MAT01109 : RESUMO DAS AULAS

1. 06/03

Conjunto X é uma colecao dos seus **elementos/membros**. A notacao $x \in X$ sinifica 'x é elemento do conjunto X', ou 'x pertence a X'. Dizemos que um conjunto Y é **subconjunto** de X se cada elemento y que pertence a Y pertence também a X:

$$y \in Y \quad \Longrightarrow \quad y \in X.$$

Nesse caso, escrevemos $Y \subset X$ para denotar 'Y é subconjunto de X'.

O **conjunto vazio** $\varnothing$ é o conjunto sem nenhum elemento. Note que $\varnothing \subset X$ para qualquer conjunto X.

Dados conjuntos X e Y, defina

uniao: como o conjunto $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ ou } x \in Y\}$;
interseccao: como o conjunto $X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ e } x \in Y\}$;
diferenca: como o conjunto $X \diagdown Y = \{x \mid x \in X \text{ e } x \in Y\}$;
produto: como o conjunto $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$.

Uma **relacao** R de X em Y é um subconjunto da forma $R \subset X \times Y$. Uma relacao $R \subset X \times X$ é dita:

reflexiva: se $(x, x) \in R$ para cada $x \in X$;
simetrica: se $(x, y) \in R$ implica $(y, x) \in R$;
antisimetrica: se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ implicam $x = y$;
transitiva: se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ implicam $(x, z) \in R$.

Uma relacao $R \subset X \times Y$ é chamada de **gráfico de uma funcao** de X em Y se, para cada $x \in X$, existe um, e um único $y \in R$ tal que $(x, y) \in R$. Nesse caso, escrevemos $y = f(x)$, e

$$f : X \longrightarrow Y, \quad x \mapsto f(x).$$

X é dito o **domínio** da funcao f, e Y é seu **codomínio**. A **imagem** de f é o subconjunto $f(X) \subset Y$ dado por

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

Dado um subconjunto $Z \subset X$, dizemos que $f(Z) = \{f(z) \mid z \in Z\}$ é a **imagem de** Z por f. Analogamente, dado um subconjunto $Z \subset Y$, dizemos que $f^{-1}(Z) = \{x \in X \mid f(x) \in Z\}$ é a **pré-imagem de** Z por f.

Dadas funcoes $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, a **composicao** $g \circ f : X \to Z$ é a funcao

$$x \mapsto g(f(x)).$$

Uma funcao é dita:

injetora: se cada $y \in Y$ pode ser imagem de no máximo um $x \in X$:

$$y = f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x';$$

sobrejetora: se cada $y \in Y$ é imagem de algum $x \in X$:

$$f(X) = Y;$$

sobrejetora: se é injetora e sobrejetora.

Lemma 1. *Se $f : X \to Y$ é funcao com grafico $R \subset X \times Y$, entao se f é bijetora R é também grafico de uma funcao $g : Y \to X$, e temos*

$$g(f(x)) = x, \quad f(g(y)) = y, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Proof. Seja $y \in Y$. Como f é sobrejetora, existe $x \in X$ com $(x, y) \in R$; como f é injetora, tal x é unico. Defina entao $g(y)$ como o unico elemento de X para o qual $(g(y), y) \in R$. Entao $g : Y \to X$ é funcao, e $(g(y), y) = (x, f(x))$ implica que

$$x = g(y), \quad y = f(x),$$

e portanto que

$$g(f(x)) = x, \quad f(g(y)) = y.$$

□

Note que, dada funcao $f : X \to Y$, se existe uma funcao $g : Y \to X$ satisfazendo

$$g \circ f \mathrm{id}_X, \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y,$$

entao g é a unica tal funcao, dita **funcao inversa** a f, e denotada por f^{-1}.

2. Funcoes

Convencao Nosso interesse principal é em funcoes de uma variavel real. Quando escrevermos uma regra $x \mapsto f(x)$, sem especificar dominio ou contradominio, supomos que temos uma funcao f cujo codominio é $\mathbb{R}$, e cujo dominio é

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ é um número real bem-defnido}\}$$

(1) Seja $b \in \mathbb{R}$. Entao $f(x) = b$, dita **funcao constante**, é uma funcao com dominio $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ e imagem $\{b\}$.
(2) A funcao $f(x) = x$ é dita **funcao identidade**; tem dominio $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ e imagem $\mathbb{R}$.
(3) A funcao $f(x) = ax + b$ é dita **funcao afim**; tem dominio $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$ e imagem $\{b\}$ se $a = 0$, e $\mathbb{R}$ se $a \neq 0$.
(4) Se $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ e $g : \mathrm{dom}(g) \to \mathbb{R}$ sao funcoes, entao sua **soma**

$$(f + g) : \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) + g(x)$$

é tambem funcao, assim como seu **produto**

$$fg : \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)g(x)$$

(5) Se $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ é funcao nao identicamente nula, entao sua **inversa multiplicativa** $\frac{1}{f(x)}$ é funcao, com dominio

$$\mathrm{dom}(\frac{1}{f}) = \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid f(x) \neq 0\}$$

(6) Uma funcao $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de **polinômio de grau** n se é da forma

$$f(x) = \sum_{0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0.$$

(7) Uma funcao $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **racional** se é da forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

onde p e q sao polinomios, e q nao é o polinomio identicamente nulo.
(8) Se f e g sao funcoes, entao a **composicao**

$$g \circ f : f^{-1}\mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(f(x))$$

é tambem uma funcao.