Resumo de sistemas de equações lineares

Pedro Frejlich

E-mail address: frejlich.math@gmail.com

Conteúdo

CAPíTULO 1

Exemplo motivador

1. Recomendação médica de consumo de vitaminas

Suponha que a recomendação médica de consumo de vitaminas a, b e c seja como segue:

Vitamina	A	B	C
Consumo Diário	23 u	68 u	124 u

Suponha ainda que a composição de alimentos α, β, γ seja como segue:

Composição u/g	α	β	γ
A	2	3	5
B	7	11	13
C	17	19	23

A pergunta é: existem quantidades de α, β, γ que possamos consumir de forma a satisfazer a recomendação médica sobre consumo de vitaminas A, B e C ?

Suponha que consumamos p gramas de α, q gramas de β, e r gramas de γ. Então o consumo de Vitamina A total é

$$2p + 3q + 5r.$$

De maneira análoga, os consumos de Vitaminas B e C são, respectivamente,

$$7p + 11q + 13r, \quad 17p + 19q + 23r.$$

Portanto desejamos encontrar os valores das **incógnitas** $p, q, r \in \mathbb{R}$ que satisfaçam simultaneamente às equações lineares

$$\begin{cases} 2p + 3q + 5r & = 23 \\ 7p + 11q + 13r & = 68 \\ 17p + 19q + 23r & = 124 \end{cases}$$

CAPíTULO 2

Sistemas lineares

1. O espaco vetorial $\mathbb{R}^n$

Denote por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de n-uplas ordenadas de números reais:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

e defina duas operações: *soma* e multiplicação pelo número real c:

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \qquad cx = c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}$$

Exercício 1. *Mostre que, para todos $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $c, d \in \mathbb{R}$, valem as identidades*
a) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
b) $x + y = y + x$;
c) $x + 0 = x = 0 + x$;
d) $c(dx) = (cd)x$;
e) $1x = x$;
f) $c(x + y) = cx + cy$;
g) $(c + d)x = cx + dx$,
onde 0 *denota o vetor cujas entradas são todas nulas.*

2. Funções e equações

Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma regra que a cada $x \in \mathbb{R}^n$ ("input") atribui um e um único $f(x) \in \mathbb{R}^m$ ("output"). Escrevemos uma tal função como

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ f_2(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, ..., x_n) \end{bmatrix}$$

onde cada f_i denota uma função $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Para funções quaisquer entre espaços $\mathbb{R}^n$, temos três operações básicas:

soma: Dadas funções $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definimos a soma:

$$f + g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad (f + g)(x) := f(x) + g(x);$$

reescalamento: Dada função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e um número $c \in \mathbb{R}$, temos o reescalamento por c:

$$cf : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad (cf)(x) := cf(x).$$

composição: Dadas funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, temos a composição

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p, \qquad (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Exercício 2. *Considere as funções $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por*

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}, \qquad g \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}, \qquad h \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 + 2x_1 \end{bmatrix}$$

Calcule $f + 2g$ e $h \circ f$.

A **imagem** de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é o conjunto de outputs de f:

$$\mathrm{im}(f) = f(\mathbb{R}^n) = \{f(x) \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Exercício 3. *Descreva a imagem da função*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f(x) = (x, x^2).$$

Exercício 4. *Descreva a imagem da função*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ -x_2^4 \end{bmatrix}$$

Dada função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, uma escolha de output $y \in \mathbb{R}^m$ dá origem à **equação**

$$f(x) = y$$

que busca aqueles inputs $x \in \mathbb{R}^n$ que f leva ao output y. Um tal input é uma **solução** da equação $f = y$, e a coleção de todos tais inputs

$$\mathrm{Sol}(f = y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = y\}$$

forma o **conjunto-solução** dessa equação.

Exercício 5. *Encontre o conjunto-solução das equações*

$$\begin{bmatrix} x_1^2 \\ -x_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1^2 \\ -x_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Funções lineares

Definição 1. *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é* **linear** *se existem vetores $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^m$, tais que*

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n.$$

Exercício 6. *Descreva explicitamente a função linear que corresponde a*

$$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Exercício 7. *Descreva explicitamente a função linear que corresponde a*

$$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Lema 1. *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear se e só se, para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $c \in R$, valem:*

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right) = f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad f\left(c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = cf \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

DEMONSTRAÇÃO. Se f é a função linear que corresponde aos vetores $v_1, v_2, ..., v_m$, de modo que

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n,$$

então

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right) &= f \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{bmatrix} = (x_1+y_1)v_1 + (x_2+y_2)v_2 + \cdots + (x_n+y_n)v_n \\ &= (x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n) + (y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots + y_n v_n) \\ &= f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Da mesma maneira,

$$\begin{aligned} f\left(c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) &= f \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix} = (cx_1)v_1 + (cx_2)v_2 + \cdots + (cx_n)v_n \\ &= c\,(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n) = cf \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto uma função linear satisfaz $f(x+y) = f(x)+f(y)$ e $f(cx) = cf(x)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisfaz essas duas condições, então defina

$$v_i := f(e_i) \in \mathbb{R}^m,$$

onde $e_i \in \mathbb{R}^n$ denota o vetor cuja única entrada não-nula é um 1 na i-ésima posição. Como

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n,$$

segue que

$$\begin{aligned} f(x) = f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n) \\ &= x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n. \end{aligned}$$

Portanto uma tal f é linear.

EXERCÍCIO 8. *Mostre que a função*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

não é linear.

Exercício 9. *Mostre que se* $f, f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *são lineares, então*

$$f + f', \qquad cf, \qquad g \circ f$$

são lineares.

4. Sistemas lineares

Um **sistema linear** é uma equação da forma $f(x) = y$, onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função linear, e $y \in \mathbb{R}^m$. Se f corresponde aos vetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \qquad \cdots \qquad v_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

então as três maneiras abaixo são formas equivalentes de escrever o sistema $f(x) = y$:

clássica:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

vetorial:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

matricial:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & y_m \end{array}\right]$$

Chamamos um sistema linear $f(x) = y$ de:

consistente: se existem soluções;
homogêneo: se $y = 0$.

5. Examplos de sistemas lineares

Exemplo 1. Considere o sistema linear nas variáveis $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ escrito de maneira clássica:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Sua forma vetorial é

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e sua forma matricial é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Esse sistema tem uma única solução, onde $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$. Portanto seu conjunto-solução é

$$\mathrm{Sol} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

EXEMPLO 2. Considere o sistema linear nas variáveis $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ escrito de maneira clássica:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

Sua forma vetorial é

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

e sua forma matricial é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Esse sistema tem infinitas soluções — os pontos no plano (x_1, x_2) descritos pela reta $x_1 + x_2 = 2$. **Qualquer** escolha de número $x_2 \in \mathbb{R}$ **determina** o único valor de x_1 que satisfaz a equação; a saber,

$$x_1 = 2 - x_2.$$

Dizemos que x_2 joga aqui o papel de **variável livre**, e x_1 o de **variável dependente**. Isso se deve ao fato de que ao escrevermos o conjunto-solução como

$$\mathrm{Sol} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 - x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \,\middle|\, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

estamos parametrizando o conjunto por uma escolha livre (ou seja, sem restrições) de valor para x_2, em cujo caso o valor da primeira entrada de uma solução cuja segund entrada é x_2 é dado por $x_1 = 2 - x_2$. Observe porém que os papéis de x_1 e x_2 são invertidos se escrevermos

$$\mathrm{Sol} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 2 - x_1 \end{bmatrix} \,\middle|\, x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Esses dois conjuntos são iguais, mas escritos de modo distinto: no primeiro modo x_2 é livre e x_1 é dependente, e no segundo modo x_1 é livre e x_2 é dependente.

EXEMPLO 3. Considere o sistema linear nas variáveis $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ escrito de maneira clássica:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 0x_1 + 0x_2 = 1 \end{cases}$$

Sua forma vetorial é

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e sua forma matricial é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Esse sistema não tem nenhuma solução, já que inexistem números reais x_1 e x_2 tais que

$$0x_1 + 0x_2 = 1.$$

Portanto o conjunto-solução é vazio (não contém nenhum elemento):

$$\mathrm{Sol} = \varnothing.$$

De maneira geral, suponha dado um sistema linear $f(x) = y$ com n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ e m equações. Escreva $\{1, 2, ..., n\}$ como a união disjunta de dois conjuntos

$$\{1, 2, ..., n\} = \{i_1, i_2, ..., i_r\} \coprod \{j_1, j_2, ..., j_{n-r}\}$$

Se existem vetores $w_1, w_2, ..., w_{n-r} \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\mathrm{Sol}(f = y) = \left\{ v_0 + x_{j_1} w_1 + x_{j_2} w_2 + \cdots + x_{j_{n-r}} w_{n-r} \,\middle|\, x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_{n-r}} \in \mathbb{R} \right\}$$

dizemos que as variáveis $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_{n-r}}$ são **livres**, e que as demais variáveis são delas **dependentes** — no sentido em que são expressas em termos das variáveis livres.

Exercício 10. *No sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

que variáveis podem fazer o papel de variáveis livres ?

6. Núcleo de uma função linear

O **núcleo** de uma função linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{R}^m$ é o conjunto solução do sistema homogêneo $f(x) = 0$:

$$\ker(f) = \mathrm{Sol}(f = 0) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0 \right\}$$

Lema 2. *Se x_0 é uma solução do sistema linear $f(x) = y$, então*

$$\mathrm{Sol}(f = y) = \{x_0 + x \mid x \in \ker(f)\}.$$

Demonstração. *Como $f(x - x_0) = f(x) - f(x_0) = y - y = 0$ pelo Lema 1, temos que $x - x_0 \in \ker(f)$ para todo $x \in \mathrm{Sol}(f = y)$. Portanto $\mathrm{Sol}(f = y) \subset x_0 + \ker(f)$. Por outro lado, se $v \in \ker(f)$, então novamente pelo Lema 1 temos $f(x_0 + v) = f(x_0) + f(v) = y + 0 = y$, e portanto também $\mathrm{Sol}(f = y) \supset x_0 + \ker(f)$.*

Chamamos uma expressão da forma

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0$$

uma **dependência linear** entre os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$. Portanto cada elemento $x \in \ker(f)$ produz uma dependência linear entre os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$. Note que

$$0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n = 0$$

é sempre verdade; chamamos essa de **dependência linear trivial**.

Um conjunto de vetores $v_1, v_2, ...v_n \in \mathbb{R}^m$ é **linearmente independente** se a única dependência linear entre eles é a dependência linear trivial. Caso contrário, dizemos que $v_1, v_2, ...v_n \in \mathbb{R}^m$ são **linearmente dependentes**.

Lema 3. *Para um conjunto de vetores $v_1, v_2, ...v_n \in \mathbb{R}^m$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $v_1, v_2, ...v_n$ são linearmente independentes;
ii) O núcleo de f é $\ker(f) = \{0\}$;
iii) A função linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por eles definida é injetora.

Demonstração. Seja f a função definida por $v_1, v_2, ...v_n$, de modo que

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0$$

Cada elemento no núcleo de f dá origem a uma dependência linear. Portanto se $v_1, v_2, ...v_n$ são linearmente independentes, a única dependência linear entre eles é a trivial, e portanto o único elemento no núcleo de f é o vetor nulo. Assim, i) implica ii).

Por outro lado, se o único vetor $x \in \mathbb{R}^n$ que f leva em zero é o próprio vetor nulo, afirmamos que f é injetora. De fato, se $x, x' \in \mathbb{R}^n$ são tais que $f(x) = f(x')$, então $f(x - x') = 0$ implica que $x - x' = 0$, isto é, que $x = x'$. Portanto ii) implica iii).

Finalmente, se f é injetora, o fato de que ela leva zero em zero diz que

$$f\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0$$

apenas se $x = 0$ — isto é, se a única dependência linear entre os vetores $v_1, v_2, ...v_n$ é a trivial. Portanto iii) implica i).