MAT01109 : RESUMO DE DERIVADAS

Seja $f(x)$ uma funcao. Para cada x_0 fixo, pensamos em $f(x_0+t)$ como uma funcao apenas de t, onde $t=(x-x_0)$. Dizemos que um polinômio

$$F_n(t)=a_nt^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0$$

e a aproximacao de f de ordem n em x_0 se

$$\lim_{t\to 0}\frac{R(x_0;t)}{t^n}=0, \quad R(x_0;t):=f(x_0+t)-F_n(t).$$

Note que o polinomio que aproxima f em ordem n em x_0, se existir, é único: se

$$G_n(t)=b_nt^n+b_{n-1}t^{n-1}+\cdots+b_1t+b_0$$

é um outro tal polinomio, e

$$f(x_0+t)=F_n(t)+R(x_0;t)=G_n(t)+S(x_0;t), \quad \lim_{t\to 0}\frac{R(x_0;t)}{t^n}=\lim_{t\to 0}\frac{S(x_0;t)}{t^n}=0,$$

entao

$$F_n(t)-G_n(t)=S(x_0;t)-R(x_0;t) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to 0}\frac{F_n(t)-G_n(t)}{t^n}=0 \quad \Longrightarrow \quad F_n=G_n.$$

Exemplo 1. *Se uma funcao $f(x)$ é aproximada em ordem zero por $F_0(t)=a_0$ em x_0, entao*

$$f(x_0+t)=a_0+R(x_0;t) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to 0}R(x_0;t)=0.$$

Portanto uma tal aproximacao existe se f é continua em x_0, e a aproximacao é dada por $F_0(t)=f(x_0)$.

Exemplo 2. *Considere a funcao afim $f(x)=\alpha x+\beta$. Considere um polinomio $F_1(t)=a_1t+a_0$. Entao se F_1 aproxima f em ordem 1 em x_0,*

$$f(x_0+t)=\alpha(x_0+t)+\beta=F_1(t)+R(x_0;t)$$

temos que

$$(\alpha x_0+\beta)+\alpha t-a_1t-a_0=(f(x_0)-a_0)+(\alpha t-a_1)t=R_(x_0;t),$$

e portanto

$$\lim_{t\to 0}\frac{R(x_0;t)}{t}=0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_0)=a_0, \quad \alpha=a_1.$$

Portanto

$$F_1(t)=f(x_0)+\alpha t$$

é a aproximacao de f de ordem 1 em x_0.

Mais geralmente: dado polinomio $F_1(t)=a_1t+a_0$, entao

$$f(x_0+t)=F_1(t)+R(x_0;t)=a_1t+a_0+R(x_0;t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{R(x_0;t)}{t}=\frac{f(x_0+t)-a_0}{t}-a_1.$$

Portanto F_1 é uma aproximacao de ordem 1 em x_0 se

$$\begin{cases} a_0=f(x_0), \\ a_1=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \end{cases}$$

O limite

$$f'(x_0):=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}$$

se existir, é chamado de **derivada** de f em x_0. Usamos tambem a notacao

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x)|_{x=x_0}.$$

Exemplo 3. *Considere $f(x) = x^2$, e seja $x_0 = 3$. Calculamos*

$$f(x_0) = f(3) = 9, \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(9+6t+t^2) - 9}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{6t+t^2}{t} = \lim_{t\to 0}(6+t) = 6.$$

Portanto a aproximacao de f de ordem 1 em $x_0 = 3$ é

$$F_1(t) = f(x_0) + f'(x_0)t = 9 + 6t.$$

Portanto a reta tangente ao gráfico de f em $(3, 9)$ é dada por

$$9 + 6(x - x_0).$$

Exemplo 4. *Considere $f(x) = x^n$. Calculamos*

$$\begin{aligned} f(x_0+t) = (x_0+t)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x_0^{n-i} t^i \\ &= t^n + nt^{n-1}x_0 + \cdots + ntx_0^{n-1} + x_0^n. \end{aligned}$$

Portanto $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{t^n + nt^{n-1}x_0 + \cdots + ntx_0^{n-1}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}(t^{n-1} + nt^{n-2}x_0 + \cdots + nx_0^{n-1}) \\ &= nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Mais geralmente, para um polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, temos

$$f'(x_0) = na_n x_0^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x_0^{n-2} + \cdots + 2a_2 x_0 + a_1 x_0.$$

Exemplo 5. *Considere $f(x) = \sin(x)$. Calculamos*

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{\sin(x_0+t) - \sin(x_0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{(\sin(x_0)\cos(t) + \cos(x_0)\sin(t)) - \sin(x_0)}{t} \\ &= (\sin(x_0) \lim_{t\to 0} \frac{(\cos(t) - 1)}{t} + \cos(x_0) \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} \\ &= \cos(x_0). \end{aligned}$$

Portanto a aproximacao de $\sin(x)$ de ordem 1 em x_0 é

$$F_1(t) = \sin(x_0) + \cos(x_0)t;$$

Portanto a reta tangente ao gráfico de $\sin(x)$ em $(x_0, \sin(x_0))$ é dada por

$$\sin(x_0) + \cos(x_0)(x - x_0).$$

Exemplo 6. *Considere $f(x) = \cos(x)$. Calculamos*

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{\cos(x_0+t) - \cos(x_0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{(\cos(x_0)\cos(t) - \sin(x_0)\sin(t)) - \cos(x_0)}{t} \\ &= (\cos(x_0) \lim_{t\to 0} \frac{(\cos(t) - 1)}{t} - \sin(x_0) \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} \\ &= -\sin(x_0). \end{aligned}$$

Portanto a aproximacao de $\cos(x)$ de ordem 1 em x_0 é

$$F_1(t) = \cos(x_0) - \sin(x_0)t;$$

Portanto a reta tangente ao gráfico de $\sin(x)$ em $(x_0, \sin(x_0))$ é dada por

$$\cos(x_0) - \sin(x_0)(x - x_0).$$

Exemplo 7. *Considere* $f(x) = \exp(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$. *Calculamos*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\cos(x_0+t)-\cos(x_0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{(\cos(x_0)\cos(t)-\sin(x_0)\sin(t))-\cos(x_0)}{t} \\
&= (\cos(x_0) \lim_{t\to 0} \frac{(\cos(t)-1)}{t} - \sin(x_0) \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} \\
&= -\sin(x_0).
\end{aligned}$$

Portanto a aproximacao de $\cos(x)$ *de ordem 1 em* x_0 *é*

$$F_1(t) = \cos(x_0) - \sin(x_0)t;$$

Portanto a reta tangente ao gráfico de $\sin(x)$ *em* $(x_0, \sin(x_0))$ *é dada por*

$$\cos(x_0) - \sin(x_0)(x - x_0).$$

Exemplo 8. *Considere* $f(x) = \exp(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$. *Como*

$$\frac{d}{dx}\frac{x^n}{n!} = n\frac{x^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

temos que

$$\frac{d}{dx}\exp(x) = \sum_0^\infty \frac{d}{dx}\frac{x^n}{n!} = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

Portanto $\exp(x)$ *é sua própria derivada !*

Dizemos que $f(x)$ é **diferenciável** em (a,b) se $f'(x)$ existe para cada $x \in (a,b)$. Note que, nesse caso, a derivada $f'(x)$ define uma funcao.

Exemplo 9. *Nem toda funcao continua é diferenciável. Por exemplo, considere*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Entao

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{-t}{t} = -1$$

enqquanto que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = 1.$$

Portanto $f'(0)$ *nao existe.*

Lema 1. *Sejam* $f(x)$, $g(x)$ *e* $h(x)$ *funcoes, tais que exitem* $f'(x_0)$ *e* $g'(x_0)$ *e* $h'(f(x_0))$. *Entao:*

a) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
b) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
c) Se $f(x_0) \neq 0$, *entao* $(1/f)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$;
d) $(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0))f'((x_0)$.

Exemplo 10. *Considere* $f(x) = \exp(\frac{1}{\cos(x)})$. *Calculamos*

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x), \quad \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$$

Portanto

$$\frac{d}{dx}f(x) = \exp(\frac{1}{\cos(x)})\frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}.$$

Exemplo 11. *Considere* $f(x) = \sin(7x)^3$. *Calculamos*

$$\frac{d}{dx}\sin(7x) = 7\cos(7x), \quad \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2.$$

Portanto

$$\frac{d}{dx}f(x) = 21\sin(7x)^2\cos(7x).$$

Lema 2. *Se* $f(x)$ *é contínua em* $[a,b]$, *e* $f'(x)$ *existe para cada* $x \in (a,b)$, *então*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c),$$

para algum $c \in (a,b)$. *Em particular, se* $f'(x) = 0$ *para todo* x *em* (a,b), *entao* f *é constante em* $[a,b]$.

Derivadas sao tambem uteis para determinar limites.

Lema 3 (L'Hôpital)**.** *Se* $f(x)$ *e* $g(x)$ *sao funcoes diferenciáveis em* x_0, $f(x_0) = g(x_0) = 0$ *e* $g'(x_0) \neq 0$, *entao*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Exemplo 12. *Considere* $f(x) = \sin(x)$ *e* $g(x) = x$. *Entao* $f(0) = g(0) = 0$, *mas* $g'(0) = 1$. *Portanto*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\cos(0)}{1} = 1,$$

como já sabíamos.

Exemplo 13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2+x}{x^2-x} = \frac{3x^2+2x+1}{2x-1}|_{x=0} = -1.$$

Se $f(x)$ uma funcao contínua. Dizemos que $F(x)$ é uma **primitiva** de $f(x)$ se $f(x) = F'(x)$ para todo x. Pelo Lema, qualquer outra primitiva de $f(x)$ é da forma $F(x) + c$, para alguma constante c.

Exemplo 14. *Considere* $f(x) = x^n$. *Como*

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

é uma primitiva de f, *segue que a única primitiva de* $f(x)$ *que vale* 1 *em* 0 *é* $\frac{x^{n+1}}{n+1}+1$.

1. Extremos

Dizemos que $f(x)$ tem um **máximo local** em x_0 se $f(x_0) \geqslant f(x_0+t)$ para todo t suficientemente pequeno.

Exercício 4. *O que é um mínimo local de* f *em* x_0 *?*

Lema 5. *Se* $f(x)$ *tem um mínimo ou máximo local em* x_0, *entao* $f'(x_0) = 0$.

Exemplo 15. *A funcao* $f(x) = \exp(x)$ *nao tem nem máximos nem mínimos locais, já que* $f'(x) = \exp(x) \neq 0$.

Dizemos que f é de classe C^1 se $f'(x)$ é continua, e dizemos que f é de classe C^r se $f'(x)$ é de classe C^{r-1}. Denotamos por $f''(x)$ a derivada de $f'(x)$ etc.

Lema 6. *Se* $f(x)$ *é de classe* C^2, *entao* x_0 *é um máximo local de* f *se*

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0.$$

Exercício 7. *Enuncie a versao do Lema acima para mínimos locais de* f.

Exemplo 16. *Considere* $f(x) = \cos(x)$ *e* $x_0 = 0$. *Entao* $f'(x_0) = 0$ *e* $f''(0) = -1$. *Portanto* x_0 *é um máximo local de* f.

Exemplo 17. *Considere* $f(x) = x^3$. *Entao* $f'(0) = 0$, *mas* 0 *nao é nem máximo nem mínimo local: nao podemos aplicar o Lema porque* $f''(0) = 0$.