MAT01355 : SIMULADO DO EXAME 2
12/06/2019

QUESTÃO 1. (5 pontos) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Verifique que $\lambda_1 = 4$ é autovalor de A, e encontre um autovetor associado v_1.
b) Encontre os demais autovalores λ_2, λ_3 de A, e autovetores associados v_2, v_3.
c) Verifique que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
d) Verifique que na base $\mathcal{B}$, a matriz A corresponde a uma matriz diagonal.

QUESTÃO 2. (5 pontos) Dentre todos os polinômios de grau 2,

$$p(x) = ax^2 + bx + c,$$

encontre um cujo gráfico $(x, p(x))$ minimiza a distância aos seguintes pontos:

$$(-1,-1), \qquad (1,3), \qquad (2,2), \qquad (3,3).$$

RESPOSTAS:
1) Calculamos o polinômio característico

$$\begin{aligned} p_A(t) = \det(t\mathrm{id} - A) &= \det \begin{bmatrix} t-1 & -1 & -5 \\ -1 & t-5 & -1 \\ -5 & -1 & t-1 \end{bmatrix} \\ &= (t-1)\det\begin{bmatrix} t-5 & -1 \\ -1 & t-1 \end{bmatrix} - (-1)\det\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -1 & t-1 \end{bmatrix} + (-5)\det\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ t-5 & -1 \end{bmatrix} \\ &= (t-1)(t^2 - 6t + 4) - (4+t) + (-5)(5t - 24) \\ &= t^3 - 7t^2 - 16t + 112 \end{aligned}$$

e portanto

$$p_A(4) = 64 - 112 - 64 + 112 = 0.$$

Autovetor:

$$(4\mathrm{id} - A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -1 & -1 & -1 \\ -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$a) \qquad \lambda_1 = 4, \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Além disso,

$$p_A(t) = (t-4)(at^2 + bt + c) = t^3 - 7t^2 - 16t + 112$$

implica que

$$p_A(t) = (t-4)(t+4)(t-7).$$

Os demais autovalores são portanto $-4, 7$. Encontramos os autovetores:

$$(-4\mathrm{id} - A) = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -5 \\ -1 & -9 & -1 \\ -5 & -1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$(7\mathrm{id} - A) = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Portanto

$$b) \qquad \lambda_2 = -4, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_3 = 7, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos

$$\begin{aligned} c) \qquad \langle v_1, v_2 \rangle &= 1(-1) + (-2)0 + 1(1) = 0, \\ \langle v_1, v_3 \rangle &= 1(1) + (-2)1 + 1(1) = 0, \\ \langle v_2, v_3 \rangle &= (-1)(1) + (0)1 + 1(1) = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

é base ortonormal de autovetores. Ponha

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$