MAT01355 : RESUMO DO CONTEÚDO DA PARTE 2

Expressões de mapas lineares em bases. Se $\mathscr{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ é uma base de V e $\mathscr{C} = \{w_1, ..., w_m\}$ é uma base de W, associamos a cada função linear $f : V \to W$ uma matriz $m \times n$,

$$[f]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Dizemos que $[f]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}$ é a matriz que representa f nas bases $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$, ou a expressão de f nessas bases. Note que se $g : W \to Z$ é outro mapa linear, e $\mathscr{D} = \{z_1, ..., z_p\}$ é uma base de Z, então

$$[\mathrm{id}]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = \mathrm{id}, \qquad [g \circ f]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{D}} = [g]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{D}} [f]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}$$

Em particular, temos a fórmula

$$[f]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = [\mathrm{id}]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}} [f]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{C}} [\mathrm{id}]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = [\mathrm{id}]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}} [f]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{C}} ([\mathrm{id}]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}})^{-1}$$

que expressa f na base $\mathscr{B}$ em termos da expressão de f na base $\mathscr{C}$ e a "matriz de mudança de base" $[\mathrm{id}]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}}$.

Autovalores e autovetores. Se $f : V \to V$ é um mapa linear, dizemos que um vetor não-nulo v é um **autovetor** de f se $f(v) = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, que é então dito **autovalor** associado a v. Note the isso significa que f age na reta gerada por v como o mapa linear que reescala por λ. Todo conjunto de autovetores associados a autovalores distintos são automaticamente linearmente independentes.

$f : V \to V$ é dito **diagonalizável** se existe uma base $\mathscr{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de V que consiste de autovetores de f, em cujo caso

$$[f]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é uma matriz diagonal, onde $f(v_i) = \lambda_i v_i$.

Polinômio característico. Se $f : V \to V$ é um mapa linear, definimos seu **polinômio característico**

$$p_f(t) = \det(t\mathrm{id} - f) \in \mathbb{R}[t].$$

As raízes desse polinômio (de grau $n = \dim V$) são precisamente os autovalores de f. Portanto uma condição suficiente para diagonalizar f é que p_f tenha n raízes distintas:

$$p_f(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n), \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ se } i \neq j.$$

Formas bilineares e quadráticas. Uma função $Q : V \times V \to \mathbb{R}$ é dita **bilinear** se $Q(v, \cdot)$ e $Q(\cdot, w)$ são mapas lineares. Ela é dita **simétrica** se $Q(v, w) = Q(w, v)$ para todos $v, w \in V$. Nesse caso, a função

$$q : V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad q(v) = Q(v, v)$$

será dita a forma **quadrática** associada a Q. Recuperamos Q de q via

$$2Q(v, w) = q(v + w) - q(v) - q(w)$$

Uma forma bilinear simétrica Q é um **produto interno** se $q(v) \geqslant 0$, e $q(v) = 0$ se e só se $v = 0$. Por exeemplo,

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v^\top w, \qquad v, w \in \mathbb{R}^n$$

é o produto interno padrão em $\mathbb{R}^n$.

Uma matriz A é **simétrica** se $A^\top = A$; equivalentemente, se

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle, \qquad v, w \in \mathbb{R}^n$$

Toda forma forma bilinear simétrica Q em $\mathbb{R}^n$ é da forma

$$Q(v, w) = \langle Av, w\rangle$$

para uma única matriz simétrica $A = A_Q$.

Se Q é uma produto interno, então

$$Q(v, w)^2 \leqslant Q(v, v)Q(w, w)$$

e a igualdade vale se e só se v, w são linearmente dependentes. Em particular, defina a **norma**

$$||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

e para dois vetores não-nulos, o **ângulo**

$$\langle v, w\rangle = ||v||||w|| \cos\theta.$$

Então temos que

$$||v + w|| \leqslant ||v|| + ||w||$$

e a igualdade $||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$ vale exatamente quando os vetores são **ortogonais** — i.e., $\langle v, w\rangle = 0$.

Projeções ortogonais. Se $V \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço linear, dizemos que

$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w\rangle = 0 \text{ para todo } v \in V\}$$

é o subespaço ortogonal a V. Se $\mathscr{B}$ é base de V e $\mathscr{C}$ é base de $V^\perp$, $\mathscr{B} \cup \mathscr{C}$ é base de $\mathbb{R}^n$.

Existe uma única função linear $\mathrm{pr}_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que restringe a identidade em V e a zero em $V^\perp$. Ela é chamada de projeção ortogonal de V. Se $\mathscr{B} = \{v_1, ..., v_r\}$ é base de V feita de vetores mutuamente ortogonais, então

$$\mathrm{pr}_V(w) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle v_i, w\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} v_i.$$

$\mathrm{pr}_V(w)$ é o vetor de V mais próximo de w, e $w - \mathrm{pr}_V(w)$ é ortogonal a V.

Dizemos que uma **solução aproximada** de um sistema linear $f(x) = b$ é uma solução do sistema $f(x) = \mathrm{pr}_V(b)$, onde V denota a imagem de f.

Gram-Schmidt. Se $\mathscr{B} = \{v_1, ..., v_r\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes, então $\mathscr{O} = \{w_1, ..., w_r\}$, onde $w_1 = v_1$ e

$$w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle w_j, v_i\rangle}{\langle w_j, w_j\rangle} w_j$$

forma um conjunto mutuamente ortogonal de vetores, e além disso $\{v_1, ..., v_i\}$ e $\{v_1, ..., w_i\}$ eram o mesmo subespaço para cada i.

Matrizes ortogonais. Se $\mathscr{O}$ é uma base de vetores mutuamente ortogonais e de norma 1, então a matriz P que tem esses vetores por colunas satisfaz $P^\top P = \mathrm{id}$, e portanto $P^{-1} = P^\top$. Chamamos essas matrizes de **ortogonais**. Equivalentemente,

$$\langle v, w\rangle = \langle Pv, Pw\rangle, \qquad v, w \in \mathbb{R}^n$$

Diagonalização ortogonal de matrizes simétricas. Toda matriz simétrica A tem uma base de autovetores mutuamente ortogonais e de norma 1. Portanto existe uma matriz ortogonal P tal que

$$D = PAP^\top$$

é uma matriz diagonal. Nessa nova base, a forma quadrática de A é da forma

$$q = \lambda_1 x_1^2 + \cdots \lambda_n x_n^2, \qquad \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n;$$

portanto na esfera $||x|| = R$ seu mínimo é λ_1 e seu máximo é λ_n.