Introdução à Geometria Hiperbólica Plana

Miriam Telichevesky
miriamt@mat.ufrgs.br

Matemática em Minicursos - UFRGS, abril de 2021

Aula 2

Axiomas

Axiomas

Postulado I Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos (distintos).

Axiomas

Postulado I Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos (distintos).

Postulado II Pode-se continuar (de maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

Axiomas

Postulado I Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos (distintos).

Postulado II Pode-se continuar (de maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

Postulado III Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

Axiomas

Postulado I Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos (distintos).

Postulado II Pode-se continuar (de maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

Postulado III Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

Postulado IV Todos os ângulos retos são iguais.

Sobre retas Retas são conjuntos ilimitados.

Continuidade As retas e os círculos são contínuos.

Axioma de Pasch Se ABC é um triângulo e uma reta r "entra no triângulo" pelo vértice C, então deve interseccionar o lado AB.

Observação sobre a aula de hoje: como semana que vem vamos adotar um modelo para a geometria hiperbólica, muitas dos teoremas de hoje não serão demonstrados porque ficam "triviais" no modelo.

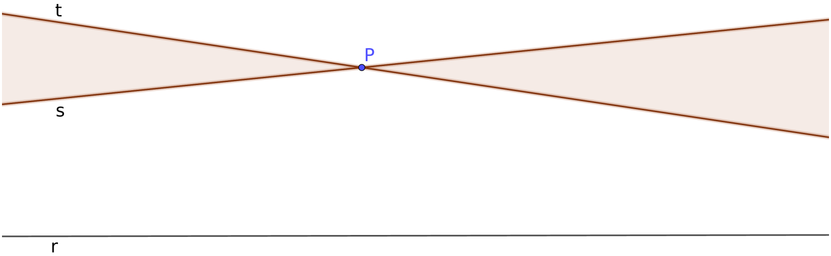
Postulado V_H para a geometria hiperbólica

Postulado $\mathbf{V}_H$. Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, existem pelo menos duas retas s e t (distintas) contendo P e não interseccionando r.

Primeira consequência

Primeira consequência

Teorema Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, existem infinitas retas por P que não interseccionam r.



Definição de paralelismo

Teorema Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, existem exatamente duas retas s e s' que separam o conjunto das retas que interseccionam r das que não interseccionam r. Além disso, s e s' pertencem ao conjunto das retas que não interseccionam r.

Definição de paralelismo

Teorema Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, existem exatamente duas retas s e s' que separam o conjunto das retas que interseccionam r das que não interseccionam r. Além disso, s e s' pertencem ao conjunto das retas que não interseccionam r.

Estas duas retas que existem são chamadas *paralelas a r passando por P*.

Definição de paralelismo

Teorema Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, existem exatamente duas retas s e s' que separam o conjunto das retas que interseccionam r das que não interseccionam r. Além disso, s e s' pertencem ao conjunto das retas que não interseccionam r.

Estas duas retas que existem são chamadas *paralelas a r passando por P*.
As demais retas por P que não interseccionam r serão chamadas *hiperparalelas a r por P*.

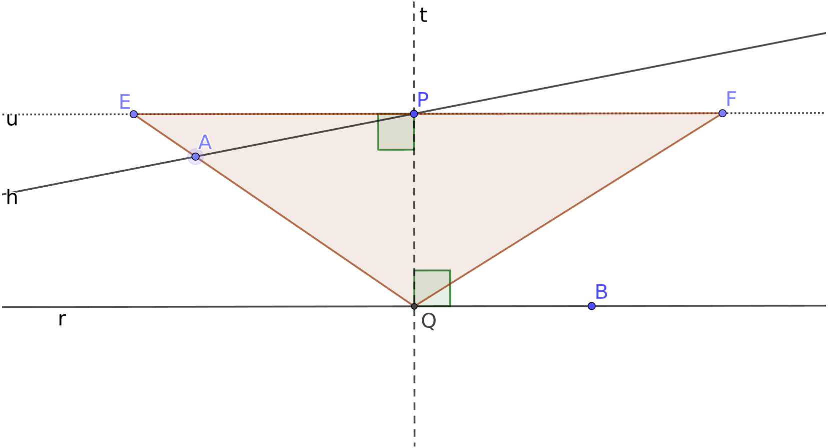
Definição de paralelismo

Teorema Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, existem exatamente duas retas s e s' que separam o conjunto das retas que interseccionam r das que não interseccionam r. Além disso, s e s' pertencem ao conjunto das retas que não interseccionam r.

Estas duas retas que existem são chamadas *paralelas a r passando por P*.
As demais retas por P que não interseccionam r serão chamadas *hiperparalelas a r por P*.

Prova do teorema

Cada reta h por P distinta de u e de t corta o triângulo EFQ em um dos lados EQ ou FQ, num ponto $A(h)$.
Reciprocamente, cada ponto A em um destes segmentos corresponde a uma reta $h(A)$ distinta de u e de t.



Se $\mathcal{I}$ é o conjunto das retas por P que interseccionam r e $\mathcal{N}$ é o conjunto das retas por P que não interseccionam r, temos:

- Se A é tal que a reta $h(A)$ pertence a $\mathcal{I}$, então para todo $B \in AQ$ tem-se que $h(B)$ também pertence a $\mathcal{I}$.

Se $\mathcal{I}$ é o conjunto das retas por P que interseccionam r e $\mathcal{N}$ é o conjunto das retas por P que não interseccionam r, temos:

- Se A é tal que a reta $h(A)$ pertence a $\mathcal{I}$, então para todo $B \in AQ$ tem-se que $h(B)$ também pertence a $\mathcal{I}$.
- Se A é tal que a reta $h(A)$ pertence a $\mathcal{N}$, então para todo $B \in EQ$ tem-se que $h(B)$ também pertence a $\mathcal{N}$.

Se $\mathcal{I}$ é o conjunto das retas por P que interseccionam r e $\mathcal{N}$ é o conjunto das retas por P que não interseccionam r, temos:

- Se A é tal que a reta $h(A)$ pertence a $\mathcal{I}$, então para todo $B \in AQ$ tem-se que $h(B)$ também pertence a $\mathcal{I}$.
- Se A é tal que a reta $h(A)$ pertence a $\mathcal{N}$, então para todo $B \in EQ$ tem-se que $h(B)$ também pertence a $\mathcal{N}$.

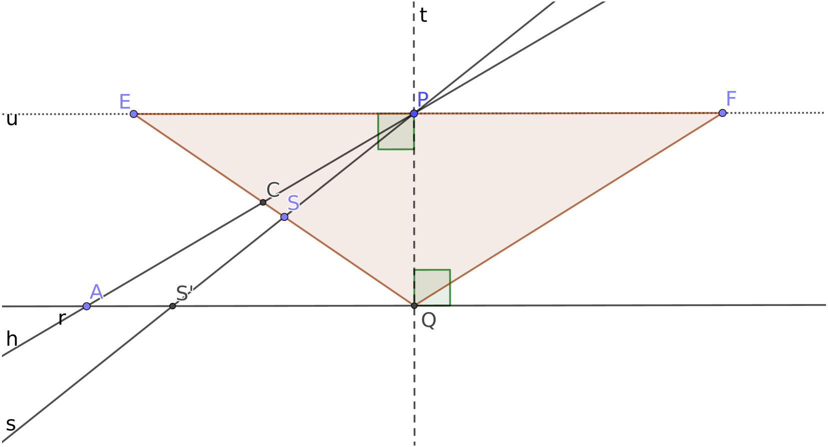
Isso dá uma divisão do segmento EQ em dois segmentos, digamos, $EQ = ES \cup SQ$, onde S delimita a mudança do conjunto $\mathcal{N}$ para $\mathcal{I}$ como acima.

Se $\mathcal{I}$ é o conjunto das retas por P que interseccionam r e $\mathcal{N}$ é o conjunto das retas por P que não interseccionam r, temos:

- Se A é tal que a reta $h(A)$ pertence a $\mathcal{I}$, então para todo $B \in AQ$ tem-se que $h(B)$ também pertence a $\mathcal{I}$.
- Se A é tal que a reta $h(A)$ pertence a $\mathcal{N}$, então para todo $B \in EQ$ tem-se que $h(B)$ também pertence a $\mathcal{N}$.

Isso dá uma divisão do segmento EQ em dois segmentos, digamos, $EQ = ES \cup SQ$, onde S delimita a mudança do conjunto $\mathcal{N}$ para $\mathcal{I}$ como acima.

Seja s a reta que corresponde ao ponto $S \in EQ$ definido acima. Então $s \in \mathcal{N}$. De fato, se s pertencesse a $\mathcal{I}$, então existiria um ponto S' tal que $S' = r \cap s$. Seja $A \in \overrightarrow{QS'}$ tal que $S' \in AQ$. Então a reta determinada por P e S' pertence a $\mathcal{I}$ mas é tal que o ponto C de intersecção como segmento EQ está em ES, o que é um absurdo.



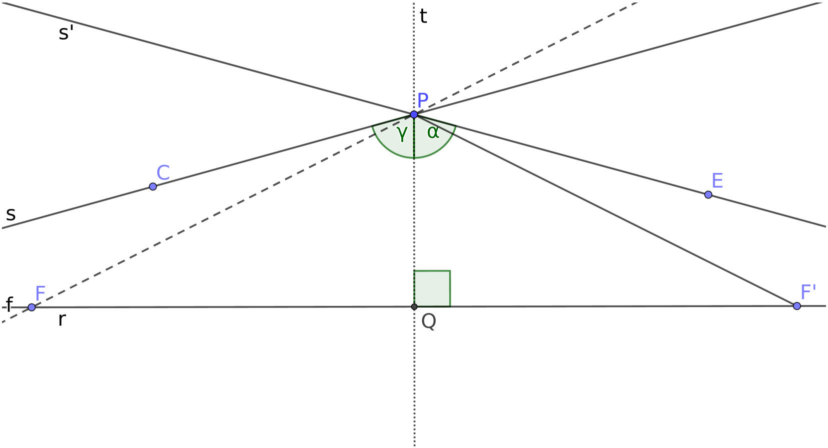
Outro teorema bem importante

Teorema As paralelas a r por P formam ângulos iguais com a perpendicular a r baixada de P; além disso, este ângulo é agudo.

Outro teorema bem importante

Teorema As paralelas a r por P formam ângulos iguais com a perpendicular a r baixada de P; além disso, este ângulo é agudo.

Com esse teorema passamos a ter uma "imagem oficial" de retas paralelas, e podemos adotar a "definição" de *sentido de paralelismo*. Temos também o "desenho oficial" das paralelas.



t
s'
P
γ
α
C
E
s
F
F'
f
r
Q

Importante

Importante

Teorema. Seja s uma paralela a r por P. Então para todo ponto Q em s para o lado onde ocorre o paralelismo com r vale que s é a paralela a r para o mesmo lado.

Importante

Teorema. Seja s uma paralela a r por P. Então para todo ponto Q em s para o lado onde ocorre o paralelismo com r vale que s é a paralela a r para o mesmo lado.

Assim, faz sentido definir que s é paralela a r se existir $P \in s$ tal que s é paralela a r por P.

Importante

Teorema. Seja s uma paralela a r por P. Então para todo ponto Q em s para o lado onde ocorre o paralelismo com r vale que s é a paralela a r para o mesmo lado.

Assim, faz sentido definir que s é paralela a r se existir $P \in s$ tal que s é paralela a r por P.

Também a partir daí faz sentido provar que se s é paralela a r, então r é paralela a s (para o mesmo lado).

O que vem no lugar da transitividade

Se duas retas s e t são paralelas a r *para o mesmo lado*, então s e t são paralelas entre si.

Pontos ideais

Nova definição: Acrescentamos a cada reta dois pontos, um que está antes de todos os pontos da reta e outro que está depois de todos (estes pontos não existem no plano, mas podemos defini-los precisamente; é como adicionar $-\infty$ e $+\infty$ à reta real). Chamamos estes pontos de *pontos ideais*.

Pontos ideais

Nova definição: Acrescentamos a cada reta dois pontos, um que está antes de todos os pontos da reta e outro que está depois de todos (estes pontos não existem no plano, mas podemos defini-los precisamente; é como adicionar $-\infty$ e $+\infty$ à reta real). Chamamos estes pontos de *pontos ideais*.

Duas retas paralelas podem ser pensadas como "se encontrando num ponto ideal".

Pontos ideais

Nova definição: Acrescentamos a cada reta dois pontos, um que está antes de todos os pontos da reta e outro que está depois de todos (estes pontos não existem no plano, mas podemos defini-los precisamente; é como adicionar $-\infty$ e $+\infty$ à reta real). Chamamos estes pontos de *pontos ideais*.

Duas retas paralelas podem ser pensadas como "se encontrando num ponto ideal".

É possível provar que dados A um ponto ordinário e Ω um ponto ideal, existe uma única reta que passa por A e "termina" em Ω. (exercício!)

Triângulos generalizados

Triângulos generalizados

Sejam A um ponto ordinário, r uma reta por A e Ω um dos pontos ideais de r. Se $B \notin r$, dizemos que A, B e Ω formam um triângulo generalizado (com dois pontos ordinários e um ponto ideal).

Triângulos generalizados

Sejam A um ponto ordinário, r uma reta por A e Ω um dos pontos ideais de r. Se $B \notin r$, dizemos que A, B e Ω formam um triângulo generalizado (com dois pontos ordinários e um ponto ideal).

Este triângulo é bastante intrigante. Dois de seus lados têm comprimento infinito, a saber, $A\Omega$ e $B\Omega$, e podemos extrapolar nossa imaginação e pensar que existe um ângulo em Ω, medindo 0.

Triângulos generalizados

Se A é um ponto, r e s são retas concorrentes em A e Ω e Ω' são pontos ideais de r e s, respectivamente, é possível mostrar que existe uma reta t não contendo A tal que Ω e Ω' são precisamente seus pontos ideais

Triângulos generalizados

Se A é um ponto, r e s são retas concorrentes em A e Ω e Ω' são pontos ideais de r e s, respectivamente, é possível mostrar que existe uma reta t não contendo A tal que Ω e Ω' são precisamente seus pontos ideais (pense que r e s devem ser as paralelas a alguma reta t passando por A, uma para cada lado... mas para a construção dar certo precisamos definir um objeto chamado ângulo de paralelismo).

Triângulos generalizados

Se A é um ponto, r e s são retas concorrentes em A e Ω e Ω' são pontos ideais de r e s, respectivamente, é possível mostrar que existe uma reta t não contendo A tal que Ω e Ω' são precisamente seus pontos ideais (pense que r e s devem ser as paralelas a alguma reta t passando por A, uma para cada lado... mas para a construção dar certo precisamos definir um objeto chamado ângulo de paralelismo).

Então A, Ω e Ω' são os vértices de outro tipo de triângulo generalizado, agora com um vértice ordinário e dois ideais. Os três lados deste triângulo têm comprimento infinito e dois de seus ângulos são zero.

Triângulos generalizados

Triângulos generalizados

Mais algum tipo de triângulo generalizado?

Triângulos generalizados

Mais algum tipo de triângulo generalizado?

Sim!

Triângulos generalizados

Mais algum tipo de triângulo generalizado?

Sim! Tome três pontos ideais distintos Ω, Ω' e Ω'' e então existem três retas hiperbólicas r, s, t ligando cada par destes três pontos. Estes são os triângulos generalizados de três vértices ideais!

Para não dar muito nó na cabeça: imaginar um círculo pode ser útil (até a próxima aula pelo menos).

Alguns resultados que valiam para triângulos ordinários continuam valendo para triângulos generalizados; alguns trazem adaptações curiosas.

Teorema de Pasch

Teorema de Pasch

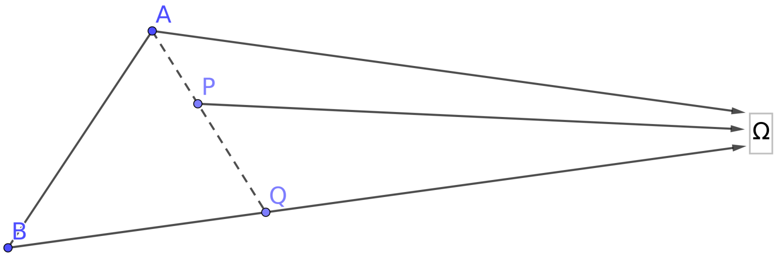
Seja $AB\Omega$ um triângulo generalizado. Se r é uma reta que entra em $AB\Omega$ por A, então ela intersecciona o lado $B\Omega$ (análogo trocando A por B). Se ela entra em $AB\Omega$ por Ω, então deve interseccionar AB.

Teorema de Pasch

Seja $AB\Omega$ um triângulo generalizado. Se r é uma reta que entra em $AB\Omega$ por A, então ela intersecciona o lado $B\Omega$ (análogo trocando A por B). Se ela entra em $AB\Omega$ por Ω, então deve interseccionar AB.

Demonstração: Se r entra no triângulo por A, então deve interseccionar $B\Omega$. De fato, $A\Omega$ é a paralela a $B\Omega$ passando por A no sentido dado por Ω; pela definição de paralelas isso imediatamente implica que r intersecciona $B\Omega$.

Seja agora uma reta r que vem de Ω e entra no triângulo, passando por um ponto P interior a ele. Como acabamos de ver, a reta por A e P deve cruzar $B\Omega$ em um ponto Q. Temos então um triângulo ordinário ABQ, e uma reta r que entra nele por um ponto $P \in AQ$. Então esta reta deve interseccionar AB. (não pode cruzar por A nem por B pois passa por um ponto P interior ao triângulo, também não pode cruzar o lado BQ porque deste modo haveria duas retas distintas ligando B a Ω, o que não ocorre.)



Teorema de Pasch – versão 2

Se uma reta corta um dos lados de um triângulo generalizado e nenhum de seus vértices a ela pertence, então ela cruza um e somente um outro lado deste triângulo.

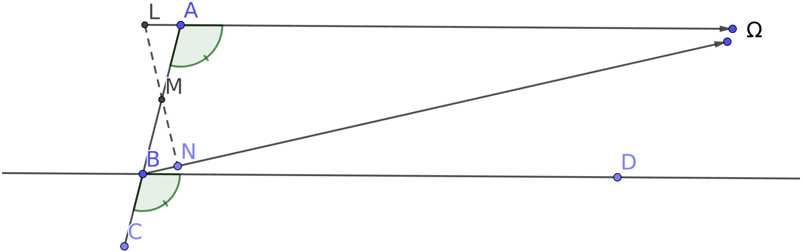
Teorema do ângulo externo

Aqui voltamos a pensar que um triângulo generalizado $AB\Omega$ só tem dois ângulos (ordinários), já que ainda não definimos ângulos nos vértices ideais.

Teorema do ângulo externo

Aqui voltamos a pensar que um triângulo generalizado $AB\Omega$ só tem dois ângulos (ordinários), já que ainda não definimos ângulos nos vértices ideais.

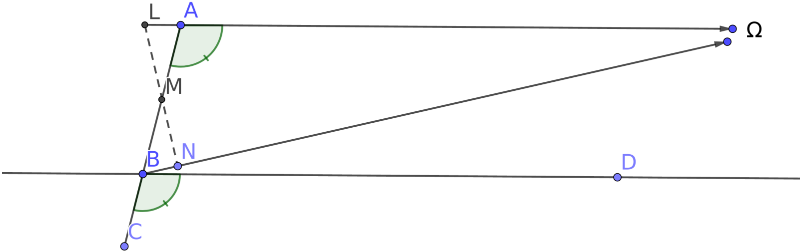
Teorema do ângulo externo. Um ângulo externo a um triângulo generalizado $AB\Omega$ é sempre maior que o ângulo interno que não lhe é adjacente.

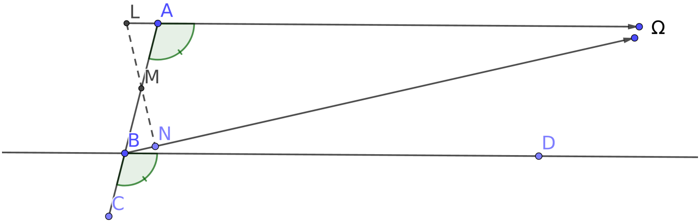


Teorema do ângulo externo

Aqui voltamos a pensar que um triângulo generalizado $AB\Omega$ só tem dois ângulos (ordinários), já que ainda não definimos ângulos nos vértices ideais.

Teorema do ângulo externo. Um ângulo externo a um triângulo generalizado $AB\Omega$ é sempre maior que o ângulo interno que não lhe é adjacente.





Vejamos agora que $D \notin B\Omega$. Por absurdo, suponhamos que esteja. Afirmamos que neste caso é possível “deslocar” a transversal AB às retas $A\Omega$ e $B\Omega$ de modo a obter uma perpendicular comum a elas, o que contradiz o fato que retas paralelas formam ângulos agudos com a perpendicular comum. Para isso, sejam M o ponto médio de AB e N o pé da perpendicular a $B\Omega$ por M. Na reta por $A\Omega$ marque L tal que $A \in L\Omega$ e $LA = BN$. Note que ao supor $D \in B\Omega$ temos também que $L\hat{A}M \equiv N\hat{B}M$. Por lado-ângulo-lado, os triângulos LAM e NBM são congruentes e portanto L, M e N são colineares. Acabamos de encontrar a perpendicular comum, absurdo.

Escólio.

Escólio. Se r e s são cortadas por uma transversal t de modo que os ângulos correspondentes sejam iguais, então r e s não podem ser paralelas (embora não se interseccionem).

Congruência de triângulos generalizados

Dois triângulos generalizados serão ditos congruentes quando os lados e ângulos ordinários forem congruentes.

Congruência de triângulos generalizados

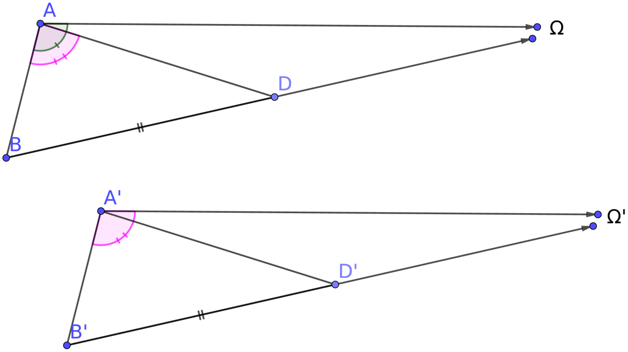
Caso 1 de congruência de triângulos generalizados. Se $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ são tais que $AB \equiv A'B'$ e $B\hat{A}\Omega \equiv B'\hat{A}'\Omega'$, então estes triângulos são congruentes.

Congruência de triângulos generalizados

Caso 1 de congruência de triângulos generalizados. Se $AB\Omega$ e $A'B'\Omega'$ são tais que $AB \equiv A'B'$ e $B\hat{A}\Omega \equiv B'\hat{A}'\Omega'$, então estes triângulos são congruentes.

Note que este critério poderia ser chamado de "lado-ângulo".

Demonstração. Só precisamos mostrar que $A\hat{B}\Omega \equiv A'\hat{B}'\Omega'$, então vamos supor por absurdo que o primeiro seja maior que o segundo. Então existe $D \in B\Omega$ tal que $A\hat{B}D \equiv A'\hat{B}'\Omega'$. Seja $D' \in B'\Omega'$ tal que $B'D' \equiv BD$. Por L-A-L, temos que ABD e $A'B'D'$ são congruentes, absurdo.



Caso 2 de congruência de triângulos

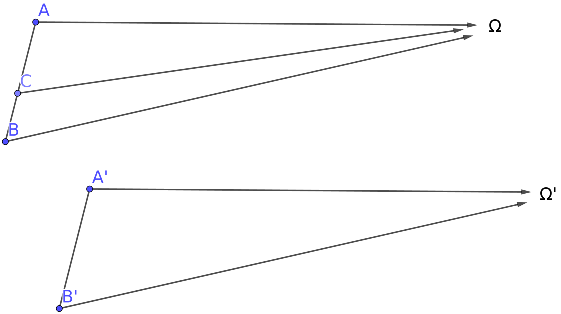
Teorema. Se $A\hat{B}\Omega \equiv A'\hat{B}'\Omega'$ e $B\hat{A}\Omega \equiv B'\hat{A}'\Omega'$, então $\Delta AB\Omega \equiv \Delta A'B'\Omega'$.

Caso 2 de congruência de triângulos

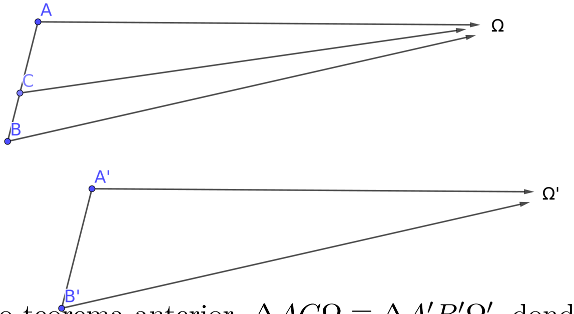
Teorema. Se $A\hat{B}\Omega \equiv A'\hat{B}'\Omega'$ e $B\hat{A}\Omega \equiv B'\hat{A}'\Omega'$, então $\Delta AB\Omega \equiv \Delta A'B'\Omega'$.

Este caso poderia se chamar "ângulo-ângulo".

Demonstração. O que precisamos provar é que $AB \equiv A'B'$. Por absurdo, suponhamos que AB seja maior que $A'B'$. Seja $C \in AB$ tal que $AC \equiv A'B'$.



Demonstração. O que precisamos provar é que $AB \equiv A'B'$. Por absurdo, suponhamos que AB seja maior que $A'B'$. Seja $C \in AB$ tal que $AC \equiv A'B'$.



Pelo teorema anterior, $\Delta AC\Omega \equiv \Delta A'B'\Omega'$, donde segue que $A\hat{C}\Omega \equiv A'\hat{B}'\Omega$, mas este, por hipótese, é congruente a $A\hat{B}\Omega$, então $A\hat{B}\Omega \equiv A\hat{C}\Omega$, contradição com o Escólio (ou com o teorema do ângulo externo aplicado ao triângulo generalizado $\Delta BC\Omega$).

“Isósceles” de mesma base (ordinária)

“Isósceles” de mesma base (ordinária)

Teorema Se $\Delta AB\Omega$ e $\Delta A'B'\Omega'$ são tais que $AB \equiv A'B'$ e $A\hat{B}\Omega \equiv B\hat{A}\Omega$, $A'\hat{B}'\Omega' \equiv B'\hat{A}'\Omega'$, então estes triângulos são congruentes.

Ângulo de paralelismo

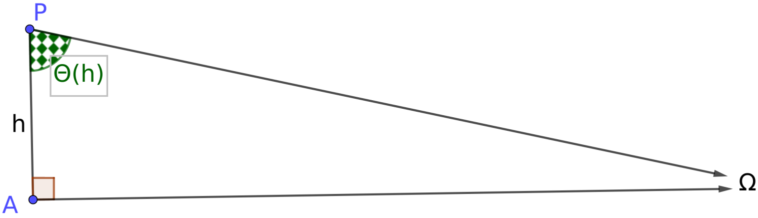
Ângulo de paralelismo

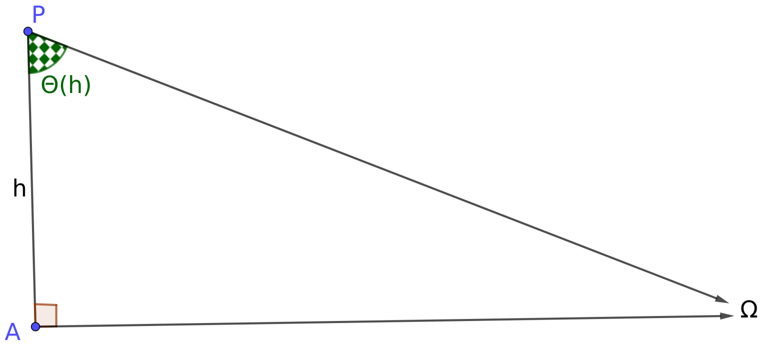
Graças ao critério “lado-ângulo”, faz sentido definir o **ângulo de paralelismo**:

Ângulo de paralelismo

Graças ao critério "lado-ângulo", faz sentido definir o **ângulo de paralelismo**:

Se A é o pé da perpendicular por P numa dada reta, e Ω é o ponto final desta reta, então $AP\Omega$ é um triângulo com $P\hat{A}\Omega = 90^o$ fixado. O outro ângulo, $A\hat{P}\Omega$, deve então ser uma função de $h = AP$, e é chamada de *ângulo de paralelismo*, denotada por $\Theta(h)$.


P
Θ(h)
h
A
Ω


P
Θ(h)
h
A
Ω

Exercício: Provar que Θ é uma função estritamente decrescente (isto é, se $h_2 > h_1$, então $\Theta(h_2) < \Theta(h_1)$, com

$$\lim_{h \to 0^+} \Theta(h) = 90^o$$

e

$$\lim_{h \to +\infty} \Theta(h) = 0^o.$$

Quadriláteros de Saccheri e Lambert

Quadriláteros de Saccheri e Lambert

Ao longo dos séculos, nas tentativas de provar o Postulado V da Geometria Euclidiana utilizando os quatro anteriores, alguns resultados foram demonstrados. Entre eles:

Quadriláteros de Saccheri e Lambert

Ao longo dos séculos, nas tentativas de provar o Postulado V da Geometria Euclidiana utilizando os quatro anteriores, alguns resultados foram demonstrados. Entre eles:

Teorema (Legendre) A soma dos ângulos de um triângulo qualquer nunca é maior que 180^o.

Quadriláteros de Saccheri e Lambert

Ao longo dos séculos, nas tentativas de provar o Postulado V da Geometria Euclidiana utilizando os quatro anteriores, alguns resultados foram demonstrados. Entre eles:

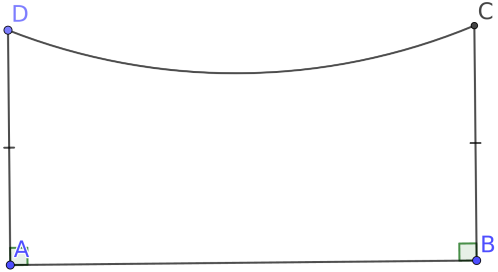
Teorema (Legendre) A soma dos ângulos de um triângulo qualquer nunca é maior que 180^o.
Mas ele não conseguiu demonstrar que valia 180^o.

Quadrilátero de Saccheri

Dadas uma base AB e as laterais AD e BC perpendiculares a AB, o quadrilátero $ABCD$ é dito *de Saccheri com base* AB *e topo* CD. Os ângulos em C e D são ditos *ângulos no topo*.

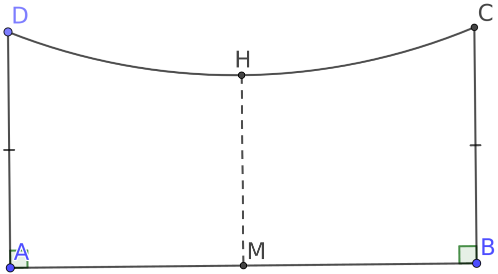
Quadrilátero de Saccheri

Dadas uma base AB e as laterais AD e BC perpendiculares a AB, o quadrilátero $ABCD$ é dito *de Saccheri com base* AB *e topo* CD. Os ângulos em C e D são ditos *ângulos no topo*.



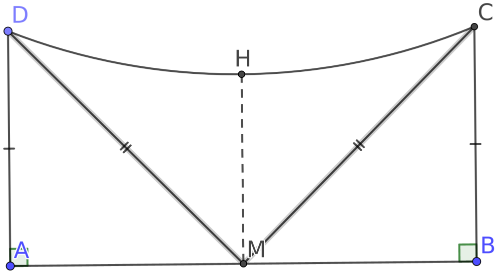
Quadrilátero de Saccheri

Teorema. A reta ligando os pontos médios da base e do topo de um quadrilátero de Saccheri é perpendicular a ambos. Os ângulos no topo de um quadrilátero de Saccheri são congruentes.



Quadrilátero de Saccheri

Demonstração.



Quadrilátero de Saccheri

O teorema anterior faz uso apenas dos 4 primeiros postulados. Na Geometria Euclidiana, o Postulado V implica que os ângulos do topo são retos (já que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180^o).

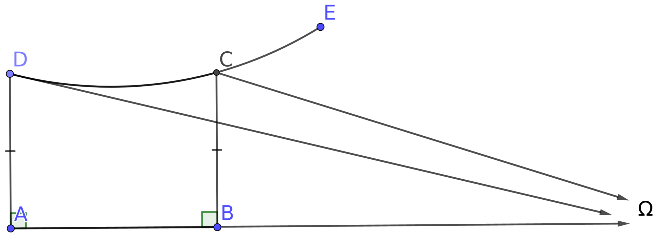
Quadrilátero de Saccheri

O teorema anterior faz uso apenas dos 4 primeiros postulados. Na Geometria Euclidiana, o Postulado V implica que os ângulos do topo são retos (já que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180^o).

Já na Geometria Hiperbólica vale:

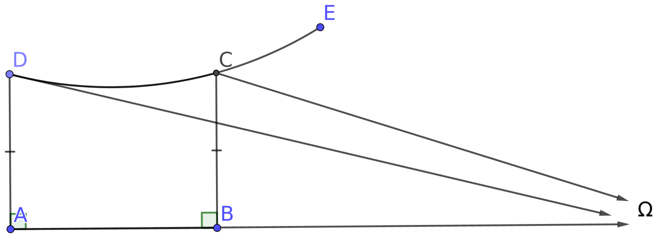
Teorema. Os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.

Demonstração



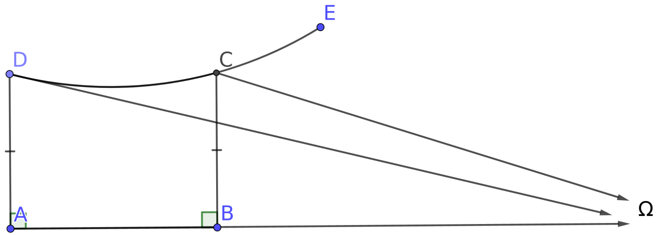
Por serem ângulos de paralelismo referentes à mesma altura, $A\hat{D}\Omega \equiv C\hat{B}\Omega$.

Demonstração



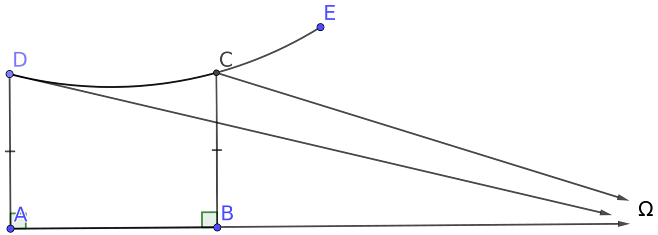
Por serem ângulos de paralelismo referentes à mesma altura, $A\hat{D}\Omega \equiv C\hat{B}\Omega$. O ângulo $E\hat{C}\Omega$ é externo ao triângulo $CD\Omega$, e portanto $E\hat{C}\Omega > C\hat{D}\Omega$.

Demonstração



Por serem ângulos de paralelismo referentes à mesma altura, $A\hat{D}\Omega \equiv C\hat{B}\Omega$. O ângulo $E\hat{C}\Omega$ é externo ao triângulo $CD\Omega$, e portanto $E\hat{C}\Omega > C\hat{D}\Omega$. Somando estas conclusões obtemos que $B\hat{C}E > A\hat{D}C \equiv B\hat{C}D$.

Demonstração

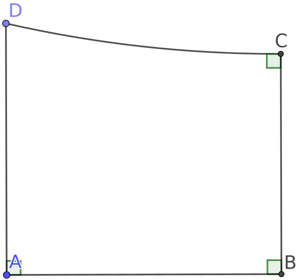


Por serem ângulos de paralelismo referentes à mesma altura, $A\hat{D}\Omega \equiv C\hat{B}\Omega$. O ângulo $E\hat{C}\Omega$ é externo ao triângulo $CD\Omega$, e portanto $E\hat{C}\Omega > C\hat{D}\Omega$. Somando estas conclusões obtemos que $B\hat{C}E > A\hat{D}C \equiv B\hat{C}D$. Como $D\hat{C}E = 180^o$ e $D\hat{C}E = B\hat{C}D + B\hat{C}E$, segue que $B\hat{C}D$ é agudo.

Quadrilátero de Lambert

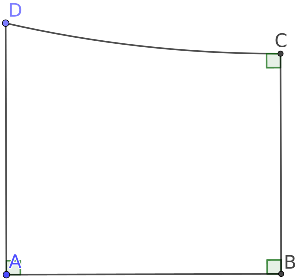
Quadrilátero de Lambert

Um *quadrilátero de Lambert* é um quadrilátero com 3 ângulos retos. O ângulo desconhecido é dito *ângulo do quadrilátero de Lambert*.



Quadrilátero de Lambert

Um *quadrilátero de Lambert* é um quadrilátero com 3 ângulos retos. O ângulo desconhecido é dito *ângulo do quadrilátero de Lambert*.



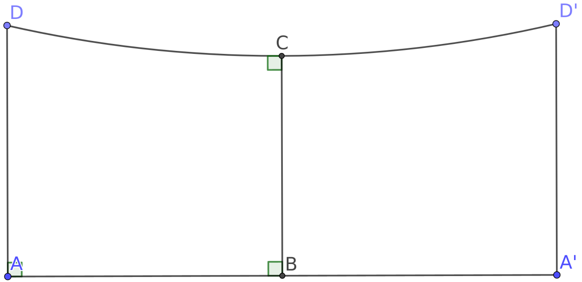
Na Geometria Euclidiana o ângulo do quadrilátero de Lambert é reto.

Quadrilátero de Lambert

Teorema. O ângulo do quadrilátero de Lambert é agudo.

Quadrilátero de Lambert

Teorema. O ângulo do quadrilátero de Lambert é agudo.



Ideia da demonstração: refletir a figura para obter um quadrilátero de Saccheri.

Soma dos ângulos internos de um triângulo

Soma dos ângulos internos de um triângulo

Teorema. A soma dos ângulos internos de um triângulo ABC é sempre menor que dois ângulos retos.

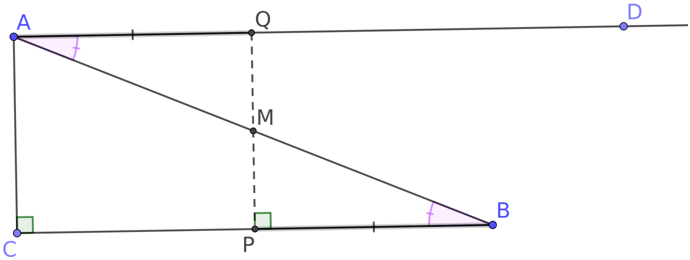
Soma dos ângulos internos de um triângulo

Lema. A soma dos ângulso internos do triângulo ABC, retângulo em C, é menor que dois ângulos retos.

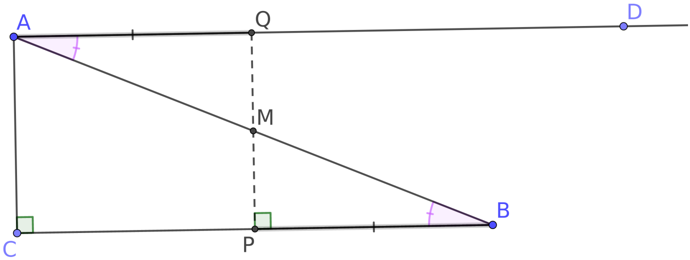
Soma dos ângulos internos de um triângulo

Lema. A soma dos ângulso internos do triângulo ABC, retângulo em C, é menor que dois ângulos retos.

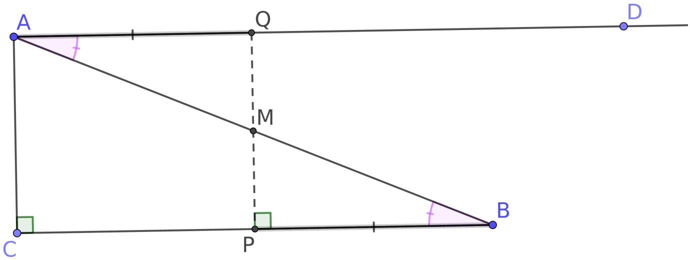
Demonstração (original de Lobaschevski). Como os quatro primeiros postulados implicam que a soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor ou igual a 180^o e o ângulo $\hat{C}$ é reto, os outros dois devem ser agudos, mas não sabemos se sua soma é menor ou igual a 90^o.



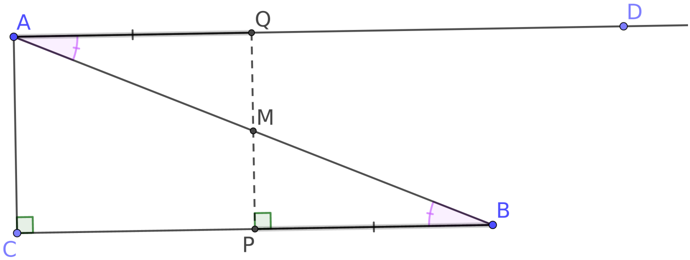
Seja D tal que $B\hat{A}D \equiv A\hat{B}C$.



Seja D tal que $B\hat{A}D \equiv A\hat{B}C$. Seja M o ponto médio de AB. Seja P o pé da perpendicular a AC por M.

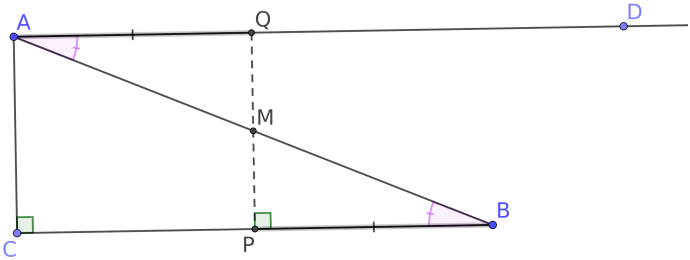


Seja D tal que $B\hat{A}D \equiv A\hat{B}C$. Seja M o ponto médio de AB. Seja P o pé da perpendicular a AC por M. Na semirreta AD, marcar Q tal que $AQ \equiv PB$.



Seja D tal que $B\hat{A}D \equiv A\hat{B}C$. Seja M o ponto médio de AB. Seja P o pé da perpendicular a AC por M. Na semirreta AD, marcar Q tal que $AQ \equiv PB$.

Por LAL os triângulos AQM e BPM são congruentes, logo $M\hat{Q}A$ é reto e também P, M e Q são colineares (isso não nasceu por construção). Assim, $ACPQ$ é um quadrilátero de Lambert.



Seja D tal que $B\hat{A}D \equiv A\hat{B}C$. Seja M o ponto médio de AB. Seja P o pé da perpendicular a AC por M. Na semirreta AD, marcar Q tal que $AQ \equiv PB$.

Por LAL os triângulos AQM e BPM são congruentes, logo $M\hat{Q}A$ é reto e também P, M e Q são colineares (isso não nasceu por construção). Assim, $ACPQ$ é um quadrilátero de Lambert. Logo $C\hat{A}D$ é agudo, mas por construção este é a soma dos outros dois ângulos restantes.

Próxima aula:

Próxima aula: Modelo do semiplano superior.