MAT01109 : RESUMO DE LIMITES E CONTINUIDADE

Uma sequencia (a_n) é uma funcao $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dizemos que uma sequencia (a_n) **converge** a $\alpha \in \mathbb{R}$, se a seguinte propriedade é satisfeita:

Para todo $\epsilon > 0$, existe $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > N(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \epsilon.$$

Nesse caso, chamamos α de **limite** da sequencia (a_n), e escrevemos

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Exercício 1. *Verifique que a sequencia $a_n = 1$ para todo n converge a 1.*

Exercício 2. *Verifique que a sequencia $a_n = 1/n$ converge a 0.*

Exercício 3. *Verifique que a sequencia $a_n = (-1)^n$ não tem limite.*

Exercício 4. *Suponha que (a_n) e (b_n) são sequencias, e existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n+r} = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Verifique que (a_n) converge se e só se (b_n) converge, em cujo caso elas têm o mesmo limite.*

Lemma 5. *Sejam (a_n) e (b_n) sequencias, que convergem a $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ e $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$.*

a) $\alpha + \beta = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$;
b) $\alpha\beta = \lim_{n\to\infty}(a_n b_n)$;
c) se $\alpha \neq 0$, $\frac{1}{\alpha} = \lim_{n\to\infty}(1/a_n)$;

Uma **série de potências** é uma expressao da forma $\sum_0^\infty a_n x^n$, onde (a_n) é uma sequencia, e x uma variável. Dizemos que uma tal série define uma funcao f em um intervalo $J \subset \mathbb{R}$ se

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n a_i x^i, \quad x \in J.$$

Example 1. *A funcao $f(x) = \frac{1}{1-x}$ é definida em $[0,1)$ pela série de potências $\sum_0^\infty x^n$:*

$$(1-x)\sum_0^n x^i = 1 - x^{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(1-x)\sum_0^n x^i = 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Example 2. *A funcao exponencial*[1] *é aquela definida por*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Essa é uma funcao crescente, e define uma bijecao $[0,\infty) \to [0,\infty)$. *Note que*

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y)^n}{n!}\right) = \exp(x)\exp(y)$$

1. Continuidade

Seja $f(x)$ uma funcao. Dizemos que f é **contínua em** x_0 se f está definida em x_0, e alguma das duas condicoes equivalentes abaixo é satisfeita:

i) Para toda sequencia (a_n) com limite x_0, a sequencia $f(a_n)$ tem limite $f(x_0)$;
ii) Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$, tal que

$$|x - x_0| < \delta(\epsilon) \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Uma funcao é dita **contínua** se é contínua em todo ponto de seu dominio.

Example 3. *Considere a funcao constante* $f(x) = 2$. *Entao* f *é contínua:* $f(x) = f(x_0)$ *implica que* $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ *para todo* $\epsilon > 0$*; portanto*

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

vale para qualquer $\delta > 0$.

Example 4. *Considere a funcao* $f(x) = 7x + 5$. *Entao* f *é contínua: dado* $\epsilon > 0$, *escolhemos* $\delta(\epsilon) < \epsilon/7$, *e entao*

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Example 5. *A funcao* $f(x) = \sqrt{x}$ *é continua. De fato, escolha* $\epsilon > 0$.

- *Se* $|x - x_0| < 1$, *entao* $x_0 - 1 < x < x_0 + 1$, *e portanto* $\sqrt{x} < \sqrt{x_0+1}$. *Portanto* $\sqrt{x} + \sqrt{x_0} < \sqrt{x_0+1} + \sqrt{x_0}$
- *Como* $|x - x_0| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}||\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|$, *se* $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon$, *entao* $|x - x_0| < \epsilon|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}| < \epsilon(\sqrt{x_0+1} + \sqrt{x_0})$.

Entao se escolhermos

$$\delta(\epsilon) = \min(1, \epsilon(\sqrt{x_0+1} + \sqrt{x_0}))$$

temos que

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

---

[1] Como discutimos em aula, podemos tambem considerar a exponencial em números complexos, e lá podemos escrever a identidade notável

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x),$$

Como

$$\begin{aligned}\exp(ix + iy) &= \cos(x+y) + i\sin(x+y)\\ &= \exp(ix)\exp(iy)\\ &= (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) + i(\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y))\end{aligned}$$

temos que

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \quad \sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y).$$

Disso segue que

$$\cos(x) = \frac{\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(x) = \frac{\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Example 6. *A funcao*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ +1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

nao é continua em $x_0 = 0$. Prova 1: se $0 < \epsilon < 2$, entao nao existe nenhum $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Com efeito, se $x < 0$, entao $|f(x) - f(x_0)| = 2 > \epsilon$.

Prova 2: note que $\lim 1/n = 0 = \lim -1/n$, e no entanto, $\lim f(1/n) = 1$, $\lim f(-1/n) = -1$.

Lemma 6. *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funcoes contínuas em x_0, e $h(x)$ uma funcao contínua em $f(x_0)$. Entao:*

a) $f + g$ é continua em x_0;
b) fg é continua em x_0;
c) Se $g(x_0) \neq 0$, entao f/g é continua em x_0;
d) $h \circ f$ é continua em x_0;
e) Se f é contínua e injetora, entao sua inversa (por composicao) $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ é contínua.

Example 7. *Polinomios sao continuos por a), b). Em particular, $f(x) = x^n$ é continua em $[0, \infty)$, e portanto sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua em $[0, \infty)$.*

Example 8. *Funcoes algébricas sao contínuas. Exponencial e logaritmo sao continuos, assim como seno e cosseno.*

Theorem 7 (Teorema do Valor Médio)**.** *Se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$, entao f assume todo valor entre $f(a)$ e $f(b)$.*

Exercício 8. *Mostre que a equacao*

$$(x - 1)e^{\cos(\sin(x))} + x = 0$$

tem uma solucao $x \in [0, 1]$.

2. Limites de Funcoes

Se $f(x)$ é uma funcao, dizemos que α é o **limite de** f quando x se aproxima de x_0, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, se a funcao

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ \alpha, & x = x_0 \end{cases}$$

é contínua em x_0. Note que se f já estava definida em x_0, entao podemos dizer que f é contínua em x_0 exatamente quando $F(x) = f(x)$, ou seja, quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exercício 9. *Verifique que se $f(x)$ e $g(x)$ sao contínuas em x_0, e $g(x_0) \neq 0$, entao*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Example 9.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\cos(x)} = \frac{0}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Muitas vezes, precisamos reescrever o quociente para o calcular.

Example 10.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 4}{x - 2} = \frac{1 - 4}{1 - 2} = 3.$$

Dois limites trigonométricos que aparecem frequentemente:

Example 11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} = 1.$$

Example 12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sum_1^\infty (-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sum_1^\infty (-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} = 0.$$

Claro que limites nao precisam sempre existir:

Example 13. *O limite* $\lim_{x\to 0}\sin(1/x)$ *nao existe: de fato, considere* $a_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ *and* $b_n = \frac{2}{(4n+3)\pi}$. *Entao*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$$

mas

$$\lim_{n\to\infty}\sin(1/a_n) = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\sin(1/b_n) = -1.$$

3. Variacoes: Limites laterais e infinitos

Dizemos que

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \alpha$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$0 < x - x_0 < \delta(\epsilon) \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Equivalentemente, se para toda sequencia (a_n) de números à direita de x_0 e com limite x_0, a sequencia $(f(a_n))$ tem limite α.

Exercício 10. *O que significa* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \alpha$ *?*

Exercício 11. *Calcule* $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *onde*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Exercício 12. *Verifique que* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existe exatamente quando* $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ *e* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ *existem, e nesse caso*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Dizemos que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

se, para todo $M > 0$, existe $\delta(M) > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta(M) \implies f(x) > M.$$

Equivalentemente: se para toda sequencia (a_n) que converge a x_0, existe $N(M) \in \mathbb{N}$ tal que $f(a_n) > M$.

Exercício 13. *O que significa* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *?*

Example 14. $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$ *e* $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$.

Example 15. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$.

Exercício 14. *Desenhe o gráfico de uma funcao $f(x)$ qualquer, que cruze o eixo x pelo menos uma vez – ou seja, para o qual $f(x_0) = 0$ para algum x_0. Calcule $\lim_{x\to x_0^-} \frac{1}{f(x)}$ e $\lim_{x\to x_0^+} \frac{1}{f(x)}$.*

Dizemos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existe $y(\epsilon) > 0$ tal que

$$x > y(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \epsilon$$

Example 16.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + 1}{x^5 + 99999x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5(1 + \frac{1}{x^5})}{x^5(1 + \frac{99999}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^5}}{1 + \frac{99999}{x}} = 1.$$

Exercício 15. *O que significa $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$?*

Dizemos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$

se, para todo $M > 0$, existe $y(M) > 0$ tal que

$$x > y(M) \quad \Longrightarrow \quad f(x) > M.$$

Exercício 16. *O que significa $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$? E $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$? E $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$?*

Example 17. $\lim_{x\to\infty} x^n = +\infty$ *para todo n, mas*

$$\lim_{x\to-\infty} x^{2n} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^{2n+1} = -\infty.$$