Introdução à Geometria Hiperbólica Plana

Miriam Telichevesky
miriamt@mat.ufrgs.br

Matemática em Minicursos - UFRGS, abril de 2021

Agradecimentos

Agradecimentos

- À equipe coordenadora do MMC que me incentivou a apresentar um minicurso e ajudou com todos os detalhes, para que eu só tivesse que me preocupar com as aulas

Agradecimentos

- À equipe coordenadora do MMC que me incentivou a apresentar um minicurso e ajudou com todos os detalhes, para que eu só tivesse que me preocupar com as aulas
- Aos meus orientandos de IC, que estudaram comigo os tópicos que vou apresentar aqui.

Agradecimentos

- À equipe coordenadora do MMC que me incentivou a apresentar um minicurso e ajudou com todos os detalhes, para que eu só tivesse que me preocupar com as aulas
- Aos meus orientandos de IC, que estudaram comigo os tópicos que vou apresentar aqui.
- A todos que ajudaram na divulgação do curso.

Agradecimentos

- À equipe coordenadora do MMC que me incentivou a apresentar um minicurso e ajudou com todos os detalhes, para que eu só tivesse que me preocupar com as aulas
- Aos meus orientandos de IC, que estudaram comigo os tópicos que vou apresentar aqui.
- A todos que ajudaram na divulgação do curso.
- A todos que se inscreveram para participar e estão aqui presentes.

Estrutura do curso

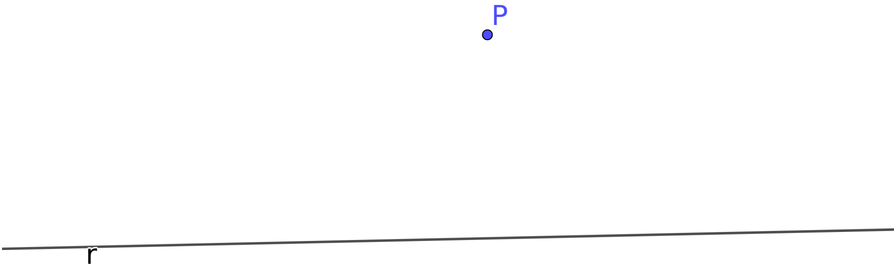
- Por favor me interrompam para fazer perguntas a hora que quiserem.
- Tenham um caderno ou similar para fazer anotações em tempo real, às vezes será necessário.
- Meu e-mail é miriamt@mat.ufrgs.br e minha página pessoal, onde disponho alguns materiais do curso, é

  professor.ufrgs.br/miriamt

Pergunta

Pergunta

Num plano, são dados uma reta r e um ponto $P \notin r$. Quantas retas neste plano existem passando por P e que não encontram r?



Outra pergunta que deve vir antes

Outra pergunta que deve vir antes

O que são retas e pontos? O que é um plano?

Outra pergunta que deve vir antes

O que são retas e pontos? O que é um plano?

As noções de ponto e reta são *elementares*. Para "defini-los" usamos os axiomas (ou postulados) que dizem como se comportam.

Outra pergunta que deve vir antes

O que são retas e pontos? O que é um plano?

As noções de ponto e reta são *elementares*. Para "defini-los" usamos os axiomas (ou postulados) que dizem como se comportam.

Existem várias formas equivalentes de "definir" ponto e reta via postulados.

Segundo Euclides

Segundo Euclides

1. ponto é um lugar único no espaço, que não tem dimensão;
2. linha é um comprimento sem largura;
3. as extremidades de uma linha são dois pontos distintos;
4. uma linha reta é uma linha que jaz igualmente com dois pontos dela mesma;
5. uma superfície é o que tem somente comprimento e largura;
6. os extremos de uma superfície são linhas distintas;
7. uma superfície plana é uma superfície que jaz igualmente com suas linhas retas.

Ainda segundo Euclides (Noções comuns)

Ainda segundo Euclides (Noções comuns)

1. Dois entes iguais a um terceiro são também iguais entre si;
2. ao adicionarem-se partes iguais a entes iguais, os resultados se equivalem;
3. o mesmo ocorre ao subtraírem-se partes iguais;
4. entes que coincidem entre si são iguais;
5. o todo é maior do que suas partes.

Os 5 primeiros Postulados de Euclides

Postulado I Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos (distintos).

Os 5 primeiros Postulados de Euclides

Postulado I Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos (distintos).

Postulado II Pode-se continuar (de maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

Os 5 primeiros Postulados de Euclides

Postulado I Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos (distintos).

Postulado II Pode-se continuar (de maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

Postulado III Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

Os 5 primeiros Postulados de Euclides

Postulado I Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos (distintos).

Postulado II Pode-se continuar (de maneira única) qualquer reta finita continuamente em uma reta.

Postulado III Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

Postulado IV Todos os ângulos retos são iguais.

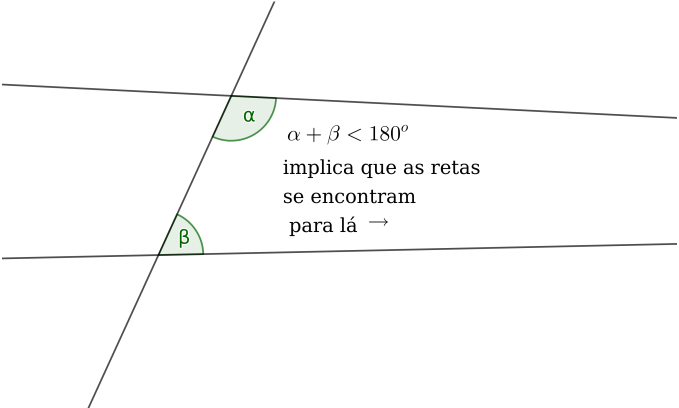
Os 5 primeiros Postulados de Euclides

Os 5 primeiros Postulados de Euclides

Postulado V Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos.

Os 5 primeiros Postulados de Euclides

Postulado V Se uma reta, ao cortar outras duas, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos.



Uso do Postulado V nos Elementos de Euclides

O primeiro uso do Postulado V no livro *Os Elementos* (Euclides) acontece na Proposição 29.

O V Postulado não pode "se executado", e pode ser entendido como uma forma de construir triângulos.

Algumas proposições com os 4 primeiros postulados

Proposição 1. *Existe um triângulo equilátero com um lado igual a um segmento de reta dado.*

Algumas proposições com os 4 primeiros postulados

Proposição 1. *Existe um triângulo equilátero com um lado igual a um segmento de reta dado.*

Dem: Digamos que o segmento é AB. Pelo Postulado III, traçamos um círculo centrado em A de raio AB. De novo pelo Postulado III, traçamos um círculo de centro B e raio AB. Tomando C como um dos pontos de intersecção dos dois círculos, temos que ABC é equilátero.

“Um” “problema”

“Um” “problema”

Na demonstração acima nada garante que os círculos realmente se interseccionam. Hoje existem sistemas mais completos de axiomas, como por exemplo os axiomas de Hilbert, que trazem as noções de *continuidade* da reta e do círculo (eles não têm “buracos”).

Alguns exemplos de como "completar" o sistema de postulados de Euclides

Acrescentemos à lista dos Postulados de Euclides os seguintes postulados que Euclides utilizou sem se dar conta que eram necessários como postulados:

Sobre retas Retas são conjuntos ilimitados.

Continuidade As retas e os círculos são contínuos.

Axioma de Pasch Se ABC é um triângulo e uma reta r "entra no triângulo" pelo vértice C, então deve interseccionar o lado AB.

28 Proposições “neutras“

28 Proposições "neutras"

As 28 primeiras proposições do livro I dos *Elementos* de Euclides fazem uso "apenas" dos 4 primeiros Postulados, e são chamadas proposições da *geometria neutra*.

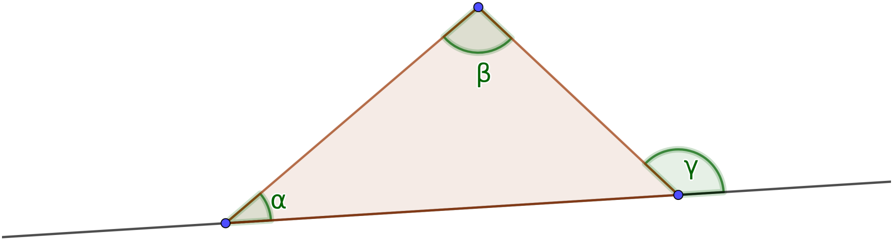
28 Proposições “neutras“

Entre elas estão várias construções sobre os triângulos, como o Teorema do Ângulo Externo (Prop. 16):

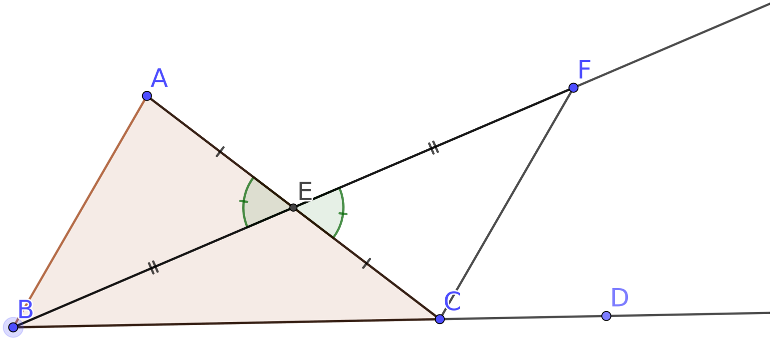
28 Proposições "neutras"

Entre elas estão várias construções sobre os triângulos, como o Teorema do Ângulo Externo (Prop. 16):

"Produzido um lado qualquer de um triângulo, o ângulo externo é sempre maior que cada um dos ângulos internos opostos."



Ideia da prova



28^a Proposição neutra

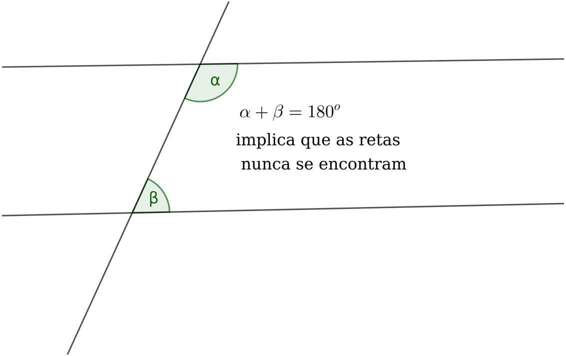
28^a Proposição neutra

Vale destacar sobre o que trata a última das Proposições neutras:

28^a Proposição neutra

Vale destacar sobre o que trata a última das Proposições neutras:

Proposição 28. *Uma reta corta outras duas formando ângulos α e β como na figura abaixo. Se $\alpha + \beta = 180^o$, então as retas são paralelas.*



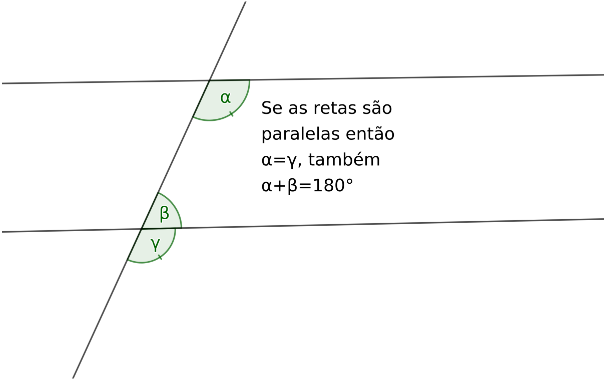
Comparação com o Postulado V

Proposição 28. $\alpha + \beta = 180^o \Rightarrow$ retas paralelas.

Postulado V. $\alpha + \beta < 180^o \Rightarrow$ retas concorrentes.

Proposição 29

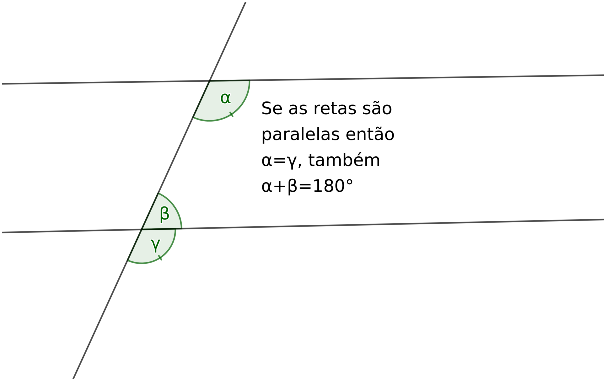
Uma linha reta, que corta duas retas paralelas, faz os ângulos alternos iguais entre si o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte, e finalmente os internos da mesma parte iguais a dois retos.



Se as retas são paralelas então $\alpha=\gamma$, também $\alpha+\beta=180°$

Proposição 29

Uma linha reta, que corta duas retas paralelas, faz os ângulos alternos iguais entre si o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte, e finalmente os internos da mesma parte iguais a dois retos.



(Em suma, é o Postulado V reescrito via contrapositiva.)

Os substitutos do Postulado V

Acima a Proposição 29 mostra-se equivalente ao Postulado V, podendo ele ser *substituído* por ela “sem prejudicar a lógica” da Geometria Euclidiana Plana.

Os substitutos do Postulado V

Acima a Proposição 29 mostra-se equivalente ao Postulado V, podendo ele ser *substituído* por ela "sem prejudicar a lógica" da Geometria Euclidiana Plana.

Um *substituto para o V Postulado* é uma proposição $\mathcal{P}$ que faz parte da Geometria Euclidiana (isto é, decorre dos 5 primeiros postulados) e de tal forma que a Geometria Euclidiana poderia ser reescrita utilizando os Postulados I a IV e a Proposição $\mathcal{P}$.

Equivalentes do Postulado V

Equivalentes do Postulado V

Postulado V' (Playfair) Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$ existe uma **única** reta s paralela a r passando por P.

Equivalentes do Postulado V

Postulado V' (Playfair) Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$ existe uma **única** reta s paralela a r passando por P.

Postulado V" A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180^o.

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V'

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V'

E

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V’

Ex

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V'

Exe

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V’

Exer

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V'

Exerc

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V′

Exercí

Exercíc

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V′

Exercíci

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V′

Exercício

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V’

Exercício!

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V′

Exercício!

Dica: Supondo os Postulados I-IV, temos a existência de ao menos uma paralela. Deve-se usar o Postulado V para provar a unicidade; reciprocamente, supondo o Postulado V′ (que a paralela é única), é possível provar o Postulado V.

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V″

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V″

Começamos com uma proposição:

Proposição 31. *De um ponto dado conduzir uma linha reta paralela a outra linha reta dada.*

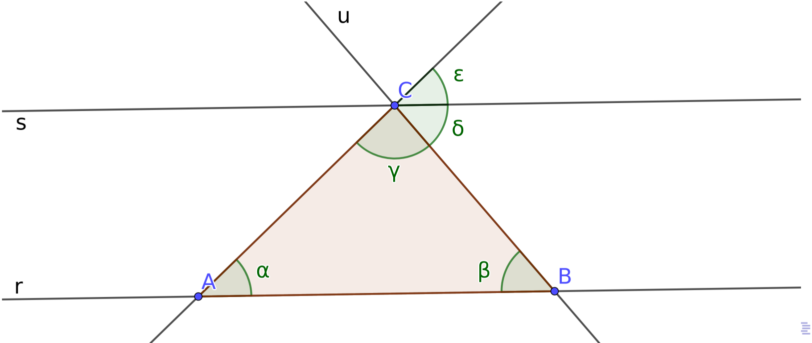
Essa ainda é da geometria neutra (na demonstração utiliza-se a Proposição 27). Mas a unicidade desta paralela, embora não enunciada originalmente, segue da Prop. 29 (pois produz ângulos internos somando 180^o), e portanto do Postulado V.

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V''

Proposição 32. *Em todo triângulo, produzido um lado qualquer, o ângulo externo é igual aos dois internos e opostos, e os três ângulos internos de um triângulo qualquer são iguais a dois retos.*

Equivalência entre o Postulado V e o Postulado V″

Proposição 32. *Em todo triângulo, produzido um lado qualquer, o ângulo externo é igual aos dois internos e opostos, e os três ângulos internos de um triângulo qualquer são iguais a dois retos.*
Demonstração: Traçar a paralela ao lado AB passando pelo outro vértice C e comparar ângulos (usando a Proposição 29).



Por que é substituto

Por que é substituto

Mostramos acima que Postulados I-IV e Postulado V implicam em Postulado V". Vejamos agora o que ocorre se supusermos os Postulados I-IV, mais o Postulado V":

Por que é substituto

Mostramos acima que Postulados I-IV e Postulado V implicam em Postulado V". Vejamos agora o que ocorre se supusermos os Postulados I-IV, mais o Postulado V":

Postulado V". A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.

Vejamos que o postulado V" implica a Proposição 29 (que é equivalente ao Postulado V, como já comentamos). Utilizaremos 2 lemas.

Postulado V" é equivalente ao Postulado V

Postulado V" é equivalente ao Postulado V

Lema 1. Num triângulo, cada ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos não adjacentes a ele.

Postulado V" é equivalente ao Postulado V

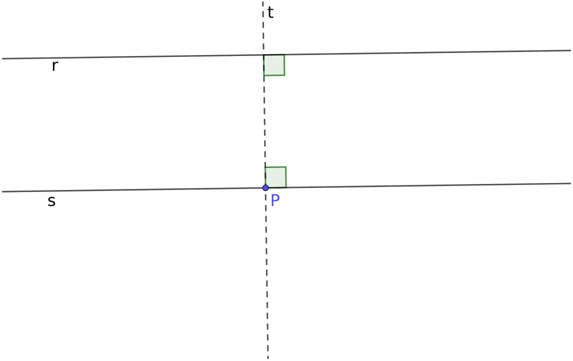
Lema 1. Num triângulo, cada ângulo externo é igual a soma dos dois ângulos não adjacentes a ele.

Lema 2. Dados uma reta r e um ponto P, pode-se traçar uma reta s por P tal que o ângulo entre r e s é tão pequeno quanto se queira.

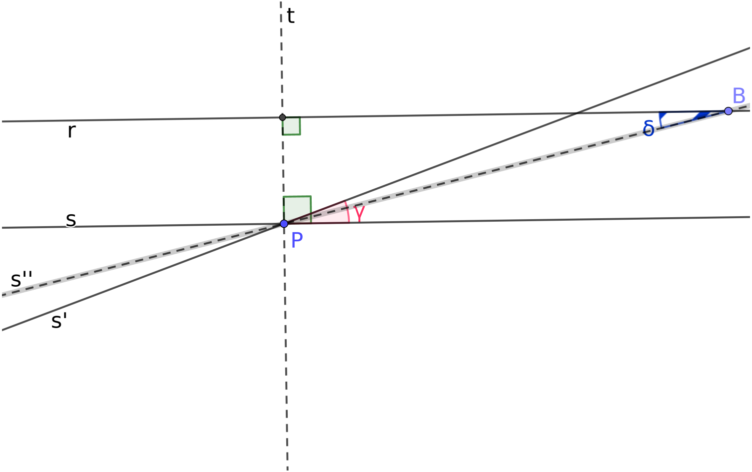
Demonstração da equivalência dos Postulados, supondo os Lemas

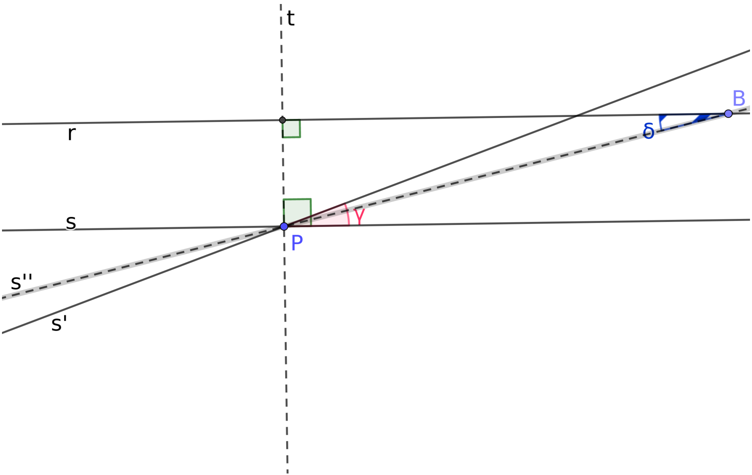
Sejam r uma reta e P um ponto fora dela. Mostremos que é única a reta s por P que não intersecciona r.

Sejam t a perpendicular a r passando por P e s a perpendicular a t passando por P. Da Proposição 28 segue que $s \parallel r$; vejamos que é única.



Sejam s' *outra* reta qualquer passando por P; mostremos que s' intersecciona r. Para isso, considere γ o ângulo entre s e s' e s'' uma reta por P que forma um ângulo $\delta < \gamma$ com r, em um ponto $B \in r$.

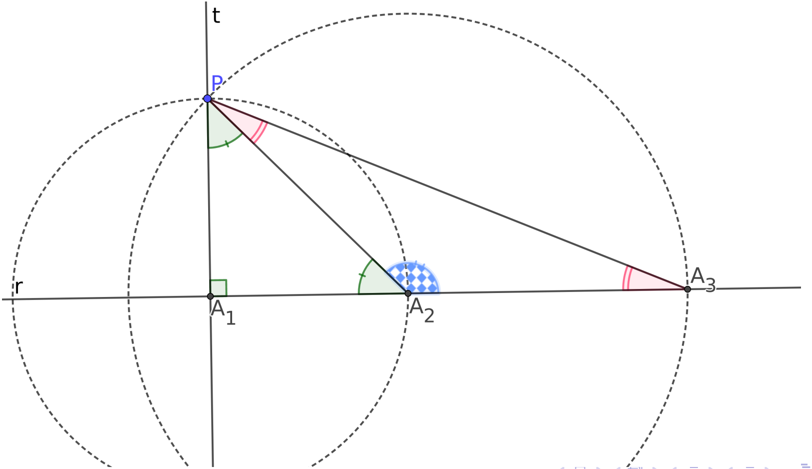




Como $\delta < \gamma$, garantimos que s' entra no triângulo PAB pelo vértice P. Pelo Axioma de Pasch, s' deve sair de PAB pelo lado AB. Logo s' intersecciona s, como queríamos. ■

Demonstração do Lema 2

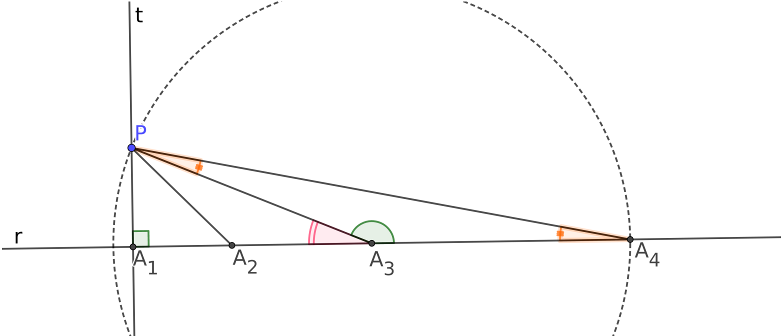
Seja A_1 o pé da perpendicular a r passando por P. Seja $A_2 \in r$ tal que $A_1A_2 \equiv PA_1$. Então PA_1A_2 é isósceles, e já que é retângulo em A_1, segue que os outros dois ângulos valem $\theta_1 = 45^o$.



Demonstração do Lema 2

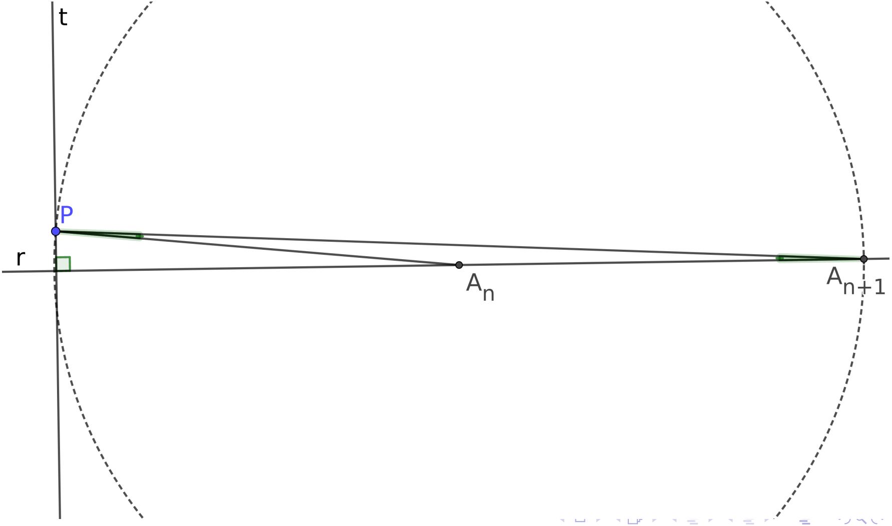
Seja, no passo seguinte, A_3 na semirreta $\overrightarrow{A_1A_2}$ tal que $PA_2 \equiv A_2A_3$. Então PA_2A_3 é isósceles, e graças ao ângulo externo valer θ_1, os dois ângulos que são iguais valem $\theta_2 = \dfrac{\theta_1}{2}$.

Seja A_4 tal que $PA_4 \equiv A_3A_4$. Então PA_3A_4 é isósceles e novamente sabemos que os dois ângulos iguais agora valem $\dfrac{\theta_2}{2} = \dfrac{\theta_1}{4}$.



Demonstração do Lema 2

Prosseguindo indutivamente, na etapa n obtemos um ângulo que vale $\theta_n = \dfrac{\theta_1}{2^n}$. Escolhendo n suficientemente grande, obtemos o desejado.



Outros substitutos

Outros substitutos

Postulado V‴ Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um único círculo passando por eles.

Outros substitutos

Postulado V‴ Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um único círculo passando por eles.

Postulado V^4 Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Outros substitutos

Postulado V‴ Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um único círculo passando por eles.

Postulado V^4 Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. (Teorema de Pitágoras)

Outros substitutos

Postulado V‴ Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um único círculo passando por eles.

Postulado V^4 Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. (Teorema de Pitágoras)

Postulado V^5 Todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

Outros substitutos

Postulado V”’ Dados quaisquer três pontos não colineares, existe um único círculo passando por eles.

Postulado V^4 Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. (Teorema de Pitágoras)

Postulado V^5 Todo ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

Postulado V^6 Quaisquer duas retas paralelas possuem uma perpendicular comum.

Outros substitutos

Postulado V^7 Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

Outros substitutos

Postulado V^7 Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

Postulado V^8 Existe um par de retas equidistantes.

Outros substitutos

Postulado V^7 Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

Postulado V^8 Existe um par de retas equidistantes.

Postulado V^9 Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o quarto também o será.

Outros substitutos

Postulado V^7 Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

Postulado V^8 Existe um par de retas equidistantes.

Postulado V^9 Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o quarto também o será.

Postulado V^{10} Duas retas paralelas a uma mesma reta são paralelas.

Outros substitutos

Postulado V^7 Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

Postulado V^8 Existe um par de retas equidistantes.

Postulado V^9 Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o quarto também o será.

Postulado V^{10} Duas retas paralelas a uma mesma reta são paralelas.

Postulado V^{11} Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta a outra.

Outros substitutos

Postulado V^7 Existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes.

Postulado V^8 Existe um par de retas equidistantes.

Postulado V^9 Se três dos ângulos de um quadrilátero são retos, então o quarto também o será.

Postulado V^{10} Duas retas paralelas a uma mesma reta são paralelas.

Postulado V^{11} Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta a outra.

Postulado V^{12} Por qualquer ponto dentro de um ângulo menor que dois terços de um ângulo reto pode-se traçar uma reta que corta os dois lados do ângulo.

Segundo João Lucas Marques Barbosa

Segundo João Lucas Marques Barbosa

Estes sete substitutos têm sua própria importância e servem para mostrar a não trivialidade do quinto postulado na Geometria euclidiana. Suas consequências incluem as proposições mais conhecidas e mais utilizadas da Geometria. Sem ele, ou um de seus equivalentes, não teríamos o teorema da soma dos ângulos de um triângulo, toda a teoria de triângulos semelhantes e, consequentemente, a Trigonometria deixaria de existir, e o tratamento dado por Euclides para o conceito de área teria de ser amplamente revisto. (Geometria Hiperbólica, página 16).

Próxima aula

A Geometria Hiperbólica é uma geometria onde valem os Postulados I-IV de Euclides, juntamente com os Postulados "implícitos", mas o quinto postulado será *trocado* por

Próxima aula

A Geometria Hiperbólica é uma geometria onde valem os Postulados I-IV de Euclides, juntamente com os Postulados "implícitos", mas o quinto postulado será *trocado* por

Postulado V_H: *Dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r, existem pelo menos duas retas distintas que passam por P e que não interseccionam r.*

Próxima aula

A Geometria Hiperbólica é uma geometria onde valem os Postulados I-IV de Euclides, juntamente com os Postulados "implícitos", mas o quinto postulado será *trocado* por

Postulado V_H: *Dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r, existem pelo menos duas retas distintas que passam por P e que não interseccionam r.*

Dica: Desapegar dos desenhos, por enquanto...

Próxima aula

A Geometria Hiperbólica é uma geometria onde valem os Postulados I-IV de Euclides, juntamente com os Postulados "implícitos", mas o quinto postulado será *trocado* por

Postulado $\mathbf{V}_H$: *Dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r, existem pelo menos duas retas distintas que passam por P e que não interseccionam r.*

Dica: Desapegar dos desenhos, por enquanto...

Obs.: Nos próximos encontros vou trocar o sistema de postulados do Euclides pelo sistema de Hilbert, pois facilita nossas investigações.