RESUMO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

PEDRO FREJLICH

Conteúdo

1. Recordação : funções

Sejam X e Y dois conjuntos. Uma **funcao** $f : X \to Y$ é uma regra que associa a cada $x \in X$ um e um único $f(x) \in Y$. Nesse caso, se $Z \subset Y$ é um subconunto, denotamos por

$$f^{-1}(Z) \subset X, \qquad f^{-1}(Z) := \{x \in X \mid f(x) \in Z\}$$

o conjunto de

A **imagem** de f e o subconjunto de Y formado por todos os $y \in Y$ que sao da forma $y = f(x)$ para algum x:

$$\operatorname{im}(f) = \{f(x) \in Y \mid x \in X\}.$$

A funcao f é **sobrejetora** se todo $y \in Y$ é da forma $y = f(x)$ para pelo menos um x. A funcao f é **injetora** se cada $y \in Y$ é da forma $y = f(x)$ para no máximo um x (possivelmente nenhum). A funcao f é **bijetora** se ela é sobrejetora e injetora; nesse caso, cada $y \in Y$ é da forma $y = f(x)$ para exatamente um $x \in X$, e se definirmos a função *inversa*, que desfaz o que faz f:

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X, \qquad f^{-1}(y) = x \ \text{ se e só se} f(x) = y,$$

então para todos $x \in X$ e $y \in Y$, temos

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad f(f^{-1}(y)) = y$$

Nesse caso, dizemos que f é **invertível**. Note que uma função é invertível exatamente quando ela é bijetora.

2. O espaço $\mathbb{R}^n$

Denote por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de n-uplas ordenadas de números reais:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

e defina

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \qquad cx = c \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{bmatrix}$$

Mais geralmente: dizemos que um subconjunto $V \subset \mathbb{R}^m$ é um **(sub)espaço vetorial** se:
Vet 1) $v, w \in V$ implica $v + w \in V$;
Vet 2) $v \in V$ e $c \in \mathbb{R}$ implicam $cv \in V$.

3. Funções lineares

Lema 1. *Para uma função*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad f\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}$$

as seguintes condiçoes sao equivalentes:

i) Existem vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{R}^m$ tais que

$$f\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n;$$

ii) Para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$, temos que

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad f(cx) = cf(x).$$

Definição 1. *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é* **linear** *se satisfaz às condicoes do Lema.*

Note que se $f, f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ são lineares, então

$$f + f', \qquad cf, \qquad g \circ f$$

são lineares. Note também que toda funç ao linear determina dois subespaços vetoriais:

o núcleo $N(f)$ **de** f**:** que nada mais é que a solução do sistema homogêneo $f = 0$:

$$N(f) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(0);$$

a imagem $\mathrm{im}(f)$ **de** f**:**

$$\mathrm{im}(f) = \{f(v) \in \mathbb{R}^m \mid v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Uma maneira econômica de descrever a funcao linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ determinada por vetores $v_1..., v_n \in \mathbb{R}^m$ é através da matriz com m linhas e n colunas

$$A_f = [v_1|v_2|\cdots|v_n]$$

4. Equacoes lineares

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma funcao linear, e $y \in \mathbb{R}^m$. Entao

$$f(x) = y$$

e uma **equacao linear** cujas solucoes sao

$$\mathrm{Sol}(f = y) := f^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = y\}.$$

Uma tal equacao tem solucoes se e só se y pertence a **imagem** de f:

$$\mathrm{im}(f) = \{f(x) \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Se A é a matriz $m \times n$ que corresponde a f, denotamos também por $[A|y]$ o sistema linear $f = y$.

5. Sistemas equivalentes

Considere as operacoes sobre o sistema linear $f(x) = y$:

Op 1) Permutar duas linhas;
Op 2) Multiplicar uma equação por um número não-nulo;
Op 3) Somar a uma equação um múltiplo de outra.

Dois sistemas $f(x) = y$ e $g(x) = z$ sao ditos **equivalentes** se podemos chegar a um a partir do outro, mediante uma sequencia dessas tres operacoes.

Lema 2. *Dois sistemas equivalentes tem as mesmas solucoes.*

6. Sistemas reduzidos

Em termos da matriz A que corresponde a f, dizemos que um sistema $f(x) = y$ é **reduzido** se:

Red 1) As linhas nulas de A estão abaixo das linhas não-nulas.
Red 2) O primeiro elemento não-nulo de uma linha não-nula é um 1 (que então chamamos de pivô), e este se encontra à direita do pivô da linha anterior;
Red 3) Um pivô de uma linha é o único elemento não-nulo de sua coluna.

Se A é reduzida, chamamos de **livres** as variáveis correspondentes às colunas onde não ocorre um pivô, e as demais variáveis de **dependentes**.

Lema 3. *Se $[A|y]$ é reduzido, seu conjunto solução é obtido expressando as variáveis dependentes em termos das variáveis livres (passando as últimas para o outro lado da equação!)*

Exemplo 1. *A matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é reduzida. As variáveis livres são x_2, x_4, x_5, e as dependentes são x_1, x_3. Dado qualquer

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

o sistema $[A|y]$ tem solução exatamente quando $y_3 = 0$, em cujo caso $[A|y]$ lê

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 4x_5 = y_1 \\ x_3 - 5x_4 - 6x_5 = y_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

e portanto passando as variáveis livres para o outro lado da igualdade, expressamos as variáveis dependentes de uma solução do sistema como funções das variáveis livres:

$$x_1 = y_1 + 2x_2 + 3x_4 + 4x_5, \qquad x_3 = y_2 + 5x_4 + 6x_5$$

e portanto

$$f^{-1}(y) = \mathrm{Sol}(f = y) = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 + 2x_2 + 3x_4 + 4x_5 \\ x_2 \\ y_2 + 5x_4 + 6x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \middle| \; x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Lema 4. *Um sistema linear é equivalente a um e um único sistema reduzido.*

O número de pivôs do sistema reduzido corresponde é chamado de **posto** do sistema linear.

Lema 5. *Se A é a matriz que corresponde à função linear*

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad f \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n,$$

então:

(1) *f é injetora se e só se o posto de f é n;*
(2) *f é sobrejetora se e só se o posto de f é m;*
(3) *f é bijetora/invertível se e só se o posto de f é $m = n$.*

Note que só funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ podem ser invertíveis, e que uma tal f é invertível se e só se é injetora, e se e só se é sobrejetora.

Definição 2. *Seja $V \subset \mathbb{R}^m$ é um subespaço vetorial, e $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^m$ um conjunto de vetores.*

(1) *$v_1, ..., v_n$ são* **linearmente independentes** *se a função linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que eles definem é injetora.*
(2) *$v_1, ..., v_n$* **geram** *V se V é a imagem da função linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que eles definem.*
(3) *$v_1, ..., v_n$ formam uma* **base** *de V se geram V e são linearmente independentes.*

Lema 6. *Todo espaço vetorial V tem uma base, e toda base tem o mesmo número de vetores.*

O número de vetores de uma base de V é chamado de **dimensão** de V.

E-mail address: `frejlich.math@gmail.com`