

**MAT01355 : EXAME DE RECUPERAÇÃO**  
**09/07/2019**

Considere o subespaço linear

$$V \subset \mathbb{R}^4, \quad V = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

(2.5) a) Encontre uma base para o subespaço ortogonal a  $V$ :

$$V^\perp = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in V. \right\}$$

(2.5) b) Encontre o núcleo e a imagem da função linear

$$f : V \longrightarrow V, \quad f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \\ x_3 - x_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2.5) c) Encontre uma base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  de  $V$ , onde  $\{v_1, v_2\}$  é uma base do núcleo de  $f$ , e  $\{v_3\}$  é uma base da imagem de  $f$ .

(2.5) d) Encontre os autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  de  $f : V \rightarrow V$ .

Note que

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

estão em  $V$  e são linearmente independentes, pois

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  é base de  $V$ . Portanto  $V^\perp$  são as soluções de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cujas soluções são múltiplos de

$$v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Portanto  $\{v_4\}$  é base de  $V^\perp$ . Observe ainda que

$$f(v_1) = 0, \quad f(v_2) = 0, \quad f(v_3) = v_3$$

mostra que  $\{v_1, v_2\}$  é base do núcleo de  $f$ , e  $\{v_3\}$  é base da imagem. Note ainda que  $v_1, v_2, v_3$  são autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3 = 1$ .