MAT01110 : EXAME 2
03/12/2019

QUESTÃO 1. (3.0) Determine quais das matrizes abaixo são invertíveis, e para essas, encontre sua inversa.

$$a)\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad\qquad b)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Para a), calculamos a matriz de cofatores:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, A_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A_{31} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_{32} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\mathrm{Adj}(A)^\top = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -5 \\ -5 & 1 & 7 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Como

$$A\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

temos que

$$A^{-1} = \tfrac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz em b), por outro lado, não é invertível, já que suas colunas são linearmente dependentes (a soma da primeira e da terceira coluna é duas vezes a segunda coluna).

QUESTÃO 2. (2.0) Encontre o ângulo entre os planos

$$x + 2y - z = 0, \qquad\qquad x - y + 2z = 0.$$

Se V e W são os respectivos planos, temos que $V \cap W$ são as soluções de

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

e portanto $V \cap W$ é a reta gerada por

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Poranto

$$\mathscr{B}_V = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathscr{B}_W = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

são bases de V e de W, e aplicando Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} v_2 = v_2' - \tfrac{\langle v_2', v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \tfrac{3}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ v_3 = v_3' - \tfrac{\langle v_3', v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \tfrac{3}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

então $\widetilde{\mathscr{B}}_V = \{v_1, v_2\}$ é base ortogonal de V, e $\widetilde{\mathscr{B}}_W = \{v_1, v_3\}$ é base ortogonal de W; logo o ângulo θ entre V e W é aquele para o qual

$$\cos\theta = \tfrac{\langle v_2, v_3 \rangle}{\sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle \langle v_3, v_3 \rangle}} = \tfrac{1}{\sqrt{4}} = \tfrac{1}{2}.$$

Ou seja: $\theta = \frac{\pi}{3}$.

QUESTÃO 3. (2.0) Encontre uma base ortogonal do subespaço

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \right\}$$

V é o conjunto solução de $[11-1-1|0]$, e portanto

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathscr{B} = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

é base de V. Aplicando Gram-Schmidt, $\widetilde{\mathscr{B}} = \{w_1, w_2, w_3\}$ é base ortogonal de V, onde

$$w_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\widehat{\mathscr{B}} = \left\{ z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; z_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; z_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

é também base ortogonal de V.

QUESTÃO 4. (3.0) Encontre a distância entre o vetor $v = (0, 0, 1, 1)$ e o subespaço V da questão anterior. Usando a base ortogonal $\widehat{\mathscr{B}}$ da questão precedente, escrevemos a projeção ortogonal de V,

$$\mathrm{pr}_V(x) = \frac{\langle x, z_1\rangle}{\langle z_1, z_1\rangle}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\langle x, z_2\rangle}{\langle z_2, z_2\rangle}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\langle x, z_3\rangle}{\langle z_3, z_3\rangle}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Logo

$$\mathrm{pr}_V(v) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{2}{12}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto a distância de v a V é

$$||v - \mathrm{pr}_V(v)|| = \left|\left| \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right|\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$