MAT01109 : RESUMO DE INTEGRAIS

Para uma função $f(x)$, contínua em $[a,b]$, definimos a **integral definida**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \in \quad \mathbb{R}.$$

Como discutimos, esse número representa a área (com sinal) determinada pela região R do plano, delimitada pelo eixo x, as retas $x = a$ e $x = b$, e o gráfico de $f(x)$:

A **integral indefinida** é a função

$$F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$$

Uma **primitiva** para $f(x)$ é uma função diferenciável $F(x)$, tal que

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x).$$

As regras de integração são as seguintes: para funções contínuas $f(x)$ e $g(x)$, e funções diferenciáveis $h(x), k(x)$, temos:

(1) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ para todo $c \in [a,b]$;
(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$;
(3) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;
(4) Teorema Fundamental do Cálculo:
  (A) Para qualquer primitiva $F(x)$ de $f(x)$, temos que

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F|_a^b := F(b) - F(a)$$

  (B) A integral indefinida $F(x) := \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$ é uma primitiva para $f(x)$;
(5) Fórmula de Mudança de Variáveis:

$$\int_a^b f(h(x))h'(x)\mathrm{d}x = \int_{h(a}^{h(b)} f(x)\mathrm{d}x$$

(6) Fórmula de Integração por Partes:

$$\int_a^b h'(x)k(x)\mathrm{d}x = h(x)k(x)|_a^b - \int_a^b h(x)k'(x)\mathrm{d}x$$

Remark 1. *Faz mais sentido chamar $\int_a^x f(y)\mathrm{d}y$ de* uma *integral indefinida para $f(x)$, já que ela não é única: para qualquer $c \in [a,b]$, temos que*

$$\int_a^x f(y)\mathrm{d}y = \int_a^c f(y)\mathrm{d}y + \int_c^x f(y)\mathrm{d}y,$$

e portanto as funções $\int_a^x f(y)\mathrm{d}y$ e $\int_c^x f(y)\mathrm{d}y$ diferem por uma constante $C = \int_a^c f(y)\mathrm{d}y$. É costume em textos de cálculo escrever $\int f(x)\mathrm{d}x$ sem fazer escolha de limite inferior de integração; nessa linguagem se escreve

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

para denotar que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Remark 2. *Note que (4) nos diz que* integrar e diferenciar são operações inversas (a menos de constante). *A regra (3) é a versão da regra da soma*

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

para integrais; a regra (6) a versão da regra do produto

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

para integrais; finalmente, a regra (5) a versão da regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}(f \circ g) = (\frac{df}{dx} \circ g)\frac{dg}{dx}$$

para integrais.

Podemos resumir assim a questão prática de como calcular uma integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$:

'Algoritmo'

a) É conhecida uma primitiva $F(x)$ para $f(x)$? Se sim, entao $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Caso contrário, veja os itens abaixo.
b) Existe algum modo de reescrever o integrando $f(x)\mathrm{d}x$ de forma a que possamos responder afirmativamente ao item a)?
c) Podemos integrar $f(x)\mathrm{d}x$ por partes ?
d) Existe alguma mudança de variável $u = u(x)$, na qual o integrando $f(x)\mathrm{d}x$ tome uma forma em que possamos responder afirmativamente ao item a)?
e) Falhadas todas as tentativas anteriores: há uma mudança de variável trigonométrica que simplifique a integral o bastante para aplicar com sucesso b)-d) ?

Ilustramos na seção seguinte o método através de exemplos.

1. Exemplos

1.1. **Exemplos em que conhecemos primitivas.** Recorde que

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) \qquad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Exemplo 1.

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 2.

$$F(x) = \log(x) \quad \Longrightarrow \quad F'(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log(x)\bigg|_1^2 = \log(2) - \log(1) = \log(2).$$

1.2. **Exemplos em que reescrevemos o integrando.**

Exemplo 3.

$$\begin{aligned}\int_3^5 \frac{1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x &= \int_3^5 \frac{1}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x = \int_3^5 \left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_3^5 \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x - \int_3^5 \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x = \log(x-2)\Big|_3^5 - \log(x-1)\Big|_3^5 \\ &= \log(\frac{x-2}{x-1})\Big|_3^5 = \log(\frac{3}{2})\end{aligned}$$

Exemplo 4. *Recorde que*

$$\cos(x)^2+\sin(x)^2=1, \quad \cos(x)^2-\sin(x)^2=\cos(2x).$$

Somando essas equacoes, concluímos que $\cos(x)^2 = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. *Portanto*

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(x)^2\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\mathrm{d}x \\ &= x\Big|_0^\pi - \frac{1}{4}\sin(2x)\Big|_0^\pi = \pi.\end{aligned}$$

Exemplo 5. *Recorde que*

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta), \quad \cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Portanto

$$\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right), \quad \sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right).$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(3x)\cos(2x)\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{(\cos(5x)+\cos(x))}{2}\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(5x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{10}\sin(5x)\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\sin(x)\Big|_0^\pi = 0.\end{aligned}$$

1.3. **Exemplos em que integramos por partes.**

Exemplo 6. *Para calcular* $\int x\cos(x)\mathrm{d}x$, *seja* $h(x)=\sin(x)$ *e* $k(x)=x$. *Então*

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\mathrm{d}x &= \int h'(x)k(x)\mathrm{d}x \\ &= h(x)k(x) - \int k'(x)h(x)\mathrm{d}x \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\mathrm{d}x \\ &= x\sin(x)+\cos(x)+C.\end{aligned}$$

Exemplo 7. *Para calcular* $\int \log(x)\mathrm{d}x$, *seja* $h(x) = x$ *e* $k(x) = \log(x)$. *Então*

$$\begin{aligned}\int \log(x)\mathrm{d}x &= \int h'(x)k(x)\mathrm{d}x \\ &= h(x)k(x) - \int k'(x)h(x)\mathrm{d}x \\ &= x\log(x) - \int x\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= x\log(x) - \int \mathrm{d}x \\ &= x\log(x) - x + C.\end{aligned}$$

Exemplo 8. *Um exemplo mais sofisticado: considere* $\int e^x \cos(x)\mathrm{d}x$. *Se chamarmos* $h(x) = \sin(x)$ *e* $k(x) = e^x$, *temos*

$$\begin{aligned}\int e^x\cos(x)\mathrm{d}x &= \int h'(x)k(x)\mathrm{d}x \\ &= h(x)k(x) - \int k'(x)h(x)\mathrm{d}x \\ &= e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Isso apenas expressa a integral desejada, $\int e^x\cos(x)\mathrm{d}x$, *em termos de uma integral com o mesmo nível de complexidade,* $\int e^x\sin(x)\mathrm{d}x$. *Revertamos o papel de* h *e* k: *chamemos* $k(x) = \cos(x)$ *e* $h(x) = e^x$. *Entao*

$$\begin{aligned}\int e^x\cos(x)\mathrm{d}x &= \int h'(x)k(x)\mathrm{d}x \\ &= h(x)k(x) - \int k'(x)h(x)\mathrm{d}x \\ &= e^x\cos(x) + \int e^x\sin(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ou seja: nenhuma das duas integrações por partes que fizemos pôde expressar $\int e^x\cos(x)\mathrm{d}x$ *sem fazer menção a* $\int e^x\sin(x)\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int e^x\cos(x)\mathrm{d}x &= e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)\mathrm{d}x \\ \int e^x\cos(x)\mathrm{d}x &= e^x\cos(x) + \int e^x\sin(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Somando essas duas igualdades, descobrimos no entanto que

$$\int e^x\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^x\sin(x) + e^x\cos(x)\right) + C.$$

1.4. **Exemplos em que mudamos a variável de integração.**

Exemplo 9. *Considere* $\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\mathrm{d}x$. *Considere a variável* $u = u(x) = x^3 + 1$. *Então*

$$\mathrm{d}u = \frac{d}{dx}(x^3+1)\mathrm{d}x = 3x^2\mathrm{d}x$$

e

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 2.$$

Entao

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{x^3+1}\ 3x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^2 \sqrt{u}\ \mathrm{d}u = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{2}{9}(\sqrt{8}-1)$$

Exemplo 10. *Considere* $\int x(x-3)^{200}\mathrm{d}x$. *Considere a variável* $u = u(x) = x - 3$. *Então*

$$\mathrm{d}u = \frac{d}{dx}(x-3)\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$$

Entao

$$\begin{aligned}\int x(x-3)^{200}\mathrm{d}x = \int (u+3)u^{200}\mathrm{d}u &= \int u^{201}\mathrm{d}u + \int 3u^{200}\mathrm{d}u \\ &= \frac{u^{202}}{202} + 3\frac{u^{201}}{201} + C \\ &= \frac{(x-3)^{202}}{202} + 3\frac{(x-3)^{201}}{201} + C\end{aligned}$$

1.5. **Exemplos especiais de mudança de variável de integração.**

Exemplo 11. *Seja* $R > 0$ *e considere a integral* $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x$. *Se fizermos a mudança* $u(x) = R^2 - x^2$, *obtemos*

$$\mathrm{d}u = -2x\mathrm{d}x, \quad u(0) = R^2, \quad u(R) = 0$$

Como $x = \sqrt{R^2 - u}$, *a integral em questão, escrita em termos da nova variável* u, *lê*

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x = \int_{R^2}^0 \sqrt{\frac{u}{R^2 - u}}\mathrm{d}u,$$

e esta última integral é tão difícil de resolver como a integral original (até é pior...)

Tampouco ajuda tentar $v(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$; *nesse caso, teríamos*

$$\mathrm{d}v = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\mathrm{d}x, \quad v(0) = R, \quad v(R) = 0,$$

e portanto

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x = \int_0^R \frac{v^2}{\sqrt{R^2 - u}}\mathrm{d}v,$$

o que tampouco ajuda.

A solução é considerar a mudança[1] $x = R\sin(\theta)$. *De fato, temos*

$$\mathrm{d}x = R\cos(\theta)\mathrm{d}\theta, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi/2) = R;$$

logo

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\sin(\theta)^2}R\cos(\theta)\mathrm{d}\theta = R^2\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)^2\mathrm{d}\theta,$$

e esta última integral sabemos como resolver por reescrita do integrando.

Exemplo 12. *Considere* $\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}\mathrm{d}x$. *Entao tomando* $x = 2\tan(\theta)$, *obtemos*

$$4 + x^2 = 4 + 4\tan(\theta)^2 = 4(1 + \tan(\theta)^2)$$

e por outro lado,

$$\mathrm{d}x = 2(1 + \tan(\theta)^2)\mathrm{d}\theta$$

Portanto

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\theta}{2} = \frac{1}{2}\theta + C = \frac{1}{2}\arctan(x) + C.$$

De maneira informal, quando há expressões da forma $R^2 - x^2$ que não possam ser simplificadas por uma mudança de variáveis mais simples, tente usar $x = R\sin(\theta)$. Quando houver termos da forma $R^2 + x^2$, tente usar $x = R\tan(\theta)$.

[1] Dito de outra maneira, introduzimos a variável $\theta = \arcsin(\frac{x}{R})$.