MAT01355 : EXAME 2
02/07/2019

— Respostas a caneta na folha de perguntas do exame.
— Entregue o rascunho com seus cálculos, justificando ao máximo seu desenvolvimento e resposta.
— O exame vale 12 pontos. Vocês podem tentar fazer todas as questões.
— BOA SORTE !

QUESTÃO 1. (6 pontos) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) (2.0) Verifique que $\lambda_1 = 2$ é autovalor de A, e encontre os demais autovalores de A.
b) (2.0) Encontre uma base ortogonal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ feita de autovetores de A.
c) (2.0) Verifique que na base $\mathcal{B}$, a matriz A corresponde a uma matriz diagonal.

Calculamos

$$p_A(t) = \det \begin{bmatrix} t & -1 & -1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{bmatrix} = t \det \begin{bmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & t \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ t & -1 \end{bmatrix}$$

$$= t(t^2 - 1) + (-t - 1) - (1 + t) = (t + 1)^2 (t - 2).$$

Portanto os autovalores são -1 e 2. Calculamos

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

portanto um autovetor associado a 2 é

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por outro lado,

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

portanto

$$v_2' = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_3' = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são dois autovetores LI associados ao autovalor -1. Porém eles não são ortogonais, e por isso aplicamos Gram-Schmidt para obter

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = v_3' - \frac{\langle v_2, v_3' \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Observe que v_1 é automaticamente ortogonal a v_2 e a v_3 porque pertencem a autovalores distintos da matriz simétrica A). Portanto

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é base ortogonal de autovetores de A. Construímos uma base ortonormal renormalizando:

$$\mathscr{O} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\}$$

e a matriz ortogonal

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

e então

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

QUESTÃO 2. (6 pontos) Considere um polinômios de grau 2,

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

a) (2.0) Escreva o sistema linear $Ax = b$ que expressa a condição de que o gráfico $(x, p(x))$ passa pelos seguintes pontos:

$$(-1, 2), \qquad (0, 1), \qquad (1, 2), \qquad (2, 3),$$

e decida se esse sistema é ou não consistente.

b) (2.0) Encontre uma base ortogonal da imagem de A, e calcule a projeção ortogonal de b sobre essa imagem.

c) (2.0) Encontre o polinômio p cujo gráfico minimiza a distância dos pontos listados acima.

Um tal polinômio deveria atender ao sistema

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ c = 1 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}$$

que é inconsistente. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Denote por v_1, v_2, v_3 as colunas de A; elas geram a imagem de A — e formam uma base. Observe que $\{w_1, w_2, w_3\}$ é uma base ortogonal da imagem, onde

$$w_1 = \tfrac{v_1 - v_2}{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = v_3 - \tfrac{v_1 - v_2}{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_3 &= v_2 - \tfrac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \tfrac{\langle w_2, v_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 \\ &= v_2 - \tfrac{1}{2} w_1 - \tfrac{1}{2} w_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}(b) &= \tfrac{\langle b, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \tfrac{\langle b, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 + \tfrac{\langle b, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 \\ &= \tfrac{5}{2} w_1 + \tfrac{3}{2} w_2 + \tfrac{2}{5} w_3 \\ &= \tfrac{1}{10} \begin{bmatrix} 19 \\ 13 \\ 17 \\ 31 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10} \\ \frac{13}{10} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e portanto

$$p(x) = \tfrac{1}{10}(5x^2 - x + 13)$$

é a melhor aproximacao.