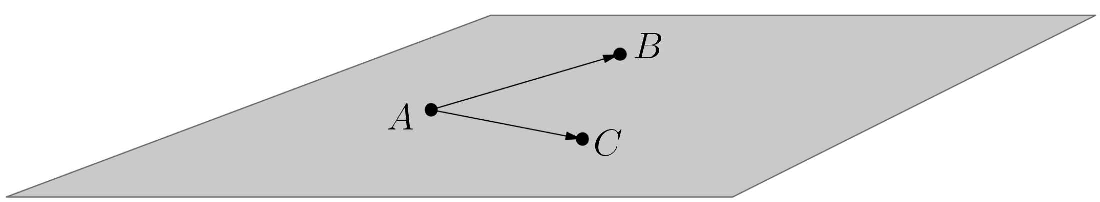
Planos no espaço

Um plano Π no espaço fica bem determinado por:

(i) 3 pontos não-colineares.

(ii) Um ponto e duas direções distintas (isto é, dois vetores não paralelos, chamados *vetores diretores* do plano).

Observe que estas três situações são equivalentes, pois três pontos não colineares A, B e C determinam duas direções distintas, a saber, as direções dadas pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$. Reciprocamente, se são dados um ponto A e dois vetores linearmente independentes $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então, escolhendo representantes deles começando em A, obtemos os pontos $B = A + \vec{u}$ e $C = A + \vec{v}$. Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes, segue que A, B e C são não colineares.



Seja Π o plano que passa pelo ponto A e tem como vetores diretores os vetores l.i. $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Para obter equações para Π, observamos o seguinte: Se P pertence a Π, então o segmento de reta $\overline{AP}$ deve pertencer a Π. Desta forma, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e portanto existem $s, t \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AP} = s\vec{u} + t\vec{v}$, e portanto

$$\boxed{P = A + s\vec{u} + t\vec{v}.}$$

Se $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, então para $P = (x, y, z)$ pertencer ao plano Π que contém A e tem $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como vetores diretores, é necessário que x, y, z satisfaçam, para certos valores de $s, t \in \mathbb{R}$, as seguintes equações:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 s + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 s + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 s + c_2 t. \end{cases}$$

Reciprocamente, qualquer cujas coordenadas (x, y, z) satisfaçam a equação acima é pertencente a Π. As equações acima são chamadas *equações paramétricas*.

Exercício 25. Dê equações do plano Π que:

(a) contém a reta $r : \{x = 9 + t, y = 5 - 25t, z = 9t\}$ e é paralelo ao eixo z.

(b) Contém os pontos $A = (0, 1, 3), B = (-2, 3, -4)$ e $C = (0, 0, 0)$.

(c) Contém as retas $r : \{x = t, y = 2t, z = 4t\}$ e $s : \{x = 2 - 2t, y = 5 - 5t, z = 0\}$ (obs: ambas passam pela origem).

(d) Contém as retas paralelas $r : \{x = t, y = 2t, z = 4t\}$ e $s : \{x = 4+t, y = 7+2t, z = 4t\}$.

Esboço de um plano

Para fazer um esboço de plano, basta escolher três pontos não-colineares que a ele pertençam e traçar o plano entre eles. Uma das melhores formas é descobrir quais são os pontos de intersecção com os eixos coordenados, ou seja, pontos das formas $(x, 0, 0)$, $(y, 0, 0)$ ou $(z, 0, 0)$. Tais intersecções nem sempre precisam existir (Por quê?), mas se existem, podem ser úteis.

Exemplo 6. Esboçar o plano

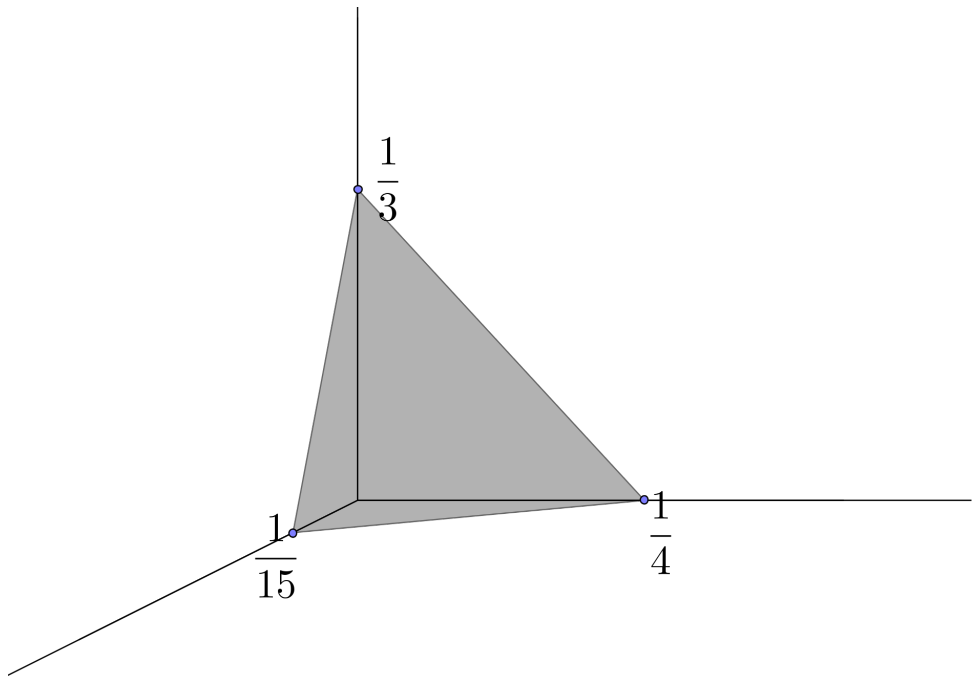
$$\Pi : \begin{cases} x = s + t \\ y = 1 - 3t \\ z = -1 - 5s - t. \end{cases}$$

Intersecção com o eixo x: fazemos $y = 0 = z$, obtendo $\begin{cases} 0 = 1 - 3t \\ 0 = -1 - 5s - t. \end{cases}$ Resolvendo o sistema, obtemos $t = 1/3$ e $s = -4/15$, e portanto $x = 1/3 - 4/15 = 1/15$.

Intersecção com o eixo y: fazemos $x = 0 = z$, obtendo $\begin{cases} 0 = s + t \\ 0 = -1 - 5s - t. \end{cases}$ Resolvendo o sistema, obtemos $s = -1/4$ e $t = 1/4$ e portanto $x = 1 - 3/4 = 1/4$.

Intersecção com o eixo z: fazemos $x = 0 = y$, obtendo $\begin{cases} 0 = s + t \\ 0 = 1 - 3t. \end{cases}$ Resolvendo o sistema, obtemos $s = -1/3$ e $t = 1/3$, e portanto $z = -1 + 5/3 - 1/3 = 1/3$.

Logo as intersecções com os eixos são os pontos $(1/15, 0, 0), (0, 1/4, 0)$ e $(0, 0, 1/3)$.



Equação geral de um plano

Existe ainda uma terceira maneira de caracterizar um plano:

(iii) Contendo um ponto A e sendo ortogonal a uma dada direção (chamada *direção normal*).

Para determinarmos equações a partir destas duas informações, note que se Π é o plano que contém $A = (x_0, y_0, z_0)$ e é ortogonal à direção dada pelo vetor (não-nulo) $\vec{n} = (a, b, c)$, então dado $P = (x, y, z)$ no plano, os vetores $\overrightarrow{AP} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ e $\vec{n}$ devem ser ortogonais, pois o segmento de reta $\overline{AP}$ deve estar contido em Π. Desta forma, temos que $\langle \overrightarrow{AP}, \vec{n} \rangle = 0$, o que dá

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Chamando de d a quantidade $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, obtemos a chamada *equação geral* do plano Π.

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0.}$$

Exercício 26. Escreva uma equação geral para o plano que passa por $A = (9, -5, 2)$ e é ortogonal ao vetor $\vec{n} = (0, 4, -3)$.

Exercício 27. Considere o plano Π que tem como equação geral $20x - 4y + 3z - 8 = 0$. Determine um ponto pertencente a Π e um vetor ortogonal a ele. Compare sua resposta com a resposta dos colegas em volta. As respostas foram iguais?

Observação 3. Se um plano Π é ortogonal a um vetor $\vec{n}$, então todas as retas de Π são ortogonais a $\vec{n}$. Utilizaremos este fato para estudar intersecção entre planos e depois ângulo entre reta e plano.

4.1 Produto vetorial

Veremos nas próximas seções que conhecer uma direção ortogonal a um plano pode ser muito útil; no enatnto, alguns planos nos são apresentados através das equações paramétricas, ou mesmo através das informações do tipo (i) ou (ii) descritas no começo do capítulo. Então surge naturalmente a seguinte pergunta: como determinar um vetor $\vec{n}$ que seja simultaneamente ortogonal a dois vetores l.i. $\vec{u}$ e $\vec{v}$? A resposta para isso é dada pela operação entre vetores chamada *produto vetorial*. Esta definição só faz sentido no espaço tridimensional.

Definição 7. Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ no espaço tridimensional, o *produto interno de $\vec{u}$ por $\vec{v}$* é o vetor denotado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ que tem as três seguintes características:

1. Sua norma é a área do paralelogramo gerado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. (que vale $\|\vec{u}\|\vec{v}\|\operatorname{sen}\theta$, onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.)
2. Sua direção é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
3. Seu sentido é dado pela "regra da mão direita".

Observação 4 (IMPORTANTE!!!). Segue da definição acima que **o produto vetorial não é comutativo**, ou seja, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ não é igual a $\vec{v}\wedge\vec{u}$. Mais precisamente, $\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v}$.

Observação 5. Outra observação importante é que sempre que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem linearmente dependentes (ou seja, paralelos), então $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Isso decorre do fato que a área do parelogramo gerado por eles é nula (não há paralelogramo).

Exemplo 7. Consideramos os vetores da base canônica $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, que sabemos ser dois a dois ortogonais. O paralelogramo formado por quaisquer dois deles é um quadrado unitário, que tem área 1, e portanto o produto vetorial de um deles pelo outro terá norma 1. Além disso, a direção é dada pelo terceiro. Mas qual é o sentido? Utilizando a regra da mão direita, temos o seguinte:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k},$$

$$\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

e

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}.$$

O exemplo acima é mais que um mero exemplo. Ele vai ilustrar que o produto vetorial **não é associativo,** ou seja, **só podemos efetuar o produto vetorial de um vetor com outro, nunca utilizando três vetores**. Não tem sentido a expressão $\vec{u} \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}$, apenas as expressões $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$, que em geral são *distintas*.

Veja o exemplo abaixo:

$$\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

mas

$$(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j}) = \vec{0} \wedge \vec{j} = \vec{0}.$$

No entanto, é possível mostrar que $\wedge$ satisfaz algumas propriedades boas, de onde podemos obter o algoritmo para seu cálculo. Tais propriedades são:

1. Distributividade: $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.

2. Preserva multiplicação por escalar: $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v})$.

Algoritmo para o cálculo do produto vetorial

Existe um algoritmo para calcular o produto vetorial a partir das coordenadas na base ortonormal $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, que é semelhante ao cálculo de um determinante de uma matriz 3×3, e por isso utilizamos a mesma notação que a de determinante. Precisamente, se $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, então $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é dado por

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \cdots = (b\gamma - c\beta)\vec{i} + (c\alpha - a\gamma)\vec{j} + (a\beta - b\alpha)\vec{k}.$$

Uma demonstração deste algoritmo pode ser feita utilizando as propriedades acima e os resultados dos produtos vetoriais, dois a dois, de $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, no entanto, como se trata apenas de uma conta (bem comprida), omitiremos. O leitor interessado pode demonstrar ele próprio.

Exercício 28. Mostre que o vetor definido pelo algoritmo acima é de fato ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

Exercício 29. Calcule cada um dos produtos vetoriais:

1. $(8, -4, 0) \wedge (0, 2, 1)$

2. $(2, 3, -1) \wedge (1, 0, 0)$

3. $(9, 14, -5) \wedge (0, 1, 0)$

4. $(-2,-3,-1) \wedge (5,2,3)$

5. $(2,3,-1) \wedge (0,1,0)$

6. $(2,3,-1) \wedge (0,0,1)$

Exercício 30. Dê uma equação geral para cada um dos planos dados em equações paramétricas no Exercício 25.

4.2 Posição relativa entre planos; ângulo entre planos.

4.2.1 Posição relativa

Dados dois planos Π_1 e Π_2 do espaço, o que dizer sobre a intersecção deles $\Pi_1 \cap \Pi_2$? Temos três possibilidades:

(a) Os planos são paralelos e não se intersectam,e portanto a $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$.

(b) Os planos são paralelos e contém um ponto em comum. Neste caso, eles são obrigatoriamente iguai.

(c) Os planos não são paralelos. Neste caso, eles obrigatoriamente contêm uma e somente uma reta r em comum, ou seja, $\Pi_1 \cap \Pi_2 = r$.

Concretamente, dados dois planos, como podemos determinar sua intersecção?

Observe que os planos são paralelos se e somente se suas direções normais forem iguais. Assim, para verificar se (a) ou (b) acima é cumprida, basta comparar os vetores normais: se forem paralelos, os planos são paralelos; caso contrário, não são paralelos, e portanto (c) deve ocorrer. Para distinguir entre (a) ou (b), basta prosseguir como fizemos para retas: se já sabemos que eles são paralelos, basta tomar um ponto de um e testar se pertence a outro. Se pertencer, eles coincidem; caso contrário, eles são paralelos com intersecção vazia.

Quanto à situação (c): como podemos determinar a reta de intersecção entre dois planos?

Existem várias formas, mas uma delas é utilizar a Observação 3. Sejam Π_1 e Π_2 não paralelos, que se interseccionam na reta r. Suponha que $\vec{n_1}$ é normal a Π_1 e $\vec{n_2}$ é normal a Π_2. Então da Observação 3 segue que r é simultaneamente ortogonal a $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$, donde decorre que r tem direção dada por $\vec{n_1} \wedge \vec{n_2}$. Para determinar r completamente, basta tomar um ponto que pertença a ambos os planos. Isso deve ser feito utilizando as equações deles; salientamos que existem infinitas possibilidades (Por quê?) e por isso não há única solução.

Exercício 31. Determine a intersecção entre os planos dados pelas equações a seguir:

(a) $2x + 4y - 6z + 8 = 0$ e $x + 2y - 3z + 4 = 0$.

(b) $2x + 4y - 6z + 8 = 0$ e $x + 2y - 3z + 2 = 0$.

(c) $x + 2y - 3z + 2 = 0$ e $4x - 5y - 1 = 0$.

(d) $x + 2y - 3z + 2 = 0$ e $5z - 2 = 0$.

4.2.2 Ângulo entre planos

O ângulo entre dois planos é definido como sendo o ângulo (entre 0 e $\pi/2$) entre suas direções normais. Faça um esboço para ver que esta definição faz sentido!

Exercício 32. Calcule o cosseno do ângulo entre os planos no exercício anterior.

4.3 Posição relativa e ângulo entre reta e plano

Dados um plano Π e uma reta r, as seguintes situações são possíveis:

(a) $r \cap \Pi = \emptyset$, o que ocorre quando r é paralela a Π e não o intersecciona.

(b) $r \cap \Pi = r$, caso que ocorre quando r é paralela a Π e o intersecciona (em um, e portanto em todos os pontos). Este é o caso que ocorre quando r está contida em Π.

(c) $r \cap \Pi = \{P\}$ é apenas um ponto. É o caso em que r "fura" o plano.

Exercício 33. Elabore uma estratégia para determinar a intersecção entre uma reta e um plano e determine a intersecção entre r e Π em cada um dos itens abaixo.

(a) $r : \{x = 1 - t, y = 1 + t, z = t\}; \quad \Pi : x + y + z = 1$.

(b) $r : \{x = 2 - 4t, y = t, z = 2t\}; \quad \Pi : x + 2y + z = 0$.

(c) $r : \{x = -1 + t, y = 2 - 2t, z = 1\}; \quad \Pi : 2x - y + z = 0$.

(d) $r : \{x = -1 + t, y = 2 - 2t, z = 1\}; \quad \Pi : z = 1$.

O *ângulo entre uma reta r e um plano* Π é definido como sendo o complementar (ou seja, o que falta para completar $\Pi/2$) do ângulo entre r e a direção normal a Π. Faça um desenho para ver que esta definição faz sentido!

Exercício 34. Calcule o cosseno do ângulo entre a reta r e o plano Π em cada um dos itens do exercício acima.

Capítulo 5

Distâncias

Já estamos usando a noção de distância sem muitas discussões preliminares, e assim continuaremos. No entanto, vamos observar que a noção de distância em um conjunto X é matematicamente definida como:

Definição 8. Dado um conjunto M, dizemos que a função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada dois elementos $m, n \in M$ um número real, é uma *distância* em M se d satisfaz as três propriedades a seguir:

(i) $d(m, n) \geq 0$ para todos $m, n \in M$, e além disso $d(m, n) = 0 \iff m = n$.

(ii) $d(m, n) = d(n, m)$ para todos $m, n \in M$. (Simetria)

(iii) $d(m, p) \leq d(m, n) + d(n, p)$ para todos $m, n, p \in M$. (Desigualdade triangular)

Nossa noção de distância no plano ou no espaço euclidiano é a que estamos acostumados: está fixada uma unidade de comprimento, e a partir dela a distância entre dois pontos A, B é o comprimento do segmento $\overline{AB}$, ou seja, a grosso modo a distância $d(A, B)$ é quantas vezes a unidade de comprimento cabe dentro de $\overline{AB}$. Esta é a chamada *distância euclidiana*, e já a utilizamos anteriormente, inclusive dentro da linguagem vetorial:

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Existem outras possíveis definições de distância entre pontos do plano ou do espaço, que dão origem a objetos matemáticos muito bonitos, mas que infelizmente por falta de tempo não poderemos conhecer neste curso. O leitor mais curioso pode consultar a autora destas notas para conhecer alguns exemplos. Como neste curso só trabalharemos com a distância euclidiana, vamos chamá-la simplesmente de distância.

As três propriedades da Definição 8 para o caso particular da distância euclidiana podem ser facilmente verificadas. Fica como exercício para o leitor verificá-las.

Em termos de sistema de coordenadas, se $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos do espaço, então sua distância é dada por

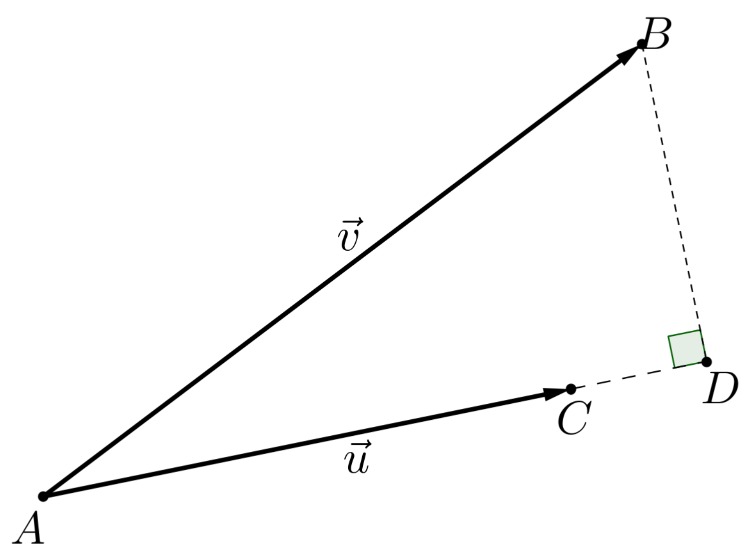
$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

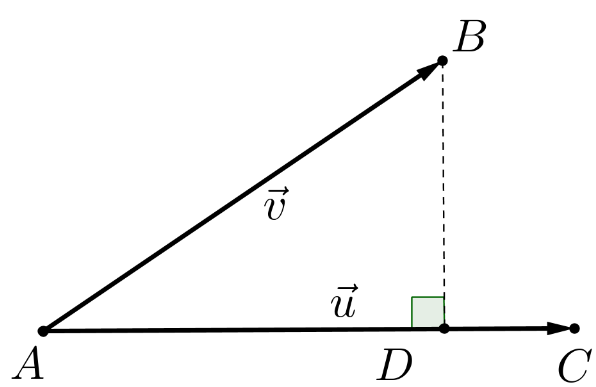
e de forma análoga no plano.

Mas queremos trabalhar com distâncias entre outros objetos, não somente pontos. Aí somos obrigados a filosofar um pouco mais. Vamos nestas notas tratar de vários exemplos especificamente, antes de dar a definição geral. Antes de iniciarmos, é interessante fazer uma nova definição dentro do mundo dos vetores, a saber, a de *projeção ortogonal*. Essa ferramenta será bastante útil para estudar distâncias, como veremos a seguir.

5.1 Projeção ortogonal

A ideia intuitiva da projeção ortogonal é saber como é a "sombra de um vetor sobre o outro". Mais profundamente falando, suponhamos que queiramos decompor o vetor $\vec{v}$ em duas componentes, sendo uma delas paralela a um vetor não nulo $\vec{u}$ e outra ortogonal a $\vec{u}$. (Fazemos isso o tempo inteiro ao escrever vetores no sistema de coordenadas, como veremos mais adiante).





Nas duas figuras, vemos a seguinte situação: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ é um vetor não nulo e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

é um vetor que queremos projetar em $\overrightarrow{AB}$. A *projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$* será, por definição, o vetor

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \overrightarrow{AD}$$

que cumpre as seguintes propriedades:

(a) $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$ é paralelo a $\vec{u}$.

(b) $\vec{v} - \mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$.

Das duas propriedades acima podemos obter uma expressão explícita para $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$:
Por (a), temos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \alpha\vec{u}$.
Por (b), temos que $\vec{v} - \alpha\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{u}$, e portanto $\langle \vec{v} - \alpha\vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$, o que dá

$$\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \Rightarrow \alpha = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}.}$$

Exercício 35. Calcule a projeção ortogonal do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$ sobre cada um dos vetores da base ortonormal $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Convidamos o leitor para refletir sobre a veracidade do seguinte fato:

Proposição 8. *Se $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são dois vetores não nulos e paralelos, então para qualquer vetor $\vec{v}$ vale*

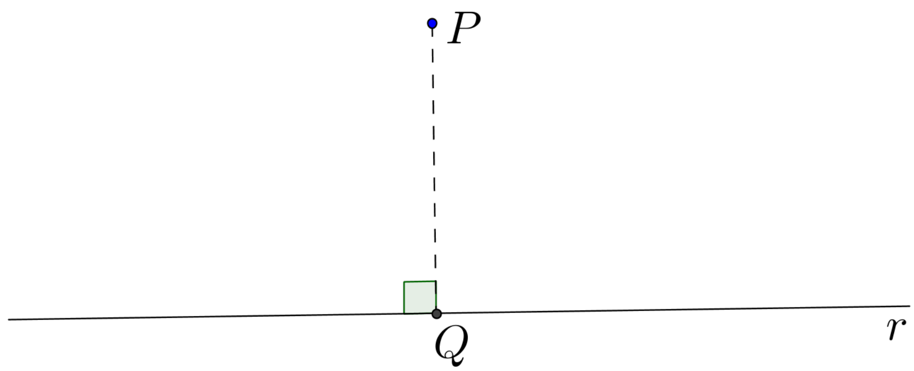
$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \mathrm{proj}_{\vec{w}}\vec{v}.$$

O que a proposição acima nos dá é que na verdade a projeção ortogonal pode ser pensada como a projeção ortogonal não exatamente sobre um vetor, mas sobre uma *direção*. Usaremos constantemente esta ideia.

5.2 Distância entre ponto e reta

Sejam P um ponto e r uma reta (no plano ou no espaço, tanto faz). Como definir a distância entre P e r?

Imagine que se quer percorrer o *caminho mais curto* entre P e r. Em qual ponto de r este caminho desemboca?



Não é muito difícil se convencer que tal ponto é $Q \in r$ tal que $PQ \perp r$. Determinar tal ponto no caso geral é uma tarefa não muito simples, pois precisaríamos: 1) determinar a reta s que passa por P e é ortogonal a r (que é única se $P \notin r$); 2) Determinar o ponto Q de intersecção entre r e s; 3) Calcular a distância entre P e Q.

Distância, no espaço, entre ponto e reta.

Observe que a distância é dada por $\|\overrightarrow{PQ}\|$, onde Q é tal que $\overline{PQ} \perp r$. A melhor mandeira de determinar $\overrightarrow{PQ}$ é utilizando a projeção ortogonal.

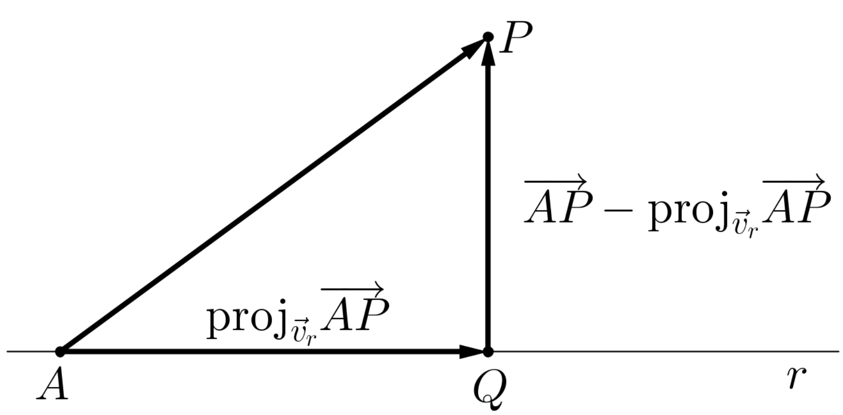
Precisamente, se $A \in r$ é um ponto qualquer de r e $\vec{v}$ é vetor diretor de r, então

$$Q = A + \text{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{AP}.$$

Assim,

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP} - \text{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{AP},$$

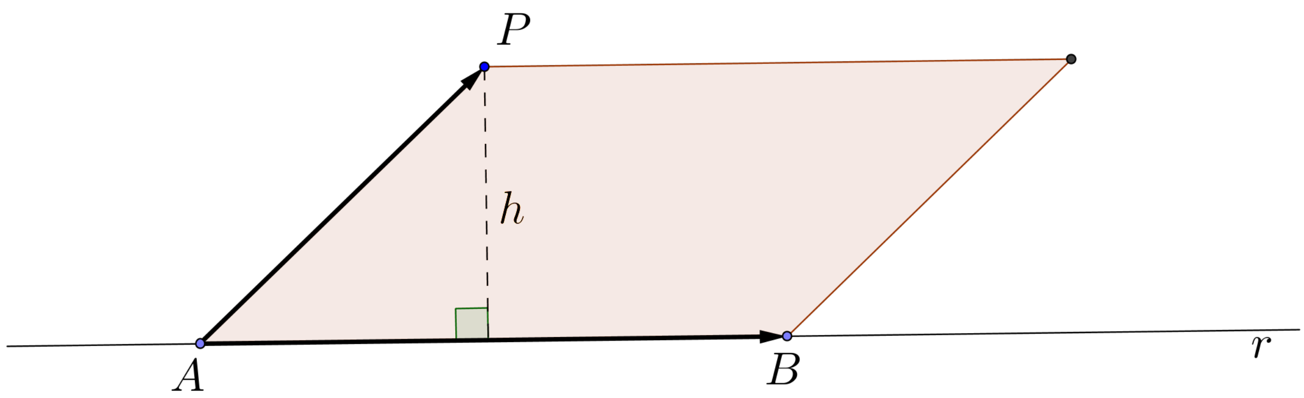
e portanto



$$\boxed{d(P,r) = \|\overrightarrow{AP} - \text{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{AP}\|.}$$

A figura a seguir sugere outra maneira de calcular $d(P,r)$ no espaço, a saber:

$$\boxed{d(P,r) = \text{altura de qualquer paralelogramo com base sobre } r \text{ e vértice em } P.}$$



Sabendo que a base deste paralelogramo é $\|\overrightarrow{AB}\|$ e a área é $h\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}\|$, segue que

$$d(P,r) = h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|},$$

onde A, B são quaisquer pontos distintos de r. Isso é equivalente a

$$d(P,r) = \frac{\|\vec{v}_r \wedge \overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{v}_r\|},$$

onde $\vec{v}_r$ é um vetor diretor para r.

Exemplo 8. Calcule $d(P,r)$ onde $P = (1/2, 3/2, 0)$ e r é a reta de intersecção dos planos $\Pi_1 : x - y - z = 1$ e $\Pi_2 : x + y = 0$.

Solução:

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-1,2),$$

$A = (0,0,-1) \in r$ (basta encontrar um ponto que satisfaça ambas as equações de Π_1 e Π_2); $\overrightarrow{AP} = (1/2, 3/2, 1)$.

$$\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1/2 & 3/2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (4,0,2).$$

Juntando tudo,

$$d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}_r\|}{\|\vec{v}_r\|} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

Exercício 36. Utilize projeções ortogonais para determinar $\overrightarrow{PQ}$ de modo que $PQ \perp r$ e calcule $d(P,Q)$, onde P e r são o ponto e a reta do Exemplo acima. Compare as resoluções e escolha sua maneira preferida.

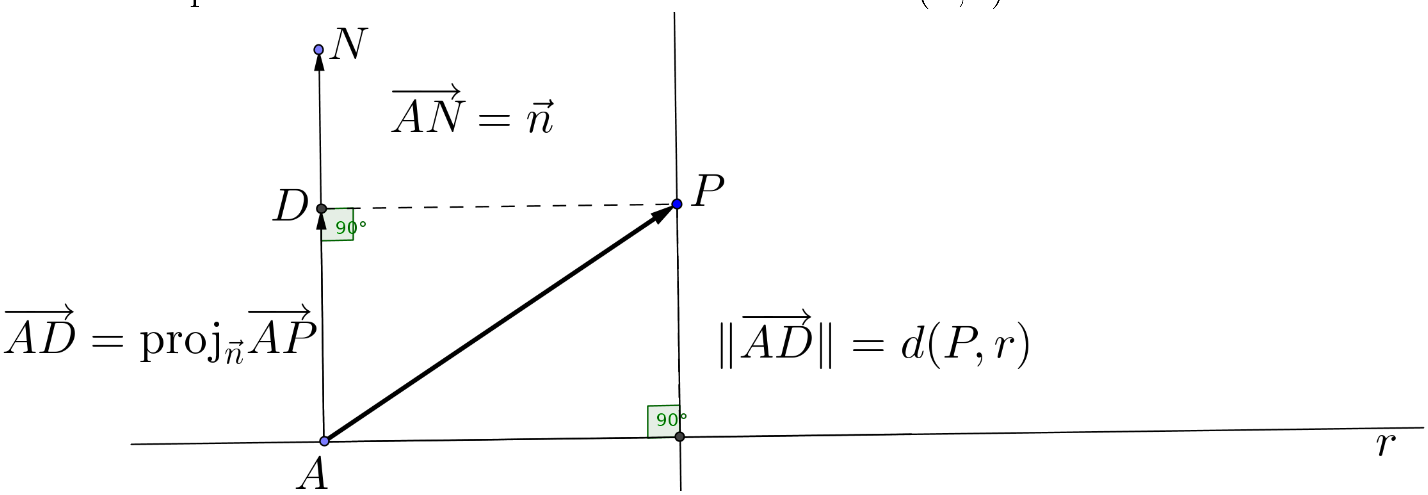
5.2.1 Distância (no plano) entre ponto e reta

Conforme já comentamos alguns capítulos atrás, o plano tem a grande vantagem de ter apenas duas dimensões, e portanto conhecer uma direção é equivalente a conhecer uma direção ortogonal.

Observe então que a distância entre P e r, no plano, pode ser calculada por

$$d(P,r) = \|\text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\|,$$

onde $A \in r$ é um ponto qualquer e $\vec{n}$ é um vetor ortogonal a r (a direção de tal vetor é única; compare o que ocorre com retas no espaço!). Veja a figura a seguir para se convencer que esta é a maneira mais natural de obter $d(P,r)$.



Observe que

$$\|\text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\| = \left\|\frac{\langle\overrightarrow{AP},\vec{n}\rangle}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\right\| = \frac{\left|\langle\overrightarrow{AP},\vec{n}\rangle\right|}{\|\vec{n}\|^2}\|\vec{n}\| = \frac{\left|\langle\overrightarrow{AP},\vec{n}\rangle\right|}{\|\vec{n}\|},$$

logo

$$\boxed{\text{No plano, } d(P,r) = \frac{|\langle\overrightarrow{AP},\vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} \text{ onde } A \in r \text{ é qualquer e } \vec{n} \perp r.}$$

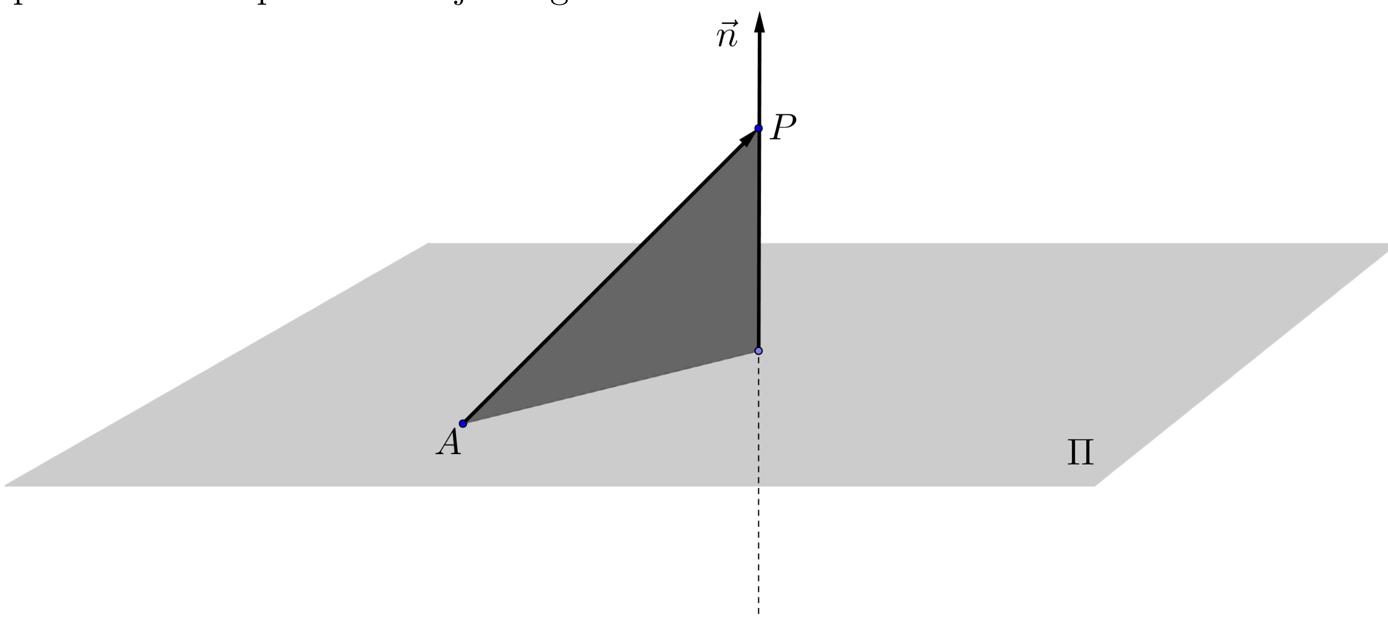
Exemplo 9. Calcule a distância entre o ponto $P = (5, -30)$ e a reta $r : 2x+4y-8 = 0$.

Solução: Sabemos que $\vec{n} = (2, 4)$ é um vetor normal a r. O ponto $A = (4, 0)$ pertence a r. Observe então que $\vec{AP} = (1, -30)$ e daí

$$d(P, r) = \frac{|\langle \overrightarrow{AP}, \vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\langle (1, -30), (2, 4)\rangle|}{\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{|-118|}{20}\frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{118}{20\sqrt{20}} = \frac{59}{40\sqrt{5}}.$$

5.2.2 Distância (no espaço) entre ponto e plano

Podemos aproveitar a mesma ideia da Seção acima para calcular a distância de um ponto P a um plano Π! Veja a figura:



Logo assim como feito na Seção anterior,

$$\boxed{d(P, \Pi) = \|\text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\| = \frac{\left|\langle \overrightarrow{AP}, \vec{n}\rangle\right|}{\|\vec{n}\|}, \text{ onde } A \in \Pi \text{ é qualquer e } \vec{n} \perp \Pi.}$$

Exercício 37. Calcule a distância entre $P = (0, 2, 4)$ e o plano $\Pi : x-4y+7z-10 = 0$.

5.3 Distância entre planos.

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } \Pi_1 \text{ e } \Pi_2 \text{ se interseccionam.} \\ d(\Pi_1, P), & \text{onde } P \in \Pi_2 \text{ é qualquer ponto de } \Pi_2. \end{cases}$$

Exercício 38. Faça um desenho para se convencer que esta definição é adequada. A seguir, calcule a distância entre os planos Π_1 e Π_2 abaixo:

a) $\Pi_1 : 2x - 3y + z = 6$, $\Pi_2 : 2x - 5y - 4z = 7$.

b) $\Pi_1 : 2x - 3y + z = 6$, $\Pi_2 : 4x - 6y + 2z = 24$.

c) $\Pi_1 : 2x - 3y + z = 6$, $\Pi_2 : -6x + 9y - 3z + 18 = 0$.

5.4 Distância entre retas

5.4.1 Distância (no plano) entre retas

A distância entre duas retas r e s no plano é definida como:

$$d(r,s) = \begin{cases} 0, \text{ se } r \text{ e } s \text{ se interseccionam.} \\ d(r,P), \text{ onde } P \in s \text{ é qualquer ponto de } s. \end{cases}$$

Exercício 39. Faça um desenho para se convencer que esta definição é adequada[1]. A seguir, calcule a distância entre as retas r e s abaixo:

a) $r : 2x - 3y = 6$, $s : 2x - 5y = 7$.

b) $r : 2x - 3y = 6$, $s : 4x - 6y = 24$.

c) $r : 2x - 3y = 6$, $s : -6x + 9y + 18 = 0$.

5.4.2 Leitura adicional: Distância (no espaço) entre duas retas

Existem três posições relativas possíveis entre retas no espaço, a saber: se r e s são retas, então elas se interseccionam, ou são paralelas não coincidentes, ou não são paralelas e não se interseccionam (neste caso, são ditas *reversas*). A distância entre r e s é definida facilmente nos dois primeiros casos:

$$d(r,s) = 0 \text{ se } r \cap s \neq \emptyset.$$

e

$$d(r,s) = d(P,r) \text{ onde } P \in s \text{ é qualquer, se } r \text{ e } s \text{ forem paralelas.}$$

Para definir distância entre retas reversas, precisamos do seguinte fato:

Teorema 1. *Se r e s são retas reversas, então existe um único plano Π que contém r e tal que $s \cap \Pi = \emptyset$.*

[1] Essa definição utiliza o 5º Postulado de Euclides, a saber: dada uma reta e um ponto fora dela, existe uma única reta passando por este ponto que é paralela à reta dada. Esse 5º Postulado não é válido em outros ambientes, por exemplo no Plano Hiperbólico. O leitor curioso pode procurar mais a respeito!!

Demonstração. Sejam $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ vetores diretores para r e s, respectivamente. Como r e s não são paralelas, $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ são linearmente independentes. Defina $\vec{n} := \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s$. Então $\vec{n}$ é não nulo e é simultaneamente ortogonal a r e a s, logo qualquer plano que tenha $\vec{n}$ como vetor normal é paralelo a r e a s. Em particular, o plano que contém r e é ortogonal a $\vec{n}$ é também paralelo a s.

Tal plano é único. Suponhamos que existe $\Pi' \neq \Pi$ plano que contenha r e seja paralelo a s. Seja $\vec{n'}$ um vetor diretor para Π'. Como $r \subset \Pi'$, deve valer $\vec{v}_r \perp \vec{n'}$. Como s é paralela a Π', deve valer também $\vec{v}_s \perp \vec{n'}$. Assim, $\vec{n'} \parallel \vec{n}$, e portanto os planos Π e Π' devem ser paralelos. Como ambos devem conter um ponto de r, devem ser coincidentes. $\square$

Com este resultado, podemos definir a distância entre r e s retas reversas: $d(r, s) = d(s, \Pi)$, onde Π é plano paralelo a s que contém r.

Resumindo, a distância (no espaço) entre duas retas é dada por:

$$d(r,s) = \begin{cases} 0, \text{ se } r \cap s \neq \emptyset, \\ d(r, P), \text{ onde } P \in s, \text{ se } r \parallel s, \\ d(s, \Pi), \text{ onde } \Pi \text{ é o único plano com } r \subset \Pi, s \parallel \Pi, \text{ se } r \text{ e } s \text{ são reversas.} \end{cases}$$