MAT01355 : TERCEIRO SIMULADO DO EXAME 2
26/06/2019

QUESTÃO 1. (5 pontos) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Verifique que $\lambda_1 = 5$ é autovalor de A, e encontre um autovetor associado v_1.
b) Encontre os demais autovalores λ_2, λ_3 de A, e autovetores associados v_2, v_3.
c) Verifique que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
d) Verifique que na base $\mathcal{B}$, a matriz A corresponde a uma matriz diagonal.

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Portanto o núcleo de $A - 5I$ tem base

$$\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ou seja: tanto v_1 como v_2 são autovetores associados ao autovalor 5. Calculamos ainda

$$p_A(t) = \det \begin{bmatrix} t-4 & 1 & 1 \\ 1 & t-4 & 1 \\ 1 & 1 & t-4 \end{bmatrix} = (t-4)\det \begin{bmatrix} t-4 & 1 \\ 1 & t-4 \end{bmatrix} + 2\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ t-4 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= t^3 - 12t^2 + 45t - 50 = (t-5)^2(t-2).$$

Portanto o outro autovalor é 2, e

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

portanto um autovetor associado a 2 é

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto a base

$$\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

consiste de autovetores de A. Os autovalores associados a autovalores distintos são ortogonais, mas os autovalores associados a 5 nao sao. Assim aplicamos Gram-Schmidt, e disso resulta

$$\mathscr{O} = \left\{ w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, w_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Verificamos:

$$\begin{aligned}
\langle w_1, w_1\rangle &= \frac{1}{2}\left((-1)(-1)+(1)(1)+(0)(0)\right) = 1\\
\langle w_1, w_2\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left((-1)(-1)+(1)(-1)+(0)(2)\right) = 0\\
\langle w_1, w_3\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{6}}\left((-1)(1)+(1)(1)+(0)(1)\right) = 0\\
\langle w_2, w_2\rangle &= \frac{1}{6}\left((-1)(-1)+(-1)(-1)+(2)(2)\right) = 1\\
\langle w_2, w_3\rangle &= \frac{1}{3\sqrt{2}}\left((-1)(1)+(-1)(1)+(2)(1)\right) = 0\\
\langle w_3, w_3\rangle &= \frac{1}{3}\left((1)(1)+(1)(1)+(1)(1)\right) = 1
\end{aligned}$$

Trata-se portanto de uma base ortonormal de autovetores de A. Construímos a matriz ortogonal

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

e então

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

QUESTÃO 2. (5 pontos) Dentre todos os polinômios de grau 2,

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

encontre um cujo gráfico $(x, p(x))$ minimiza a distância aos seguintes pontos:

$$(-1, 1), \qquad (0, -1), \qquad (1, 1), \qquad (2, -1).$$

Um tal polinômio deveria atender ao sistema

$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ c = -1 \\ a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

que é inconsistente. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Denote por v_1, v_2, v_3 as colunas de A; elas geram a imagem de A — e formam uma base. Observe que $\{w_1, w_2, w_3\}$ é uma base ortogonal da imagem, onde

$$w_1 = \frac{v_1 - v_2}{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = v_3 - \frac{v_1 - v_2}{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_3 &= v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle w_2, v_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 \\ &= v_2 - \frac{1}{2} w_1 - \frac{1}{2} w_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note que

$$\langle b, w_1 \rangle = 0 \qquad\qquad \langle b, w_2 \rangle = 0$$

e portanto

$$\mathrm{pr}(b) = \frac{\langle b, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 = \frac{-2}{5} w_3 = -\frac{2}{5} A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

e portanto

$$p(x) = -\frac{2}{5} x + \frac{1}{5}$$

é a melhor aproximacao.