MAT01191 – Vetores e Geometria Analítica – Professora Miriam Telichevesky
Lista de Exercícios 5

1. Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ nos seguintes casos:
   (a) $\vec{u} = (2, 1, 2)$, $\vec{v} = (0, 3, 3)$ e $\vec{w} = (1, 0, 1)$.
   (b) $\vec{u} = (1, 3, -1)$, $\vec{v} = (-1, 0, -1)$ e $\vec{w} = (2, 1, 1)$
   (c) $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$ e $\vec{w} = (1, 4, 9)$

2. Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ nos seguintes casos:
   (a) $\vec{u} = (2, 1, 4)$, $\vec{v} = (2, -1, 3)$ e $\vec{w} = (5, 4, 1)$.
   (b) $\vec{u} = (8, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 2, 3)$ e $\vec{w} = (0, 0, 2)$.

3. Sejam A, B e C pontos não colineares. Mostre que a distância do ponto P ao plano determinado por A, B e C é dada por
$$d = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}]|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}.$$

4. Afirmamos que o volume do tetraedro gerado pelos vetores L.I. $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado por $1/6$ do volume do paralelepípedo gerado pelos mesmos vetores. Com isso, resolva os seguintes itens:
   (a) Calcule o volume do tetraedro gerado pelos vetores $\vec{u}$,$\vec{v}$ e $\vec{w}$, nos seguintes casos:
      i. $\vec{u} = (1, 3, -2)$, $\vec{v} = (2, 1, 4)$ e $\vec{w} = (2, -1, 3)$.
      ii. $\vec{u} = (5, -3, -7)$, $\vec{v} = (3, 2, 3)$ e $\vec{w} = (1, 3, 4)$.
      iii. $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (0, 6, 18)$ e $\vec{w} = (0, 0, 3)$.
   (b) Dados $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 3, 2)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 0, 1)$, calcule:
      i. A área do triângulo ABC.
      ii. O volume do tetraedro $ABCD$ e sua altura relativa ao plano determinado por A, B e C (ou seja, a distância do ponto D a este plano).
   (c) Sejam $\overrightarrow{AB} = (3, 6, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (1, 3, -2)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 2, \alpha - 2)$. Determine valores para o parâmetro α de modo que o volume V do tetraedro $ABCD$ seja 3.

5. Sabe-se que $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$ formam uma base ortonormal. Quais são os possíveis valores de $[\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}]$? Justifique sua resposta.

6. * Lembrando que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\angle(\vec{u}, \vec{v})$ e que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\text{sen}\,\angle(\vec{u}, \vec{v})$, e que para $0^o \leq \theta \leq 180^o$ vale $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ e $0 \leq \text{sen}\,\theta \leq 1$, faça o que é solicitado.
   (a) (Desiguldade de Cauchy-Schwarz) Mostre que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, sendo que a igualdade ocorre se, e somente se, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos.
   (b) Mostre que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, e que a igualdade ocorre se, e somente se, $\vec{u} \perp \vec{v}$.
   (c) Interprete geometricamente o resultado do item (b).
   (d) Utilize os itens anteriores para mostrar que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$, com igualdade se, e somente se, os três vetores forem ortogonais dois a dois. Interprete geometricamente este resultado.