MAT01191 – Vetores e Geometria Analítica – Professora Miriam Telichevesky
Lista de Exercícios 3

Ao longo desta lista, todos os vetores estão expressos em coordenadas com respeito a uma base ortonormal pré-fixada

1. Sejam $\vec{u} = (0, 1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 4, -6)$. Calcule:
   (a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$
   (b) $\|\vec{u} - 2\vec{v}\|$
   (c) $\left\|-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\right\|$
   (d) $\|\vec{u} - \vec{v}\|$

2. Sejam $\vec{u} = (1, 4, 1)$ e $\vec{v} = (0, 1, -8)$. Calcule:
   (a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
   (b) $\|\vec{u}\|$
   (c) $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u}$
   (d) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

3. Calcue a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$:
   (a) $\vec{u} = (1, 3, -1)$ e $\vec{v} = (0, -1, -3)$
   (b) $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ e $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

4. Sabendo que $\vec{u} = \left(\sqrt{m}, 1, \frac{1}{2}\right)$ e $\vec{v} = \left(\sqrt{m}, \frac{1}{2}, 1\right)$, determine m, se existir, sabendo que o cosseno do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vale:
   (a) $0,8$
   (b) $\frac{1}{3}$

5. Mostre que os vetores $(a, 1, 1 + a^2)$ e $(a, 1 + a^2, 1)$ não podem ser ortogonais.

6. Mostre que $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $\vec{w} = (0, 0, 1)$ formam uma base ortonormal.

7. Mostre (sem usar a Lei dos Cossenos) que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

8. Mostre que as diagonais de um losango são perpendiculares. Reciprocamente, mostre que se um paralelogramo é tal que suas diagonais são perpendiculares, então ele é um losango.

9. Para cada item, calcule $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}$ e decomponha $\vec{v}$ como dois vetores, um paralelo e outro ortogonal a $\vec{u}$.
   (a) $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (4, 10, 10)$

(b) $\vec{u} = (-1, 0, 2)$ e $\vec{v} = (1, 4, 3)$

(c) $\vec{u} = (1, -2, 0)$ e $\vec{v} = (2, 1, 3)$

(d) $\vec{u} = (-6, 3, 6)$ e $\vec{v} = (-2, 1, 2)$

10. (a) Mostre que se $\vec{u}$ é vetor de norma 1, então

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u},$$

para qualquer que seja o vetor $\vec{v}$.

(b) Utilize o item (a) para mostrar que se $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$ formam uma base ortonormal, então

$$\vec{v} = \text{proj}_{\vec{e_1}}\vec{v} + \text{proj}_{\vec{e_2}}\vec{v} + \text{proj}_{\vec{e_3}}\vec{v}.$$