Álgebra Linear

Um curso elementar

Pedro Frejlich

NOTAS DE AULA DO CURSO DE ÁLGEBRA LINEAR

PROFESSOR.UFRGS.BR/FREJLICH

First printing, March 2013

Sumário

Parte Zero. Sistemas de equações lineares

1. Alguns exemplos

1.1 Recomendação médica de consumo de vitaminas

Suponha que a recomendação médica de consumo de vitaminas a, b e c seja como segue:

Vitamina	A	B	C
Consumo Diário	23 u	68 u	124 u

Suponha ainda que a composição de alimentos α, β, γ seja como segue:

Composição u/g	α	β	γ
A	2	3	5
B	7	11	13
C	17	19	23

A pergunta é: existem quantidades de α, β, γ que possamos consumir de forma a satisfazer a recomendação médica sobre consumo de vitaminas A, B e C ?

Suponha que consumamos p gramas de α, q gramas de β, e r gramas de γ. Então o consumo de Vitamina A total é

$$2p+3q+5r.$$

De maneira análoga, os consumos de Vitaminas B e C são, respectivamente,

$$7p+11q+13r, \quad 17p+19q+23r.$$

Portanto desejamos encontrar os valores das **incógnitas** $p, q, r \in \mathbb{R}$ que satisfaçam simultaneamente às equações lineares

$$\begin{cases} 2p+3q+5r & = 23 \\ 7p+11q+13r & = 68 \\ 17p+19q+23r & = 124 \end{cases}$$

1.2 Fitting the curvas

1.3 Tráfego em uma cidade

—Put a picture

2. Sistemas lineares

2.1 Funções e equações lineares

Denote por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de n-uplas ordenadas de números reais:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \; x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Definição 2.1.1 Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita **afim** se é da forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + c,$$

onde $a_1, \dots, a_n, b$ são números reais, e **linear** se $c = 0$. Uma função $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear ou afim se assim são suas componentes f_i.

Lema 1 Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função.

a) f é linear se e só se

$$\begin{aligned} f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + f(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f(cx_1, cx_2, \dots, cx_n) &= cf(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

para todos $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$.

b) f é afim se e só se $f_- : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_-((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) := f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

é linear.

Definição 2.1.2 Seja $f = (f_1, f_2, ..., f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ um função linear. Então uma equação da forma $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (b_1, b_2, ...b_m)$ é chamada de um **sistema linear** (em m equações e n variáveis). Se denotarmos as componentes f_i por $f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$,

$$f(x) = b \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

Como exatamente denotamos as incógnitas — se $x_1, ..., x_n$ ou $X_1, ..., X_n$ ou $y_1, ..., y_n$ ou ainda $\square_1, ..., \square_n$ — claramente não muda a equação[1] Portanto um sistema de equações lineares está inteiramente determinado pelos coeficientes a_{ij} e b_i. Portanto uma forma compacta de escrever o sistema (2.1), omitimos a escolha (irrelevante) de *nomes* das variáveis, é

$$[f \mid b] := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{2.2}$$

Para cada $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, denotamos por

$$[f \mid b]_i = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & b_i, \end{array}\right], \qquad [f \mid b]^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}$$

respectivamente a ***i*-ésima linha** e a ***j*-ésima coluna** de $[f \mid b]$. A $(n+1)$-ésima coluna de $[f \mid b]$ será simplesmente denotada por b. Chamamos também o néro a_{ij} o (i, j)**-ésimo elemento** de $[f \mid b]$, e às vezes o denotamos por $[f \mid b]_i^j$.

2.2 Soluções de um sistema linear

Uma **solução** do sistema linear (2.2) é uma escolha de valores para $x_1, ...x_n$ de modo a satisfazer cada equação simultaneamente. Onde tais x_i moram depende do problema: na esmagadora maioria dos exemplos, é lícito escolher qualquer valor real para os x_i's, mas em certos problemas pode ser requerido algo mais específico. [2]

Resolver o sistema linear (2.2) significa determinar o conjunto de todas as suas soluções:

$$\mathrm{Sol}[f \mid b] = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle| \; x_1 ... x_n \in \mathbb{R}, \; f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b \right\} \tag{2.3}$$

[1] O papel das incógnitas é semelhante ao de *pointers* em um computador: quando fazemos CTRL + C para copiar uma informação, nós não especificamos *onde* exatamente o computador vai armazenar essa informação — tudo o que nos interessa é que ele saiba onde a vai armazenar, e que a possa invocar quando dermos CTRL + V.

[2] Por exemplo, no problema "Recomendação médica de consumo de vitaminas" as soluções deveriam ser números reais não-negativos, enquanto que no problema "Tráfego em uma cidade" as soluções têm de ser números naturais (ou zero).

■ **Exemplo 2.1** Considere o sistema linear nas variáveis $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad [f \mid b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Então

$$\mathrm{Sol}[f \mid b] = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

■

Note que $\mathrm{Sol}[f \mid b]$ pode ser o conjunto vazio, $\mathrm{Sol}[f \mid b] = \varnothing$, em cujo caso dizemos que o sistema linear $[f \mid b]$ é **inconsistente**.

■ **Exemplo 2.2** O sistema linear nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dado por

$$\begin{cases} 0 = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1 \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad [f \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

é chamado de **contradição elementar**, e não possui soluções: $\mathrm{Sol}[f \mid b] = \varnothing$. ■

Quando há soluções para $[f \mid b]$, dizemos que o sistema é **consistente**.

■ **Exemplo 2.3** Considere o sistema linear nas variáveis $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad [f \mid b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Então

$$\mathrm{Sol}[f \mid b] = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

■

Neste último exemplo, há uma *única* solução para o sistema. Em geral, soluções de sistemas lineares vêm em *famílias*.

■ **Exemplo 2.4** Considere o sistema linear do exemplo precedente como um sistema nas variáveis $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad [f \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Então

$$\mathrm{Sol}[f \mid b] = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

■

Observe que no exemplo acima temos uma família de soluções que depende de um parâmetro real: para cada escolha *arbitrária* de número real x_3, temos que

$$\vec{x}(x_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

é solução de $[f \mid b]$, e toda solução de $[f \mid b]$ é dessa forma para alguma escolha de x_3.

Exercício 2.1 Mostre que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \in \mathrm{Sol}[f \mid b] \implies \begin{bmatrix} (1-t)x_1 + tx'_1 \\ (1-t)x_2 + tx'_2 \\ \vdots \\ (1-t)x_n + tx'_n \end{bmatrix} \in \mathrm{Sol}[f \mid b]$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, a média de duas soluções é também uma solução.

Conclua que é válida a seguinte dicotomia: "o conjunto de soluções de um sistema consistente consiste em uma única solução, ou em infinitas". ■

Definição 2.2.1 Dois sistemas lineares $[f \mid b]$ e $[g \mid c]$ **têm as mesmas soluções** se

$$\mathrm{Sol}[f \mid b] = \mathrm{Sol}[g \mid c].$$

■ **Exemplo 2.5** O sistema linear

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad [f \mid b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

e os três sistemas lineares abaixo têm todos as mesmas soluções:

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad [f' \mid b'] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 2x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad [f'' \mid b''] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad [f''' \mid b'''] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

■

2.3 Sistemas equivalentes

As modificações do Exemplo 2.5 são abstraídas em três operações básicas.

Operação 1: Permutar duas equações

Dizemos que um sistema linear $[g \mid c]$ é obtido de um sistema linear $[f \mid b]$ ao **permutar as equações** i e j se a todas as linhas de $[g \mid c]$ e de $[f \mid b]$ coincidem, exceto as linhas de números i e j, que aparecem na ordem oposta:

$$[g \mid c]_k = \begin{cases} [f \mid b]_k & \text{se } k \neq i, j; \\ [f \mid b]_j & \text{se } k = i; \\ [f \mid b]_i & \text{se } k = j. \end{cases}$$

Denotamos isso por

$$[f \mid b] \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} [g \mid c].$$

No Exemplo 2.5, temos portanto

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Mais geralmente, se $[f \mid b]$ é um sistema linear, e $\sigma : \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ é uma bijeção, denotamos por $[f \mid b]^\sigma$ o sistema linear determinado por

$$[f \mid b]^\sigma_i = [f \mid b]_{\sigma(i)}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Operação 2: Multiplicar uma equação por um número não-nulo

Dizemos que um sistema linear $[g \mid c]$ é obtido de um sistema linear $[f \mid b]$ ao **multiplicar a i-ésima equação** por um número não-nulo $\lambda \neq 0$ se todas as linhas de $[g \mid c]$ e de $[f \mid b]$ coincidem, exceto a linha de número i, que aparece em $[g \mid c]$ multiplicada por λ:

$$[g \mid c]_k = \begin{cases} [f \mid b]_k & \text{se } k \neq i; \\ \lambda [f \mid b]_i & \text{se } k = i. \end{cases}$$

Denotamos isso por

$$[f \mid b] \xrightarrow{L_i \to \lambda L_i} [g \mid c].$$

No Exemplo 2.5, temos portanto

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to 2L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Operação 3: Somar a uma equação um múltiplo de outra

Dizemos que um sistema linear $[g \mid c]$ é obtido de um sistema linear $[f \mid b]$ ao **somar à i-ésima equação um múltiplo da j-ésima** se todas as linhas de $[g \mid c]$ e de $[f \mid b]$ coincidem, exceto a linha de número i, que em $[g \mid c]$ é a soma das linhas i e λ vezes a linha j de $[f \mid b]$, onde λ é um número real:

$$[g \mid c]_k = \begin{cases} [f \mid b]_k & \text{se } k \neq i; \\ [f \mid b]_i + \lambda [f \mid b]_j & \text{se } k = i. \end{cases}$$

Denotamos isso por

$$[f \mid b] \xrightarrow{L_i \to L_i + \lambda L_j} [g \mid c].$$

No Exemplo 2.5, temos portanto

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Lema 2 As operações 1, 2 e 3 descritas acima são invertíveis — i.e., se $[g \mid c]$ é obtido de $[f \mid b]$ através de uma dessa operações, então também $[f \mid b]$ é obtido de $[g \mid c]$ através de alguma dessa operações.

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{aligned} [f \mid b] \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} [g \mid c] \quad &\Longrightarrow \quad [g \mid c] \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} [f \mid b] \\ [f \mid b] \xrightarrow{L_i \to \lambda L_i} [g \mid c] \quad &\Longrightarrow \quad [g \mid c] \xrightarrow{L_i \to \frac{1}{\lambda} L_i} [f \mid b], \qquad \lambda \neq 0 \\ [f \mid b] \xrightarrow{L_i \to L_i + \lambda L_j} [g \mid c] \quad &\Longrightarrow \quad [g \mid c] \xrightarrow{L_i \to L_i - cL_j} [f \mid b] \end{aligned}$$

■

Definição 2.3.1 Diremos que os sistemas lineares $[f \mid b]$ e $[g \mid c]$ são **equivalentes** se existe um caminho

$$[f \mid b] = [f \mid b]^{[0]} \rightsquigarrow [f \mid b]^{[1]} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow [f \mid b]^{[s-1]} \rightsquigarrow [f \mid b]^{[s]} = [g \mid c]$$

onde cada $[f \mid b]^{[k]} \rightsquigarrow [f \mid b]^{[k+1]}$ indica uma das três operações descritas acima.

Lema 3 Dois sistema lineares equivalentes têm as mesmas soluções.

Demonstração. Basta observar que se $\vec{x}$ é solução de $[f \mid b]$, então $\vec{x}$ é solução de qualquer sistema $[g \mid c]$ obtido de $[f \mid b]$ através de uma dentre as operações 1, 2 ou 3 — i.e., $\mathrm{Sol}[f \mid b] \subset \mathrm{Sol}[g \mid c]$. Mas pelo Lema 2 também $[f \mid b]$ é obtido de $[g \mid c]$ através de uma dentre as operações 1, 2 e 3, e portanto $\mathrm{Sol}[f \mid b] = \mathrm{Sol}[g \mid c]$. ■

■ **Exemplo 2.6**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 23 \\ 7 & 11 & 13 & 68 \\ 17 & 19 & 23 & 124 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 23 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 17 & 19 & 23 & 124 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 9 & 25 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 17 & 19 & 23 & 124 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 - 17L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 9 & 25 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -15 & 57 & 141 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 25 \\ 0 & -15 & 57 & 141 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to -L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -9 & -25 \\ 0 & -15 & 57 & 141 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 16 & 49 \\ 0 & 1 & -9 & -25 \\ 0 & -15 & 57 & 141 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 15L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 16 & 49 \\ 0 & 1 & -9 & -25 \\ 0 & 0 & -78 & -234 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to \frac{-L_3}{78}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 16 & 49 \\ 0 & 1 & -9 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 16L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + 9L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Em conseqüência do Lema 3, deduzimos que os sistemas lineares

$$[f \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 23 \\ 7 & 11 & 13 & 68 \\ 17 & 19 & 23 & 124 \end{array}\right], \qquad [g \mid c] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

têm as mesmas soluções. Mas note que $[g \mid c]$ é tão somente uma abreviação do sistema linear cujas equações são

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = 3$$

e portanto

$$\mathrm{Sol}[f \mid b] = \mathrm{Sol}[g \mid c] = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

■

Como sistemas equivalentes têm as mesmas soluções, nosso principal método para resolver sistemas lineares consiste em usar as três operações acima para encontrar um sistema linear cujas soluções sejam evidentes.

2.4 Sistemas desacoplados

Para concretizar a noção de um sistema cujas soluções são evidentes, introduzimos a seguinte noção.

Seja α uma permutação em n letras, e defina

$$V_{r,\alpha} := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leqslant j \leqslant n - r \ \Rightarrow \ x_{\alpha(r+j)} = 0\}$$
$$W_{r,\alpha} := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leqslant i \leqslant r \ \Rightarrow \ x_{\alpha(i)} = 0\}$$

Definição 2.4.1 Uma função linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é **desacoplada** se existe uma permutação α em n letras, e função linear $\phi : \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}^r$, tal que

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_{\alpha(i)} + \phi_i\big(x_{\alpha(r+1)}, x_{\alpha(r+1)}, \ldots, x_{\alpha(n)}\big), & \text{se } 1 \leqslant i \leqslant r; \\ 0, & \text{se } r+1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

em cujo caso denotamos f por $f = \alpha \cdot f_\phi$.

O **posto** de um tal sistema desacoplado é o número r. Note que o posto é limitado tanto pelo número de equações como de variáveis:

$$r \leqslant \min(n, m). \tag{2.4}$$

■ **Exemplo 2.7** Considere a função linear:

$$\phi : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \phi \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 \\ 6y_3 + 7y_4 + 8y_5 \\ 9y_4 + 10y_5 \end{bmatrix}$$

e a permutação em 8 letras

$$\begin{array}{cccc} \alpha(1)=2, & \alpha(2)=4, & \alpha(3)=6, & \alpha(4)=1, \\ \alpha(5)=3, & \alpha(6)=5, & \alpha(7)=7, & \alpha(8)=8 \end{array}$$

Então as funções lineares desacopladas $f_\phi, \alpha \cdot f_\phi : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^4$ são

$$f_\phi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+2x_5+3x_6+4x_7+5x_8 \\ x_2+6x_6+7x_7+8x_8 \\ x_3+9x_7+10x_8 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\alpha \cdot f_\phi) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2+2x_3+3x_5+4x_7+5x_8 \\ x_4+6x_5+7x_7+8x_8 \\ x_6+9x_7+10x_8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema linear $f_\phi(x) = b = (3,2,1,t)$ lê:

$$\begin{cases} x_1+2x_5+3x_6+4x_7+5x_8 = 3 \\ x_2+6x_5+7x_7+8x_8 = 2 \\ x_3+9x_7+10x_8 = 1 \\ 0 = t \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad [f_\phi \mid b] = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right]$$

Esse sistema é consistente se e só se $t = 0$, em cujo caso

$$\mathrm{Sol}[f_\phi \mid b] = \left\{ \begin{bmatrix} 3-(2x_5+3x_6+4x_7+5x_8) \\ 2-(6x_5+7x_7+8x_8) \\ 1-(9x_7+10x_8) \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \middle| \; x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \mathbb{R} \right\}$$

Seja $\alpha : \{1,2,...,8\} \to \{1,2,...,8\}$ a bijeção dada por

$$\begin{array}{cccc} \alpha(1)=2, & \alpha(2)=4, & \alpha(3)=6, & \alpha(4)=1, \\ \alpha(5)=3, & \alpha(6)=5, & \alpha(7)=7, & \alpha(8)=8 \end{array}$$

Note que o rearranjo $f_\phi \circ \alpha$ de f_ϕ por α lê

$$(f_\phi \circ \alpha) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2+2x_3+3x_5+4x_7+5x_8 \\ x_4+6x_5+7x_7+8x_8 \\ x_6+9x_7+10x_8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto o sistema $[f_\phi \circ \alpha \mid b]$ lê

$$\begin{cases} x_2+2x_3+3x_5+4x_7+5x_8 = 3 \\ x_4+6x_3+7x_7+8x_8 = 2 \\ x_6+9x_7+10x_8 = 1 \\ 0 = t \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad [f_\phi \circ \alpha \mid b] = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{array}\right],$$

é consistente exatamente quando $t = 0$, em cujo caso

$$\mathrm{Sol}[f_\phi \circ \alpha \mid b] = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 3-(2x_3+3x_5+4x_7+5x_8) \\ x_3 \\ 2-(6x_3+7x_7+8x_8) \\ x_5 \\ 1-(9x_7+10x_8) \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} \middle| \; x_1, x_3, x_5, x_7, x_8 \in \mathbb{R} \right\}$$

■

Uma função desacoplada com $\alpha = \mathrm{id}$ tem portanto a forma

$$f_\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad f_\phi \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \phi_1(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n) \\ x_2 + \phi_2(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n) \\ \vdots \\ x_r + \phi_r(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto para um dado $b \in \mathbb{R}^m$, o sistema linear

$$[f_\phi \mid b] \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1 + \phi_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \\ x_2 + \phi_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ x_r + \phi_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é consistente se e só se

$$b_{r+j} = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m - r,$$

em cujo caso

$$\mathrm{Sol}[f_\phi \mid b] = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 - \phi_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \\ b_2 - \phi_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ b_r - \phi_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n) \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\middle|\; x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Observe que isso estabelece um bijeção afim

$$\vec{x} : \mathbb{R}^{n-r} \longrightarrow \mathrm{Sol}[f \mid b].$$

Sistema desacoplados são precisamente os sistemas lineares que merecem ser chamados de "sua própria solução". Portanto nossa estratégia para resolver sistemas lineares $[f \mid b]$ funciona exatamente quando $[f \mid b]$ é equivalente a um sistema desacoplado — em outras palavras, se o conjunto

$$\mathrm{Dec}[f \mid b] := \{[g \mid c] \mid [g \mid c] \text{ é desacoplado e equivalente a } [f \mid b]\}$$

não é vazio.

■ **Exemplo 2.8** Para $a, b \in \mathbb{R}$ não são simultaneamente nulos, $a^2 + b^2 \neq 0$, considere o sistema linear

$$ax_1 + bx_2 = 0 \qquad \longleftrightarrow \qquad [f \mid b] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$\mathrm{Desac}[f \mid b] = \begin{cases} \{[g \mid c]\} & \text{se } a \neq 0; \\ \{[g' \mid c']\} & \text{se } b \neq 0; \\ \{[g \mid c], [g' \mid c']\} & \text{se } a, b \neq 0. \end{cases}$$

onde

$$[g \mid c] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} & 0 \end{bmatrix}, \qquad [g' \mid c'] = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

Teorema 2.4.1 Todo sistema linear é equivalente a um sistema linear desacoplado.

Demonstração. Seja $[f \mid b]$ um sistema linear em m equações.

Passo Inicial. Se $m = 1$, então ou $f = 0$, em cujo caso f é modelo, ou existe uma primeira variável $x_{\alpha(1)}$ que ocorre em f. Utilizando a operação 2, podemos supôr que $f - x_{\alpha(1)}$ é uma função das demais variáveis, $f - x_{\alpha(1)} = \phi(x_{\alpha(1)+1}, x_{\alpha(1)+2}, \ldots, x_n)$, em cujo caso $f = f_\phi$.

Passo Indutivo. Suponha que sistemas linear em até $(m-1)$ equações sejam equivalentes a sistemas desacoplados. Seja $x_{\alpha(1)}$ a primeira variável a ocorrer em f. Utilizando a operação 1, podemos supôr que $x_{\alpha(1)}$ ocorre em f_1. Considere o sistema linear $[f' \mid b']$, onde

$$[f' \mid b']_i = \begin{cases} [f \mid b]_1 & \text{se } i = 1; \\ [f \mid b]_i - [f \mid b]_i^{j_1} [f \mid b]_1 & \text{se } i > 1. \end{cases}$$

Então $[f' \mid b']$ é equivalente a $[f \mid b]$, e $x_{\alpha(1)}$ só ocorre em f'_1.

Pela hipótese indutiva, tanto $[f' \mid b']_1$ quanto o sistema $[g \mid c]$ em $(m-1)$ equações obtido de $[f' \mid b']$ ao omitir a primeira linha:

$$[g \mid c]_i := [f' \mid b']_{i+1}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m-1.$$

são equivalentes a sistemas desacoplados que minimizam separadamente per:

$$[f' \mid b']_1 \sim [f_{\phi'} \mid c'], \qquad [g \mid c] \sim [f_{\phi''} \mid c''],$$

onde ϕ' é uma função das coordenadas x_j onde $j \neq \alpha(1)$, e onde ϕ'' é função das coordenadas x_j onde $j \neq \alpha(1) < \alpha(2) < \cdots < \alpha(r)$.

Complete α a embaralhamento $\alpha \in \mathrm{Sh}(r, n-r)$ (ou seja, $\alpha(r+1) < \alpha(r+2) < \cdots < \alpha(n)$), e seja $[f'' \mid b'']$ o sistema linear

$$[f'' \mid b'']_i = \begin{cases} [f_{\phi'} \mid c']_1 & \text{se } i = 1; \\ [f_{\phi''} \mid c'']_{i-1} & \text{se } 2 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Então se $[f''' \mid b''']$ é o sistema linear

$$[f''' \mid b''']_i = \begin{cases} [f'' \mid b'']_1 - \sum_{i=2}^r a_{1\alpha(i)} [f'' \mid b'']_i & \text{se } i = 1; \\ [f'' \mid b'']_i & \text{se } 2 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

então $f''' = f_\psi$, onde $\psi : \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}^r$ é a função linear em que ψ_1 é a função ϕ', onde para cada $2 \leqslant i \leqslant r$, a variável $x_{\alpha(i)}$ é substituída pela expressão $b_i - \phi''_{\alpha(i)}(x_{\alpha(r+1)}, x_{\alpha(r+2)}, \ldots, x_{\alpha(n)})$, e $\psi_i = \phi''_{i-1}$ para $2 \leqslant i \leqslant r$, e $[f \mid b] \sim [f''' \mid b''']$. ■

Corolário 2.4.2 Uma função linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ só pode ser injetora se $n \leqslant m$, e só pode ser sobrejetora se $n \geqslant m$.

Demonstração. Observe que se um sistema $[f \mid 0]$ é equivalente a um desacoplado $[\alpha \cdot f_\phi \mid 0]$ que corresponde a $\phi : \mathbb{R}^{n-r} \to \mathbb{R}^r$, então $[f \mid b]$ é consistente para todo $b \in \mathbb{R}^m$ se e só se $[\alpha \cdot f_\phi \mid c]$ é consistente para todo $c \in \mathbb{R}^m$, o que só pode ocorrer se $r = m$. Como $r \leqslant n$, f só pode ser sobrejetora se $n \geqslant m$.

Por outro lado, f é injetora exatamente quando $[f \mid 0]$ tem como única solução $0 \in \mathbb{R}^n$, que é o caso exatamente quando $r = n$, i.e., quando $[\alpha \cdot f_\phi \mid c]$ tem como única solução $0 \in \mathbb{R}^n$. Como $r \leqslant m$, f só pode ser injetora se $n \leqslant m$. ■

Corolário 2.4.3 Dois sistemas desacoplados equivalentes têm o mesmo posto.

2.5 Sistemas reduzidos

Vimos no Teorema 2.4.1 que todo sistema linear $[f \mid b]$ é equivalente a um sistema desacoplado $[f_\phi \circ \alpha \mid c]$ — e potencialmente a muitos. Gostaríamos de entender se, dentre os sistemas desacoplados equivalentes a $[f \mid b]$, existe uma “melhor escolha”.

Introduzamos uma pré-ordem em $\mathscr{P}_r(\{1,2,...,n\})$ como segue: para $X \in \mathscr{P}_r(\{1,2,...,n\})$, defina

$$x_1 := \min X, \qquad\qquad x_{k+1} := \min(X \diagdown \{x_1,...,x_k\}).$$

Então temos a ordem lexicorgáfica

$$X < Y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, 1 \leqslant s \leqslant r, \quad x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \cdots,\ x_{s-1} = y_{s-1},\ x_s < y_s,$$

e observe que essa é uma *boa-ordem* — i.e., todo subconjunto tem um (único) elemento mínimo.

Definição 2.5.1 O sistema reduzido associado a $[f \mid b]$ é o mínimo sistema desacoplado em $\mathrm{Dec}[f \mid b]$.

Parte Um. Espaços e mapas lineares

3. Espaços Vetoriais: definições básicas

Definição 3.0.2 — Espaço $\mathbb{k}$-linear. Seja $\mathbb{k}$ um corpo. Um **espaço $\mathbb{k}$-linear** consiste de um grupo abeliano $(V,+)$, munido de um mapa

$$\mathbf{m} : \mathbb{k} \times V \longrightarrow V,$$

satisfazendo, para todos $v, w \in V$ e $r, s \in \mathbb{k}$:

a) $\mathbf{m}(1,v) = v$;

b) $m(r, m(s,v)) = \mathbf{m}(rs, v)$;

c) $\mathbf{m}(r+s, v) = \mathbf{m}(r,v) + \mathbf{m}(s,v)$;

d) $\mathbf{m}(r, v+w) = \mathbf{m}(r,v) + \mathbf{m}(r,w)$.

Chamamos $+, \mathbf{m}$ de **mapas estruturais** do espaço $\mathbb{k}$-linear V.

■ **Exemplo 3.1** Um corpo $\mathbb{k}$ é um espaço $\mathbb{k}$-linear se definirmos $m(r,s) := rs$. ■

■ **Exemplo 3.2** Seja n um inteiro positivo, e seja $\mathbb{k}^n = \underbrace{\mathbb{k} \times \cdots \times \mathbb{k}}_{k}$, de modo que

$$x \in V \quad \longleftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{k}.$$

Entao $\Bbbk^n$ tem estrutura natural de espaco $\Bbbk$-linear com as operacoes

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \quad r\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \\ \vdots \\ rx_n \end{pmatrix}$$

■

■ **Exemplo 3.3** Polinomios ■

Exercício 3.1 Se V é um espaço $\Bbbk$-linear, e S é qualquer conjunto, então $\mathrm{Sets}(S,V)$ tem estrutura natural de espaço $\Bbbk$-linear. ■

Definição 3.0.3 — Subespaço $\Bbbk$-linear. Seja V um espaço $\Bbbk$-linear. Um **subespaço $\Bbbk$-linear** V' de V é um subconjunto $V' \subset V$ que é ele mesmo um espaço $\Bbbk$-linear (com os mesmos mapas estruturais $+, \mathbf{m}$ de V).

Exercício 3.2 Para $\Bbbk = \mathbb{R}$ e $V = \mathbb{R}^n$, decida quais dos subconjuntos abaixo sao subespacos $\mathbb{R}$-lineares:

$$V' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1 = \cdots = x_k = 0 \right\}, \quad V'' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$V''' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1^2 + \cdots + x_n^2 \neq 0 \right\}, \quad V'''' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1 x_2 \cdots x_n = 0 \right\}$$

■

Lema 4 Seja $S \subset V$ um subconjunto. Entao a interseccao $\langle S \rangle$ de todos os subespacos $\Bbbk$-lineares $W \subset V$ que contêm S é um subespaco $\Bbbk$-linear de V, e consiste de todas as somas finitas

$$r_1 s_1 + \cdots + r_n s_n, \quad r_i \in \Bbbk, \quad s_i \in S.$$

Se $V_1, \ldots, V_r \subset V$ sao subespacos $\Bbbk$-lineares, denotamos

$$V_1 + \cdots + V_r := \langle V_1 \cup \cdots \cup V_r \rangle.$$

Dizemos que essa soma é **direta** se cada elemento $x \in V_1 + \cdots + V_r$ tem uma única expressao como soma

$$x = v_1 + \cdots + v_r, \quad v_i \in V_i,$$

em cujo caso escrevemos $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$.

4. Mapas lineares

Definição 4.0.4 — Mapa linear. Sejam V e W espaços $\Bbbk$-lineares. Uma funçao (ou mapa) $f : V \to W$ é dita **linear** se, para todos $v, v' \in V$ e $r \in \Bbbk$, temos

1. $f(v+w) = f(v) + f(w)$;
2. $f(\mathbf{m}(r, v)) = \mathbf{m}(r, f(v))$.

O conjunto de tais mapas lineares é denotado por $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$.

Exercício 4.1 Determine quais dos seguintes funcoes $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sao mapas $\mathbb{R}$-lineares: ∎

Exercício 4.2 Mostre que se V, W são espaços $\Bbbk$-lineares, então $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$ também é um espaço $\Bbbk$-linear. ∎

Exercício 4.3 Seja $V' \subset V$ um subespaço $\Bbbk$-linear, e seja $i : V' \hookrightarrow V$ o mapa de inclusao. Mostre que $i : V' \to V$ é linear. ∎

Proposição 4.0.1 Seja $f : V \to W$ um mapa linear. Então

$$\ker f \subset V, \quad \ker f := \{v \mid f(v) = 0\}, \quad \mathrm{im} f \subset W, \quad \mathrm{im} f := \{f(v) \mid v \in V\}$$

são subespaços lineares. Além disso, f é injetiva se e só se $\ker f = 0$, e f é sobrejetiva se e só se $\mathrm{im} f = W$.

Demonstração. $\ker f \subset V$ é subespaço linear pois

$$v, v_1, v_2 \in \ker f, \ c \in \Bbbk \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 \\ f(cv) = cf(v) = c0 = 0. \end{cases}$$

Suponha agora que $f : V \to W$ tenha núcleo $\ker f = \{0\}$. Então o único vetor que f leva a zero é o próprio zero portanto

$$f(v_1) = f(v_2) \quad \Longrightarrow \quad f(v_1 - v_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1 - v_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = v_2.$$

Portanto f é injetivo. Reciprocamente, se f é linear e injetivo, então segue que $f(v) = 0$ tem solução única $v = 0$; portanto $\ker f = 0$.

De modo análogo, $\operatorname{im} f \subset W$ é subespaço linear pois

$$f(v), f(v_1), f(v_2) \in \ker f,\ c \in \Bbbk \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \\ cf(v) = f(cv). \end{cases}$$

Que $\operatorname{im} f = W$ se e só se f é sobrejetor é imediato das definições. ■

Uma bijeção linear $f : V \xrightarrow{\sim}$ é dita **isomorfismo**.

Exercício 4.4 Mostre que a relação

$$V \sim W \quad \Longleftrightarrow \quad \exists f \in \operatorname{Hom}_{\Bbbk}(V, W) \text{ isomorfismo}$$

define uma relação de equivalência no conjunto de todos[a] os espaços $\Bbbk$-lineares. ■

[a] Com os devidos caveats de teoria de conjuntos...

Lema 5 Seja $V' \subset V$ um subespaço linear. Mostre que

$$V/V' := \{v + V' \mid v \in V\}$$

tem estrutura natural de espaço linear, e que o mapa

$$q : V \longrightarrow V/V', \quad q(v) := v + V'$$

é uma sobrejeção linear, com núcleo $\ker q = V'$.

Demonstração. Definimos as operações em V/V' por

$$(v_1 + V') + (v_2 + V') := (v_1 + v_2) + V', \quad c(v + V') := (cv) + V',$$

onde $v, v_1, v_2 \in V$ e $c \in \Bbbk$. É imediato verificar que, com esses mapas estruturais, V/V' é espaço $\Bbbk$-linear, e que $v + V' = v' + V'$ se e só se $v - v' \in V'$.

Considere agora o mapa $q : V \to VV'$ dado por $q(v) := v + V'$. Então q é linear:

$$q(v_1 + v_2) = (v_1 + v_2) + V' = (v_1 + V') + (v_2 + V'), \quad q(cv) = cv + V' = c(v + V').$$

Note também que q é sobrejetivo por definição de V/V', e seu núcleo é dado por:

$$\ker q\{v \in V \mid v + V' = 0 + V'\} = \{v \in V \mid v \in V'\} = V'. \qquad ■$$

Chamamos V/V' de **quociente de** V **por** V'.

Teorema 4.0.2 Seja $f : V \to W$ um mapa linear. Então existe um isomorfismo canônico

$$\phi : V/\ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f, \quad \phi(v + \ker f) = f(v).$$

Demonstração. Seja $i : \mathrm{im} f \to W$ o mapa linear de inclusão. Observe que f se decompõe como

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{im} f \arrow[d, "i"] \\ & W \end{tikzcd}$$

onde $\ker f = \ker \overline{f}$ e $\mathrm{im} f = \mathrm{im} \overline{f}$.

Afirmamos que existe um único mapa linear $\phi : V \ker f \to \mathrm{im} f$ tal que $\overline{f} = \phi \circ q$, onde $q : V \to \ker f$ é o mapa canônico do quociente. De fato, defina

$$\phi(v + V') := f(v).$$

Então ϕ está bem-definido, pois se $v + \ker f = v' + \ker f$, então $v - v' \in \ker f$, e portanto

$$\phi(v' + \ker f) = f(v') = f(v') + f(v - v') = f(v) = \phi(v + \ker f).$$

Também temos que ϕ é linear:

$$\begin{aligned} \phi\left((v + \ker f) + (v' + \ker f)\right) &= \phi\left((v + v') \ker f\right) = f(v + v') = f(v) + f(v') = \\ &= \phi\left(v + \ker f\right) + \phi\left(v' + \ker f\right) \\ \phi\left(c(v + \ker f)\right) &= \phi\left(cv + \ker f\right) = f(cv) = cf(v) = \\ &= c\phi\left(v + \ker f\right) \end{aligned}$$

Por fim, mostremos que f é um isomorfismo. Ele é sobrejetor por construção: se $w \in \mathrm{im} f$, então existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$, e portanto $\phi(v + \ker f) = w$. Por fim, ϕ é também injetor:

$$\phi\left(v + \ker f\right) = f(v) = 0 \quad \Longrightarrow \quad v \in \ker f \quad \Longrightarrow \quad v + \ker f = 0 + \ker f.$$

Isso conclui a demonstração. ∎

5. Bases e independência linear

Exercício 5.1 Seja S um conjunto, e $\Bbbk$ um corpo. Considere o conjunto

$$F(V) := \left\{ \sum a_s s \mid a_s \in \Bbbk, \quad s \in S, \quad \text{só finitos } a_s\text{'s não são zero.} \right\}$$

Mostre que

(a) $F(S)$ tem estrutura natural de espaço $\Bbbk$-linear, chamado o **espaço $\Bbbk$-linear livre** gerado por S:

$$\left(\sum a_s s\right) + \left(\sum b_s s\right) = \sum (a_s + b_s)s, \quad \mathbf{m}(r, \sum a_s s) = \sum r a_s s.$$

(b) Mostre que, para toda função $f : S \to T$, existe um único mapa linear $F(f) : F(S) \to F(T)$ que satisfaz $F(f)(s) = f(s)$.

(c) Mostre que todo mapa linear $\phi : F(S) \to F(T)$ é determinado por uma *matriz*: para cada $(s,t) \in S \times T$ atribuímos um elemento $\phi_{t,s} \in \Bbbk$, onde

$$\phi(s) = \sum_{t \in T} \phi_{t,s} t.$$

(d) Mostre que se V é espaço $\Bbbk$-linear, e $f : S \to V$ é qualquer função, então existe um único mapa linear $\phi : F(S) \to V$ tal que $\phi(s) = f(s)$.

(e) Mostre que para todo espaço $\Bbbk$-linear V, existe um mapa linear canônico

$$q_V : F(V) \longrightarrow V, \quad q(\sum a_v v) = \sum a_v v.$$

■

Um espaço vetorial V é dito **finitamente gerado** se existe um conjunto finito $S \subset V$ tal que o mapa canônico

$$q : F(S) \longrightarrow V$$

é sobrejetivo. Nesse caso, dizemos que S **gera** V.

■ **Exemplo 5.1** O conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gera $\mathbb{R}^2$. De fato, dado qualquer $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, podemos escrever

$$v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Portanto S gera $\mathbb{R}^2$. ■

■ **Exemplo 5.2** Se $S \subset V$ gera V, então qualquer $T \subset V$ tal que $S \subset T$ també gera V. Em particular, o conjunto

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gera $\mathbb{R}^2$. ■

■ **Exemplo 5.3** Se S é finito, $F(S)$ é finitamente gerado. Em particular, $V = \Bbbk^n$ é finitamente gerado. ■

■ **Exemplo 5.4** $\mathbb{R}[t]$ e $\mathbb{R}[[t]]$ são espaços $\mathbb{R}$-lineares que *não* são finitamente gerados. ■

Um conjunto $S \subset V$ é dito **linearmente independente** se o mapa canônico

$$q : F(S) \longrightarrow V$$

é injetivo. Ou seja, S é linearmente independente se $\sum a_s s = 0$ em V implica que $a_s = 0$ para todo $s \in S$. Um conjunto $S \subset V$ que não é linearmente independente é dito **linearmente dependente**.

■ **Exemplo 5.5** $S \subset \mathbb{R}^2$ do Exemplo 5.2 é linearmente independente, mas $T \subset \mathbb{R}^2$ não é linearmente dependente. ■

Definição 5.0.5 Uma **base** S para um espaço linear V é um subconjunto finito $S \subset V$ tal que o mapa natural $q : F(S) \to V$ é um isomorfismo.

A **dimensão** de um espaço linear finitamente gerado V é a cardinalidade de uma base de V.

Portanto se S é uma base de V, $S = \{v_1, ..., v_n\}$, então:

- $q : F(S) \to V$ sobrejetivo significa que, para todo $v \in V$, existem $r_1, ..., r_b \in \Bbbk$ tais que $v = \sum_{i=1}^n r_i v_i$;
- $q : F(S) \to V$ injetivo significa que, para todo $v \in V$, a decomposição $v = \sum_{i=1}^n r_i v_i$ é única.

Lema 6 Se $f : V \to W$ é um mapa linear, então:

i) f é injetor se e só se, para cada $S \subset V$ linearmente independente, $f(S) \subset W$ é linearmente independente;

ii) f é sobrejetor se e só se, para cada $S \subset V$ gerador, $f(S) \subset W$ é gerador;

iii) f é isomorfismo se e só se, para cada $S \subset V$ base, $f(S) \subset W$ é base.

Demonstração. i) Se f é injetor, então $f(v) = 0$ implica $v = 0$. Portanto se $S \subset V$ é linearmente independente, e para $s_1, \ldots, s_n \in S$ existem $c_1, \ldots, c_n \in \Bbbk$, tais que $\sum_1^n c_i f(s_i) = 0$, então $f(\sum_1^n c_i s_i) = 0$ implica $\sum_1^n c_i s_i = 0$. Mas como S é LI, segue que $c_i = 0$ para cada i. Portanto $f(S)$ é LI.

Reciprocamente, suponha que $f(S)$ é LI para cada S LI, e escolha $v \in V$. Se $v \neq 0$, e $S = \{v\} \subset V$ é LI, e portanto $f(S) = \{f(v)\}$ é LI; em particular, $f(v) \neq 0$.

ii) Se f é sobrejetor, para cada $w \in W$ existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$. Se $S \subset V$ é gerador, podemos expressar $v = \sum_1^n c_i s_i$, onde $c_i \in \Bbbk$ e $s_i \in S$; portanto $w = \sum_1^n c_i f(s_i)$ e portanto $f(S) \subset W$ é gerador.

iii) Seja S uma base de V. Então por i) temos que $f(S)$ é LI, e por ii) que é gerador. Logo $f(S)$ é base de W.

■

Lema 7 Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\Bbbk$, e $\mathscr{B}$ uma base de V. Então para toda função $f : \mathscr{B} \to W$, existe um único mapa linear $F : V \to W$, tal que $F|_{\mathscr{B}} = f$.

Demonstração. Seja $\mathscr{B} = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Uma função $f : \mathscr{B} \to W$ está completamente determinada pelos valores $w_1 := f(s_1), \ldots, w_n := f(s_n)$. Defina $F : V \to W$ da seguinte forma: dado $v \in V$, escrevemos $v = \sum_1^n c_i s_i$, e definimos

$$F(v) := \sum_1^n c_i w_i.$$

Como $\mathscr{B} = \{s_1, \ldots, s_n\}$ é uma base, a respresentação de v é única, e portanto F está bem-definida. Note também que F é linear, e estende f.

Resta mostrar que F é único. Pois se G fosse um outro mapa linear que estendesse f, teríamos que $H := F - G$ é um mapa linear, que manda cada cada s_i em zero; portanto

$$H(v) = H(\sum_1^n c_i s_i) = \sum_1^n c_i H(s_i) = 0.$$

Portanto $F = G$. ■

Teorema 5.0.3 Se V é finitamente gerado, então V possui uma base S, e toda base T de V tem $|S|$ elementos.

Demonstração. Seja V um espaço linear, e considere

$$\Omega \subset \mathscr{P}(V), \quad \Omega = \{S \mid S \text{ finito}, \ S \text{ gera } V\}$$

Se V é finitamente gerado, $\Omega \neq \varnothing$, e portanto

$$n := \min_{S \in \Omega} |S|$$

existe. Se $S \in \Omega$ tem n elementos, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, então S é uma base; pois do contrário haveria uma relação $\sum_1^n r_i v_i = 0$, onde nem todo r_i é zero. Se $r_i \neq 0$, então

$$v_i = -\sum_{j \neq i} \frac{r_j}{r_i} v_j,$$

em cujo caso $T := S \setminus \{v_i\}$ tem $(n-1)$ elementos e gera V – o que contradiz a escolha de S. Portanto um conjunto S que gera V com um número mínimo de elementos é automaticamente uma base.

Note que o argumento acima também mostra que, se $\mathscr{B}$ é base de V e tem n elementos, então todo subconjunto $T \subset V$ com pelo menos $(n+1)$ elementos *não* é uma base. Portanto quaisquer duas bases de V têm a mesma cardinalidade. ∎

Definição 5.0.6 A cardinalidade de uma base de um espaço $\Bbbk$-linear V é chamada de **dimensão** de V, e denotada $\dim_{\Bbbk} V$.

Doravante, todos nossos espaços vetoriais serão de dimensão finita, salvo menção do contrário.

Corolário 5.0.4 Se V e W espaços vetoriais sobre $\Bbbk$, e $f : V \xrightarrow{\sim} W$ é um isomorfismo, então $\dim_{\Bbbk} V = \dim_{\Bbbk} W$.

Demonstração. Imediato do item iii) do Lema 6. ∎

Proposição 5.0.5 Se $V' \subset V$ é um subespaço vetorial sobre $\Bbbk$, então toda base $\mathscr{B}'$ de V' pode ser completada a base $\mathscr{B}$ de V.

Demonstração. Considere o conjunto

$$\Omega \subset \mathscr{P}(V), \quad \Omega = \{S \mid S \text{ finito}, \ S \text{ gera } V, \ \mathscr{B}' \subset S\}$$

e note que $\Omega \neq \varnothing$ (já que $S \cup \mathscr{B}' \in \Omega$ se S gera V). Portanto

$$n := \min_{S \in \Omega} |S|$$

existe, e como na demonstração do Teorema 5.0.3, se $S \in \Omega$ tem n elementos, então S é uma base. ∎

Corolário 5.0.6 Se $V' \subset V$ é subespaço vetoriais sobre $\Bbbk$, então

$$\dim_{\Bbbk}(V/V') = \dim_{\Bbbk} V - \dim_{\Bbbk} V'.$$

Demonstração. Escolha base $\mathscr{B}'$ de V', e use a Proposição 5.0.5 para encontrar base $\mathscr{B}$ contendo $\mathscr{B}'$:

$$\mathscr{B} = \{s_1, \ldots, s_m\}, \quad \mathscr{B}' = \{s_1, \ldots, s_n\}, \quad n \leqslant m.$$

Considere o conjunto

$$S \subset V/V', \quad S := \{s_{n+1} + V', \ldots, s_m + V'\}.$$

Afirmamos que S é base de V/V'. Claramente, S é gerador; pois se $v + V' \in V/V'$, então $v = \sum_1^m c_i s_i$ para $c_1, \ldots, c_m \in \Bbbk$, e portanto

$$v + V' = \sum_{i=n+1}^{m} c_i (s_i + V').$$

Mostremos que S é também LI: se $c_{n+1}, \dots, c_m \in \Bbbk$ são tais que $0 = \sum_{i=n+1}^{m} c_i(s_i + V')$, então $\sum_{i=n+1}^{m} c_i s_i \in V'$; portanto como $\mathscr{B}'$ é base de V', existem $d_1, \dots, d_n \in \Bbbk$ tais que

$$\sum_{i=n+1}^{m} c_i s_i - \sum_{i=1}^{n} d_i s_i = 0.$$

Como $\mathscr{B}$ é base de V, e em particular LI, temos que

$$d_1 = d_2 = \ldots = d_n = c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = c_m = 0.$$

Portanto S é também LI, logo uma base. ■

Corolário 5.0.7 Se V e W espaços vetoriais sobre $\Bbbk$, e $f : V \to W$ é um mapa linear qualquer, então

$$\dim_{\Bbbk} V = \dim_{\Bbbk} \ker f + \dim_{\Bbbk} \operatorname{im} f.$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.0.2, sabemos que existe isomorfismo

$$\varphi : V/\ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} f.$$

Pelo Corolário 5.0.4, segue que $\dim_{\Bbbk}(V/\ker f) = \dim_{\Bbbk} \operatorname{im} f$, e pelo Corolário 5.0.6, segue que

$$\dim_{\Bbbk}(V) - \dim_{\Bbbk}(\ker f) = \dim_{\Bbbk} \operatorname{im} f.$$ ■

Corolário 5.0.8 As seguintes condicões sobre um mapa linear $f : V \to V$ são equivalentes:

i) f é isomorfismo;

ii) f é injetor;

iii) f é sobrejetor;

iv) para cada $w_0 \in V$, o sistema $f(v) = w_0$ tem uma única solucão.

NB Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\Bbbk$. Então, para todo subcorpo $\Bbbk' \subset \Bbbk$,

- V é também um espaço vetorial sobre o subcorpo $\Bbbk'$;
- $\Bbbk$ ele mesmo é um espaço vetorial sobre o $\Bbbk'$!

Note que mesmo que $\dim_{\Bbbk} V < \infty$, é perfeitamente possível que

$$\dim_{\Bbbk'} V = \infty, \quad \dim_{\Bbbk'} \Bbbk = \infty.$$

Por exemplo, tome $V = \mathbb{R}$, $\Bbbk = \mathbb{R}$, e $\Bbbk' = \mathbb{Q}$. Então $\dim_{\Bbbk} V = 1$, mas $\dim_{\Bbbk'} V = \infty$ e $\dim_{\Bbbk'} \Bbbk = \infty$.

Exercício 5.2 Mostre que $V = \mathbb{C}$ é um espaço $\mathbb{C}$-linear, e que $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$. ■

Exercício 5.3 Mais geralmente, mostre que V é um espaço $\Bbbk$-linear, e $\Bbbk' \subset \Bbbk$ é um subcorpo, então

$$\dim_{\Bbbk'} \Bbbk < \infty \quad \Longrightarrow \quad \dim_{\Bbbk'} V = (\dim_{\Bbbk} V)(\dim_{\Bbbk'} \Bbbk).$$

■ **Exemplo 5.6** Seja $V := \mathbb{R}[t]/t^{n+1}\mathbb{R}[t]$ o espaço vetorial de polinômios de grau até n com coeficientes reais. Uma base $\mathscr{B}_1$ de V é dada por

$$\mathscr{B}_1 = (1, t, t^2, ..., t^n).$$

Sejam $t_0, .., t_n \in \mathbb{R}$ $(n+1)$ números reais distintos, e forme os polinômios

$$p_i(t) := \frac{\prod_{j \neq i}(t - t_j)}{\prod_{j \neq i}(t_i - t_j)} \in V.$$

Afirmamos que

$$\mathscr{B}_2 = (p_0, p_1, p_2, ..., p_n)$$

é também uma base de V. De fato, basta mostrar que esses vetores são linearmente independentes. Suponha então que $a_0, .., a_n \in \mathbb{R}$ sejam tais que $\sum_0^n a_i p_i = 0$. Então, para todo $t \in \mathbb{R}$, devemos ter que $\sum_0^n a_i p_i(t) = 0$. Em particular, para cada $\leqslant j \leqslant n$,

$$\sum_0^n a_i p_i(t_j) = a_j = 0.$$

Portanto $a_i = 0$ para todo i. ■

6. Matrizes

Proposição 6.0.9 Seja $f : V \to W$ um mapa $\Bbbk$-linear. Então dadas bases $\mathscr{B}_V = \{e_1, ..., e_m\}$ de V e $\mathscr{B}_W = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ de W, existe uma única matriz

$$[f]_{\mathscr{B}_W}^{\mathscr{B}_V} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

com a seguinte propriedade: se $v \in V$ é representado pela combinação linear $v = \sum_{j=1}^m c_j e_j$, então $f(v)$ é representado pela combinação linear $f(v) = \sum_{i=1}^n d_i \varepsilon_i$, onde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

Dizemos que $[f]_{\mathscr{B}_W}^{\mathscr{B}_V}$ é a **matriz que expressa** f nas bases $\mathscr{B}_V$ e $\mathscr{B}_W$.

Demonstração. Expresse cada $f(e_j)$ na base $\mathscr{B}_W$: $f(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \varepsilon_i$. Dado $v \in V$, $v = \sum_{j=1}^m c_j e_j$, temos que

$$f(v) = f\left(\sum_{j=1}^m c_j e_j\right) = \sum_{j=1}^m c_j f(e_j) = \sum_{j=1}^m c_j \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \varepsilon_i\right) = \sum_{i=1}^n d_i \varepsilon_i,$$

onde $d_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} c_j$ como indica a matriz acima. ■

Proposição 6.0.10 Sejam $f : V \to W$ e $g : W \to Z$ mapas $\Bbbk$-lineares. Então dadas bases $\mathscr{B}_V$ de V, $\mathscr{B}_W$ de W, e $\mathscr{B}_Z$ de Z, temos que

$$[g \circ f]_{\mathscr{B}_Z}^{\mathscr{B}_V} = [g]_{\mathscr{B}_Z}^{\mathscr{B}_W} [f]_{\mathscr{B}_W}^{\mathscr{B}_V}.$$

Demonstração. Escrevamos

$$\mathscr{B}_V = \{e_1, ..., e_m\}, \quad \mathscr{B}_W = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}, \quad \mathscr{B}_Z = \{\phi_1, ..., \phi_r\}$$

Sejam

$$[g]_{\mathscr{B}_Z}^{\mathscr{B}_W} = (b_{ij})_{i,j}, \quad [f]_{\mathscr{B}_W}^{\mathscr{B}_V} = (a_{ij})_{i,j}.$$

Por definição de matriz associada, isso significa que

$$f(e_j) = \sum_i a_{ij}\varepsilon_i, \quad g(\varepsilon_j) = \sum_i b_{ij}\phi_i.$$

Portanto

$$\begin{aligned}(g\circ f)(e_j) &= g\left(\sum_i a_{ij}\varepsilon_i\right) = \sum_i a_{ij} g(\varepsilon_i) = \sum_{i,k} a_{ij} b_{ki}\phi_k = \\ &= \sum_{i,k} b_{ki} a_{ij}\phi_k\end{aligned}$$

A demonstração é concluída ao observarmos que $\sum_i b_{ki}a_{ij}$ é o coeficiente na k-ésima linha e j-ésima coluna de $[g]_{\mathscr{B}_Z}^{\mathscr{B}_W}[f]_{\mathscr{B}_W}^{\mathscr{B}_V}$:

$$[g]_{\mathscr{B}_Z}^{\mathscr{B}_W}[f]_{\mathscr{B}_W}^{\mathscr{B}_V} = (\sum_i b_{ki}a_{ij})_{k,j}.$$

■

■ **Exemplo 6.1** Considere o mapa identidade $\mathrm{id}_V : V \to V$, $\mathrm{id}_V(v) = v$. Seja $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_m\}$ uma base qualquer de V. Então

$$[\mathrm{id}_V]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

■

■ **Exemplo 6.2** Considere as bases

$$\mathscr{B}_1 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \right\}, \quad \mathscr{B}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_2} \right\}.$$

Note que

$$\begin{cases} e_1 = \varepsilon_1 \\ e_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De modo análogo,

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 \\ \varepsilon_2 = e_1 + e_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que isso está de acordo com as Proposições 6.0.9 e 6.0.10:

$$\mathbf{1} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_1} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_1} \quad \Longrightarrow \quad [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_1} = \left([\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\mathscr{B}_1}^{\mathscr{B}_2}\right)^{-1}.$$

■

Proposição 6.0.11 Seja $f : V \to W$ um mapa $\Bbbk$-linear. Então dadas bases $\mathscr{B}_V$, $\mathscr{B}'_V$ de V e $\mathscr{B}_W$ e $\mathscr{B}'_W$ de W, temos que

$$[f]^{\mathscr{B}'_V}_{\mathscr{B}_W} = [f]^{\mathscr{B}_V}_{\mathscr{B}_W}[\mathrm{id}_V]^{\mathscr{B}'_V}_{\mathscr{B}_V}, \quad [f]^{\mathscr{B}_V}_{\mathscr{B}'_W} = [\mathrm{id}_W]^{\mathscr{B}_W}_{\mathscr{B}'_W}[f]^{\mathscr{B}_V}_{\mathscr{B}_W}$$

Demonstração. Ambas igualdades seguem da Proposição 6.0.10: a primeira identidade tomando $W = Z$ e $g = \mathrm{id}_W$, e a segunda tomando $V = W$ e $f = \mathrm{id}_V$. ■

■ **Exemplo 6.3** Considere as bases $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ de $V := \mathbb{R}^2$ do Exemplo 6.2. Considere o mapa linear $f : V \to V$ que, expresso na base $\mathscr{B}_1$, corresponde à matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Explicitamente, f é determinado pelas relações

$$f(e_1) = 2e_1 + 4e_2, \quad f(e_2) = 3e_1 + 5e_2.$$

Usando as relações entre e's e ε's, temos que

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1) &= f(e_1) = 2e_1 + 4e_2 = 2\varepsilon_1 + 4(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \\ &= -2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_2) &= f(e_1 + e_2) = (2e_1 + 4e_2) + (3e_1 + 5e_2) = 5e_1 + 9e_2 = 5\varepsilon_1 + 9(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \\ &= -4\varepsilon_1 + 9\varepsilon_2 \end{aligned}$$

Portanto f é expresso na base $\mathscr{B}_2$ pela matriz

$$[f]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}_2} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Como prevê a Proposição 6.0.11,

$$[f]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}_2} = [\mathrm{id}_V]^{\mathscr{B}_1}_{\mathscr{B}_2}[f]^{\mathscr{B}_1}_{\mathscr{B}_1}[\mathrm{id}_V]^{\mathscr{B}_2}_{\mathscr{B}_1}$$

De fato,

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

7. Espaços duais. Mapas adjuntos

Se V é um espaço $\Bbbk$-linear, chamamos de espaço **dual** a V o espaço $\Bbbk$-linear

$$V^* := \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk).$$

NB Embora a notação não deixe isso explícito, o espaço dual depende do corpo subjacente $\Bbbk$. Talvez $V^*_{\Bbbk}$ fosse mais adequado, mas preferimos seguir a literatura e manter $\Bbbk$ implícito.

Lema 8 — Bases duais. Seja V um espaço $\Bbbk$-linear, e $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ uma base de V. Então $\mathscr{B}^* = \{e^1, \ldots, e^m\}$ é uma base de V^*, onde $e^i \in V^*$ é determinado pelas relações:

$$e^i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Demonstração. Primeiramente observemos que as relações acima de fato determinam únicos mapas lineares $e^i : V \to \Bbbk$, como segue do Lema 7. Mostremos que $\mathscr{B}^*$ é gerador: se $\xi \in V^*$, considere

$$\eta := \sum_{j=1}^{m} \xi(e_j) e^j \ \in \ V^*.$$

Então ξ e η coincidem nos elementos da base $\mathscr{B}$, e portanto, pela unicidade do Lema 7, temos que $\xi = \eta$. Portanto $\mathscr{B}^*$ é gerador.

Mostremos, por outro lado, que $\mathscr{B}^*$ é linearmente independente. Se $c_1, \ldots, c_m \in \Bbbk$ sao tais que $0 = \sum_1^m c_i e^i$, então para todo $1 \leqslant j \leqslant m$, temos que

$$0 = \sum_{i=1}^{m} c_i e^i(e_j) = c_j.$$

Logo $0 = \sum_1^m c_i e^i$ implica $c_i = 0$ para todo i. Portanto $\mathscr{B}^*$ é uma base, dita a **base dual** a $\mathscr{B}$. ■

Corolário 7.0.12 $\dim_{\Bbbk} V = \dim_{\Bbbk} V^*$.

Proposição 7.0.13 Se $f : V \to W$ é um mapa linear, então

$$f^* : W^* \longrightarrow V^*, \quad (f^*(\eta))(v) := \eta(f(v)), \quad v \in V,\ \eta \in W^*$$

é um mapa linear, dito o **mapa adjunto** a f. Além disso, a regra

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W) \xrightarrow{*} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W^{\cdot}V^*), \quad f \mapsto f^*$$

a) é linear: $(f+g)^* = f^* + g^*$ e $(cf)^* = cf^*$ para todos $f,g \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W), c \in \Bbbk$;

b) $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$;

c) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, para todos $f \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W)$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W,Z)$.

Demonstração. O mapa adjunto a f está certamente bem-definido, e é linear pois para todos $\xi, \eta \in W^*$, $v \in V$ e $c \in \Bbbk$, temos

$$\begin{aligned} f^*(\xi+\eta)(v) &= (\xi+\eta)(f(v)) = \xi(f(v)) + \eta(f(v)) = f^*(\xi)(v) + f^*(\eta)(v), \\ f^*(c\xi)(v) &= c\xi(f(v)) = cf^*(\xi)(v). \end{aligned}$$

Mostremos que $f \mapsto f^*$ é linear:

$$\begin{aligned} (f+g)^*(\xi)(v) &= \xi((f+g)v)) = \xi(f(v)+g(v)) = \xi(f(v)) + \xi(g(v)) = f^*(\xi)(v) + g^*(\xi)(v) \\ (cf)^*(\xi)(v) &= \xi(cf(v)) = c\xi(f(v)) = cf^*(\xi)(v), \end{aligned}$$

portanto a) vale. Note também que $(\mathrm{id}_V)^*(\xi)(v) = \xi(v)$ para todos $\xi \in V^*$ e $v \in V$ implica que $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$, portanto também vale b). Por fim, também c) vale, já que, para todo $g : W \to Z$ linear e $\zeta \in Z^*$, temos:

$$\begin{aligned} (g \circ f)^*(\zeta)(v) &= (\zeta)((g \circ f)(v)) = (\zeta)(g(f(v))) = g^*(\zeta)(f(v)) = \\ &= (f^* \circ g^*)(\zeta)(v). \end{aligned}$$

■

Proposição 7.0.14 Seja $f : V \to W$ um mapa $\Bbbk$-linear, e $\mathscr{B}_V, \mathscr{B}_W$ bases de V e W, respectivamente. Sejam $\mathscr{B}_V^*$ e $\mathscr{B}_W^*$ as bases duais do Lema 8. Então

$$[f^*]_{\mathscr{B}_V^*}^{\mathscr{B}_W^*} = \left([f]_{\mathscr{B}_W}^{\mathscr{B}_V}\right)^{\top},$$

onde $A^{\top}$ denota a transposta da matriz A.

Demonstração. Primeiramente note que

$$f^*(\varepsilon^k)(e_i) = \varepsilon^k(f(e_i)) = \varepsilon^k(\sum_j a_{ij}\varepsilon_j) = a_{ik}.$$

Portanto, pelo Lema 7, temos que

$$f^*(\varepsilon^k) = \sum_i a_{ik} e^i,$$

já que

$$f^*(\varepsilon^k)(e_i) = \sum_i a_{ik} e^i(e_i);$$

portanto,

$$[f^*]_{\mathscr{B}_V^*}^{\mathscr{B}_W^*} = \left([f]_{\mathscr{B}_W}^{\mathscr{B}_V}\right)^{\top}.$$

■

8. Álgebra Multilinear

Sejam $V_1,\ldots,V_n,W$ espaços vetoriais. Uma função

$$F : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

e dita **multilinear** se quando fixamos $(p-1)$ variáveis $v_j \in V_j$, $j \neq i$, a função resultante

$$F(v_1,\ldots,v_{i-1},\cdot,v_{i+1},..,v_p) : V \longrightarrow W$$

é linear.

■ **Exemplo 8.1** Seja $A \in M_{mm}(\mathbb{R})$, e defina

$$F_A : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F_A(x,y) := x^\top Ay.$$

Então F é multilinear. Por exemplo, se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

então

$$F_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 - x_2y_1.$$

■

■ **Exemplo 8.2** Considere $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2y_2 - x_2^2y_1.$$

Então, para cada $x \in \mathbb{R}^2$, $F(x,\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é linear; porém $F(\cdot,x)$ não é linear. Portanto F não é multilinear. ■

Exercício 8.1 Mostre que se $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ é multilinear, e $g : W \to Z$ é linear, então $g \circ f : V_1 \times \cdots \times V_n \to Z$ é multilinear. ■

■ **Exemplo 8.3** Sejam $V_1, \ldots, V_n$ espaços vetoriais, e seja $F(V_1 \times \cdots \times V_n)$ o espaço vetorial livre gerado por $V_1 \times \cdots \times V_n$ (ver o Exercício 5.1). Então o mapa natural de conjuntos

$$i : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow F(V_1 \times \cdots \times V_n), \quad i(v_1, \ldots, v_n) = (v_1, \ldots, v_n)$$

é multilinear. ■

Proposição 8.0.15 Sejam $V_1, \ldots, V_n, W$ espaçoes $\Bbbk$-lineares.

a) Existe um espaço vetorial $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ e um mapa multilinear injetor

$$\mathbf{t} : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \quad \mathbf{t}((v_1, .., v_n) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_n,$$

com a propriedade de que, para todo mapa multilinear

$$f : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W,$$

existe um único mapa *linear* $\widetilde{f} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to W$ tal que $f = \widetilde{f} \circ \mathbf{t}$:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \cdots \times V_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathbf{t}"'] & W \\
V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

b) Quaisquer espaços vetoriais Z, munidos de mapas multilineares $\mathbf{t}_Z : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow Z$ por que fatoram unicamente mapas multilineares $f : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$ sao isomorfos, por um isomorfismo canônico $\psi : Z \xrightarrow{\sim} Z'$ tal que $\mathbf{t}_{Z'} \circ \psi = \mathbf{t}_Z$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dd, "\psi"'] \arrow[drr, "f_Z"] & & \\
& V_1 \times \cdots \times V_n \arrow[ul, "\mathbf{t}"'] \arrow[dl, "\mathbf{t}'"] \arrow[r] & W \\
Z' \arrow[urr, "f_{Z'}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Seja $F(V_1 \times \cdots \times V_n)$ o espaço vetorial livre gerado por $V_1 \times \cdots \times V_n$, e seja $i : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow F(V_1 \times \cdots \times V_n)$ o mapa multilinear natural do Exemplo 8.3. Então observe que toda função $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ induz um mapa linear canônico

$$\widehat{f} : F(V_1 \times \cdots \times V_n) \longrightarrow W, \quad \widehat{f}\left(\sum_i a_i(v_{1,i}, \ldots, v_{n,i})\right) := \sum_i a_i f(v_{1,i}, \ldots, v_{n,i}).$$

Mais ainda, note que as seguintes afirmações sao equivalentes:

i) f é multilinear;

ii) O espaço vetorial $K \subset F(V_1 \times \cdots \times V_n)$ gerado por vetores das duas formas seguintes:

  a) $(v_1, .., cv_i, \ldots, v_n) - c(v_1, .., v_i, \ldots, v_n)$, $v_j \in V_j$, $c \in \Bbbk$, $1 \leqslant i \leqslant n$;

  b) $(v_1, .., v_i' + v_i'', \ldots, v_n) - (v_1, .., v_i', \ldots, v_n) - (v_1, .., v_i'', \ldots, v_n)$, $v_j \in V_j$, $v_i' \in V_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

está no núcleo de $\widehat{f}$.

Defina $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n := \widetilde{V}/K$, e considere a projeção canônica

$$q : F(V_1 \times \cdots \times V_n) \to F(V_1 \times \cdots \times V_n)/K = V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$$

Então a composição

$$\mathbf{t} : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, \quad \mathbf{t}(v_1, .., v_n) := v_1 \otimes \cdots \otimes v_n := (v_1, .., v_n) + K$$

do mapa multilinear $V_1 \times \cdots \times V_n \hookrightarrow F(V_1 \times \cdots \times V_n)$ com a projeção canônica em $F(V_1 \times \cdots \times V_n)/K$ é linear pelo Exemplo 8.1, e injetora já que a imagem de i encontra K só em zero. Além disso, todo mapa multilinear $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ induz um mapa $\widetilde{f} : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to W$ por quociente $\widehat{f} = \widetilde{f} \circ q$:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \cdots \times V_n \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "f"] & \\
F(V_1 \times \cdots \times V_n) \arrow[r, "\widehat{f}"] \arrow[d, "q"'] & W \\
V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \arrow[ur, "\widetilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

o que prova a). Para provar b), suponha que $Z \xleftarrow{\mathbf{t}} V_1 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\mathbf{t}'} Z$ sejam mapas multilineares, com a propriedade de que todo mapa multilinear $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to W$ tem fatorações únicas

$$f = f_Z \circ \mathbf{t} = f_{Z'} \circ \mathbf{t}'.$$

Então tomando $W = Z'$ e $f = \mathbf{t}'$, concluímos que existe uma única fatoração

$$\mathbf{t}' = (\mathbf{t}')_Z \circ \mathbf{t}, \quad (\mathbf{t}')_Z : Z \longrightarrow Z'.$$

tomando agora $W = Z$ e $f = \mathbf{t}$, concluímos que existe uma única fatoração

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{Z'} \circ \mathbf{t}', \quad \mathbf{t}_{Z'} : Z' \longrightarrow Z.$$

Portanto

$$\mathbf{t}' = (\mathbf{t}')_Z \circ \mathbf{t}_{Z'} \circ \mathbf{t}', \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}_{Z'} \circ (\mathbf{t}')_Z \circ \mathbf{t}$$

e como $\mathbf{t}$ e $\mathbf{t}'$ sao injetoras, segue que $\mathrm{id}_{Z'} = (\mathbf{t}')_Z \circ \mathbf{t}_{Z'}$ e que $\mathrm{id}_Z = \mathbf{t}_{Z'} \circ (\mathbf{t}')_Z$; portanto $\psi : (\mathbf{t}')_Z$ e o isomorfismo canônico do enunciado. ■

Lema 9 Se $f : V \to W$ e um mapa linear, então para cada $p \geqslant 0$, há mapas lineares induzidos:

$$\otimes^p f : \otimes^p V \longrightarrow \otimes^p W, \quad \otimes^p f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) := f(v_1) \otimes \cdots \otimes f(v_p).$$

Para cada mapa multilinear $f : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{p} \to W$, e permutação em p letras $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, denote por f_σ o mapa multilinear

$$f_\sigma : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{p} \to W, \quad f_\sigma(v_{\sigma^{-1}(1)}, .., v_{\sigma^{-1}(p)}),$$

de modo que $f_{\sigma_1 \sigma_2} = (f_{\sigma_1})_{\sigma_2}$. f é dito **simétrico** se $f_\sigma = f$ para cada $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, e **antisimétrico** se $f_\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma) f$.

■ **Exemplo 8.4** A função F_A do Exemplo 8.1 é simétrica se e só se $A^\top = A$, e antisimétrica se e só se $A^\top = -A$. ■

Proposição 8.0.16 Existe uma decomposição canônica $\otimes^p = \wedge^p V \oplus \odot^p V$, com a propriedade de que um mapa multilinear $f : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{p} \to W$ é:

a) simétrico se e só se $\wedge^p V$ está no núcleo de $\widetilde{f} : \otimes^p V \to W$;

b) antisimétrico se e só se $\odot^p V$ está no núcleo de $\widetilde{f} : \otimes^p V \to W$.

Demonstração. Defina mapas lineares $\mathrm{Sym}, \mathrm{Alt} : \otimes^p V \longrightarrow \otimes^p V$, unicamente determinados por

$$\mathrm{Sym}(v_1 \otimes \cdots v_p) := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots v_{\sigma(p)}, \quad \mathrm{Alt}(v_1 \otimes \cdots v_p) := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots v_{\sigma(p)}$$

a) $f_\sigma = f$ para todo σ se e só se $\widetilde{f} \circ \mathrm{Sym} = \widetilde{f}$;

b) $f_\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma) f$ para todo σ se e só se $\widetilde{f} \circ \mathrm{Alt} = \widetilde{f}$.

Como

$$\mathrm{Sym}^2 = \mathrm{Sym}, \quad \mathrm{SymAlt} = 0 = \mathrm{AltSym}, \quad \mathrm{Alt}^2 = \mathrm{Alt},$$

se definirmos

$$\wedge^p V = \ker \mathrm{Sym}, \quad \odot^p V = \ker \mathrm{Alt}$$

então $\otimes^p = \wedge^p V \oplus \odot^p V$, e o resultado segue. ■

Denotamos por

$$e_{i_1} \odot \cdots \odot e_{i_p} := \mathrm{Sym}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) \in \odot^p V, \quad e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} := \mathrm{Alt}(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) \in \wedge^p V.$$

Note que, para cada permutação $\sigma \in \mathfrak{S}_p$,

$$e_{\sigma(i_1)} \odot \cdots \odot e_{\sigma(i_p)} = e_{i_1} \odot \cdots \odot e_{i_p}, \quad e_{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(i_p)} = \mathrm{sgn}(\sigma) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}.$$

Exercício 8.2 Se V tem base $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_m\}$, mostre que $\odot^p V$ e $\wedge^p V$ têm bases

$$\odot^p \mathscr{B} = \{e_{i_1} \odot \cdots \odot e_{i_p} \mid 1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_p \leqslant m\}$$
$$\wedge^p \mathscr{B} = \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \mid 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant m\}$$

Conclua que

$$\dim \odot^p V = \binom{m+p-1}{p} = \frac{(m+p-1)!}{(m-1)!p!}, \quad \dim \wedge^p V = \binom{m}{p} = \frac{m!}{(m-p)!p!}$$

■

Determinante

Observe que, para todo espaço vetorial V de dimensao m, temos que $\wedge^m V$ tem dimensao 1. Se $f : V \to V$ é um mapa linear, então $\wedge^m f : \wedge^m V \to \wedge^m V$ é linear, e portanto é multiplicação por um número: o **determinante de** f:

$$\wedge^m f = \det(f)\mathrm{id}_{\wedge^m V}.$$

Mais concretamente, se $\mathscr{B} = \{e_1,.,e_m\}$ é uma base de V, então

$$\wedge^m f(e_1 \wedge \cdots \wedge e_m) = f(e_1) \wedge \cdots \wedge f(e_m) = \det(f) e_1 \wedge \cdots \wedge e_m.$$

NB Por convenção, se V e o espaço vetorial trivial, o determinante do único mapa linear $f : V \to V$ é 1.

Lema 10 Para um conjunto de vetores $v_1,....,v_p \in V$, as seguintes afirmações sao equivalentes:

i) $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p \neq 0$;

ii) $\{v_1,..,v_p\} \subset V$ são linearmente independentes;

iii) $\dim\langle v_1,..,v_p\rangle = p$.

Lema 11 Se $f : V \to V$ e $g : V \to V$ são mapas lineares, então

$$\det(g \circ f) = \det(g)\det(f).$$

Demonstração. Por definição,

$$\begin{aligned}
(g\circ f)_*(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m) &= (g\circ f)(v_1) \wedge (g\circ f)(v_2) \wedge \cdots \wedge (g\circ f)(v_m)\\
&= (g(f(v_1))) \wedge (g(f(v_2)) \wedge \cdots \wedge (g(f(v_m))\\
&= g_*(f(v_1) \wedge f(v_2) \wedge \cdots \wedge f(v_m))\\
&= \det(g) f_*(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m)\\
&= \det(g)\det(f) v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m.
\end{aligned}$$

■

Teorema 8.0.17 Se uma matriz A representa um mapa linear $f : V \to V$ na base $\mathscr{B}$,

$$A := [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

então

$$\det(f) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)},\ldots,a_{m\sigma(m)}.$$

Demonstração. Notemos que

$$(\sum_i a_{i1}e_i) \wedge \cdots \wedge (\sum_i a_{im}e_i) = \det(f) e_1 \wedge \cdots \wedge e_m.$$

mostra que $\det(f) = \Delta(a_{ij})$, onde Δ e um polinômio homogêneo de grau m nas entradas de A. No que segue vamos deduzir fórmula para det como um polinômio $\det \in \mathbb{k}[a_{ij}]$ nos coeficientes de A.

A primeira observação é que uma escolha de base $\mathscr{B}$ induz o diagrama comutativo de mapas lineares

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(V,V) \arrow[r, "\det"] \arrow[d, "\phi_{\mathscr{B}}"'] & \mathbb{k} \\ \underbrace{V \times \cdots \times V}_{m} \arrow[r, "\mathrm{pr}_\wedge \circ \mathbf{t}"'] & \wedge^m \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

onde $\phi_{\mathscr{B}}(f) = (f(e_1), \ldots, f(e_m))$ e onde ψ é o único mapa linear linear que satisfaz $\psi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_m) = 1$. Podemos assim identificar det com o mapa multilinear antisimétrico $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{m} \to \mathbb{k}$, e o espaço de tais mapas tem dimensao 1, e é gerado por

$$\Delta(v_1, \ldots, v_m) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\sigma) v_{1\sigma(1)}, \ldots, v_{m\sigma(m)}, \quad v_i = \sum_j v_{ij} e_j.$$

Como $\Delta(e_1, \ldots, e_m) = 1$ e $\det(\mathrm{id}) = 1$, segue que $\det(f) = \Delta(f(e_1), \ldots, f(e_m))$. ■

Corolário 8.0.18 Para todo mapa linear $f : V \to V$, temos que $\det(f) = \det(f^*)$.

Demonstração. Se f é representado numa base $\mathscr{B}$ de V por uma matriz A, então f^* é representado na base dual $\mathscr{B}^*$ de V^* pela uma matriz transposta $A^\top$. Portanto pelo Teorema 8.0.17,

$$\det(f^*) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1}, \ldots, a_{\sigma(m)m}.$$

Como a soma é sobre todas as permutações, podemos reescrever essa soma como

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{m\sigma(m)} = \det(f).$$ ■

NB Note que, em consequência do Corolário 8.0.18, podemos pensar o determinante $\det(f)$ como uma forma multilinear em linhas ou em colunas de uma matriz que representa f.

■ **Exemplo 8.5** Se V tem dimensao 2,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e então

$$f_*(e_1 \wedge e_2) = (a_{11}e_1 + a_{21}e_2) \wedge (a_{12}e_1 + a_{22}e_2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) e_1 \wedge e_2$$

Portanto

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

■

Proposição 8.0.19 Se $\mathrm{Adj}(A) = ((-1)^{i+j}\det(A_{ij}))^\top$, então

$$\mathrm{Adj}(A)A = \det(A)\mathbf{I} = A\mathrm{Adj}(A).$$

Demonstração. Para cada i, j, considere os subconjuntos

$$\mathfrak{S}_{i,j} \subset \mathfrak{S}_m, \quad \mathfrak{S}_{i,j} = \{\sigma \mid \sigma(j) = i\}.$$

Cada tal subconjunto pode ser identificado com o conjunto de bijeções $\tau : \widehat{j} \xrightarrow{\sim} \widehat{i}$, onde $\widehat{i} := \{1,.,i-1,i+1,...,m\}$. Identificamos $\mathfrak{S}_{m,m}$ com $\mathfrak{S}_{m-1}$ da maneira óbvia. Se fixarmos transposições $\tau_{ij} = (ij)$, então $\mathfrak{S}_{i,j} = \tau_{im}\mathfrak{S}_{m-1}\tau_{mj}$, e para todo k,

$$\mathfrak{S}_m = \cup_{i=1}^m \mathfrak{S}_{i,k} = \cup_{i=1}^m \mathfrak{S}_{k,i}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{$\bigstar$}$$

Mais ao ponto, observe que

$$\det(A_{ij}) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{m-1}} \mathrm{sgn}(\tau) a_{\tau_{im}\tau\tau_{mj}(1)1} \cdots \widehat{a_{\tau_{im}\tau\tau_{mj}(j)j}} \cdots a_{\tau_{im}\tau\tau_{mj}(m)m},$$

e que

$$\mathrm{sgn}(\tau_{im}\tau\tau_{mj}) = \mathrm{sgn}(\tau_{im})\mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\tau_{mj}) = (-1)^{m-i}\mathrm{sgn}(\tau)(-1)^{m-j} = (-1)^{i+j}\mathrm{sgn}(\tau)$$

Portanto de

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(m)m}$$

a primeira igualdade em ($\bigstar$) implica que

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{i=1}^m \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{ij}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(j)j} \cdots a_{\sigma(m)m} \\
&= \sum_{i=1}^m a_{ij} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{ij}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots \widehat{a_{\sigma(j)j}} \cdots a_{\sigma(m)m} \\
&= \sum_{i=1}^m a_{ij} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{m-1}} \mathrm{sgn}(\tau_{im}\tau\tau_{mj}) a_{\tau_{im}\tau\tau_{mj}(1)1} \cdots \widehat{a_{\tau_{im}\tau\tau_{mj}(j)j}} \cdots a_{\tau_{im}\tau\tau_{mj}(m)m} \\
&= \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{m-1}} \mathrm{sgn}(\tau) a_{\tau_{im}\tau\tau_{mj}(1)1} \cdots \widehat{a_{\tau_{im}\tau\tau_{mj}(j)j}} \cdots a_{\tau_{im}\tau\tau_{mj}(m)m} \\
&= \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})
\end{aligned}$$

e a segunda igualdade em ($\bigstar$) fornece, por um raciocinio análogo,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

Isso demonstra que as diagonais principais das matrizes $\mathrm{Adj}(A)A$, $A\mathrm{Adj}(A)$ e $\det(A)\mathbf{I}$ coincidem, e isso implica que os demais coeficientes coincidem pelo seguinte argumento: se para $1 \leqslant i < j \leqslant m$ denotamos por B_{ij} a matriz obtida de A ao substituir a j-ésima coluna de A pela i-ésima coluna, então $B_{ii} = A$ e $\det(B_{ij}) = 0$ se $i \neq j$. Por outro lado, por cálculo direto,

$$\mathrm{Adj}(A)A = ((-1)^{i+j}\det B_{ij}).$$

Portanto $\mathrm{Adj}(A)A = \det(A)\mathbf{I}$. De maneira análoga, denote por C_{ij} a matriz obtida de A ao substituir a j-ésima linha de A pela i-ésima linha, então

$$A\mathrm{Adj}(A) = (\det C_{ij}),$$

e portanto $A\mathrm{Adj}(A) = \det(A)\mathbf{I}$. ■

Exercício 8.3 Para uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

calcule $\det(A)$ pela fórmula do Teorema 8.0.17 e pelas duas fórmulas da Proposição 8.0.19. ■

Corolário 8.0.20 A e invertível se e só se $\det(A) \neq 0$, em cujo caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Adj}(A).$$

Podemos reforçar o Corolário 5.0.8 como segue:

Corolário 8.0.21 As seguintes condicões sobre um mapa linear $f : V \to V$ são equivalentes:

i) f é isomorfismo;

ii) f é injetor;

iii) f é sobrejetor;

iv) $\det(f) \neq 0$;

v) para cada $w_0 \in V$, o sistema $f(v) = w_0$ tem uma única solucão.

Corolário 8.0.22 — Regra de Cramer. Se A e uma matriz quadrada invertível, a única solução do sistema linear $Ax = y$ e dada por $x = \frac{1}{\det A} \mathrm{Adj}(A) y$.