Combinamos los productos de las funciones conectadas por las flechas de acuerdo con el signo de la operación que está encima de las flechas, para obtener

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Compare esto con el resultado del ejemplo 3. ■

EJEMPLO 8 Evalúe

$$\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx.$$

Solución Con $f(x) = x^3$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$, listamos

$f(x)$ y sus derivadas		$g(x)$ y sus integrales
x^3	$(+)$	$\operatorname{sen} x$
$3x^2$	$(-)$	$-\cos x$
$6x$	$(+)$	$-\operatorname{sen} x$
6	$(-)$	$\cos x$
0		$\operatorname{sen} x$

Nuevamente combinamos los productos de las funciones conectadas por las flechas de acuerdo con los signos de operación que están encima de las flechas, para obtener

$$\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + C. \quad ■$$

Los ejercicios adicionales, al final de este capítulo, muestran cómo la integración tabular puede utilizarse cuando ninguna de las dos funciones, f y g, puede derivarse de manera repetida para convertirse en cero.

Ejercicios 8.1

Integración por partes

Mediante integración por partes, evalúe las integrales de los ejercicios 1 a 24.

1. $\int x \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, dx$

2. $\int \theta \cos \pi\theta \, d\theta$

3. $\int t^2 \cos t \, dt$

4. $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

5. $\int_1^2 x \ln x \, dx$

6. $\int_1^e x^3 \ln x \, dx$

7. $\int xe^x \, dx$

8. $\int xe^{3x} \, dx$

9. $\int x^2 e^{-x} \, dx$

10. $\int (x^2 - 2x + 1)\, e^{2x} \, dx$

11. $\int \tan^{-1} y \, dy$

12. $\int \operatorname{sen}^{-1} y \, dy$

13. $\int x \sec^2 x \, dx$

14. $\int 4x \sec^2 2x \, dx$

15. $\int x^3 e^x \, dx$

16. $\int p^4 e^{-p} \, dp$

17. $\int (x^2 - 5x) e^x \, dx$

18. $\int (r^2 + r + 1) e^r \, dr$

19. $\int x^5 e^x \, dx$

20. $\int t^2 e^{4t} \, dt$

21. $\int e^{\theta} \operatorname{sen} \theta \, d\theta$

22. $\int e^{-y} \cos y \, dy$

23. $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$

24. $\int e^{-2x} \operatorname{sen} 2x \, dx$

Uso de la sustitución

Evalúe las integrales en los ejercicios 25 a 30; para ello, use una sustitución antes de la integración por partes.

25. $\int e^{\sqrt{3s+9}} \, ds$

26. $\int_0^1 x\sqrt{1 - x} \, dx$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} x \tan^2 x\, dx$

28. $\displaystyle\int \ln (x + x^2)\, dx$

29. $\displaystyle\int \operatorname{sen} (\ln x)\, dx$

30. $\displaystyle\int z(\ln z)^2\, dz$

Evaluación de integrales

Evalúe las integrales en los ejercicios 31 a 50. Algunas integrales no requieren de integración por partes.

31. $\displaystyle\int x \sec x^2\, dx$

32. $\displaystyle 3\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

33. $\displaystyle\int x (\ln x)^2\, dx$

34. $\displaystyle\int \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

36. $\displaystyle 3\int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx$

37. $\displaystyle\int x^3 e^{x^4}\, dx$

38. $\displaystyle\int x^5 e^{x^3}\, dx$

39. $\displaystyle\int x^3 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

40. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x^3\, dx$

41. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x\, dx$

42. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x \cos 4x\, dx$

43. $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} e^x\, dx$

44. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

45. $\displaystyle\int \cos \sqrt{x}\, dx$

46. $\displaystyle\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx$

47. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \theta^2 \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta$

48. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^3 \cos 2x\, dx$

49. $\displaystyle\int_{2/\sqrt{3}}^{2} t \sec^{-1} t\, dt$

50. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x \operatorname{sen}^{-1} (x^2)\, dx$

Teoría y ejemplos

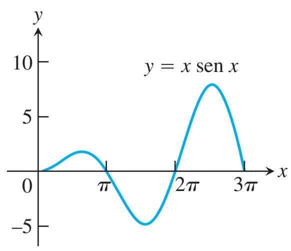
51. **Cálculo de áreas** Determine el área de la región encerrada por la curva $y = x \operatorname{sen} x$ y el eje x (véase la figura) para

a. $0 \le x \le \pi$.

b. $\pi \le x \le 2\pi$.

c. $2\pi \le x \le 3\pi$.

d. ¿Observa algún patrón? ¿Cuál es el área entre la curva y el eje x para $n\pi \le x \le (n + 1)\pi$, donde n es un entero no negativo arbitrario? Justifique su respuesta.



52. **Cálculo de áreas** Determine el área de la región encerrada por la curva $y = x \cos x$ y el eje x (véase la figura) para

a. $\pi/2 \le x \le 3\pi/2$.

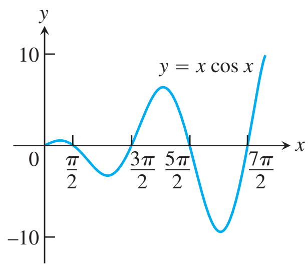
b. $3\pi/2 \le x \le 5\pi/2$.

c. $5\pi/2 \le x \le 7\pi/2$.

d. ¿Observa algún patrón? ¿Cuál es el área entre la curva y el eje x para

$$\left(\frac{2n - 1}{2}\right)\pi \le x \le \left(\frac{2n + 1}{2}\right)\pi,$$

donde n es un entero positivo arbitrario? Justifique su respuesta.



53. **Cálculo del volumen** Determine el volumen del sólido generado al hacer girar, alrededor de la recta $x = \ln 2$, la región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la curva $y = e^x$ y la recta $x = \ln 2$.

54. **Cálculo del volumen** Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la curva $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

a. alrededor del eje y.

b. alrededor de la recta $x = 1$.

55. **Cálculo del volumen** Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región en el primer cuadrante acotada por los ejes coordenados, la curva $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi/2$, alrededor

a. del eje y.

b. de la recta $x = \pi/2$.

56. **Cálculo del volumen** Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por el eje x y la curva $y = x \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$, alrededor

a. del eje y

b. de la recta $x = \pi$.

(Véase la gráfica en el ejercicio 51)

57. Considere la región acotada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$.

a. Determine el área de la región.

b. Determine el volumen del sólido que se forma al hacer girar esta región alrededor del eje x.

c. Determine el volumen del sólido formado al hacer girar esta región alrededor de la recta $x = -2$.

d. Determine el centroide de la región.

58. Considere la región acotada por las gráficas de $y = \tan^{-1} x$, $y = 0$ y $x = 1$.

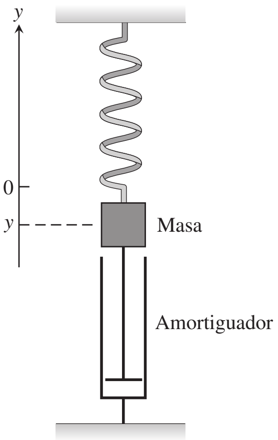
a. Determine el área de la región.

b. Determine el volumen del sólido formado al hacer girar esta región alrededor del eje y.

59. **Valor promedio** Una fuerza de retardo, simbolizada en la figura por el amortiguador, reduce el movimiento del resorte con un peso de manera que la posición de la masa en el instante t es

$$y = 2e^{-t} \cos t, \qquad t \ge 0.$$

Determine el valor promedio de y en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$.



60. Valor promedio En un sistema masa-resorte-amortiguador como el del ejercicio 59, la posición de la masa en el instante t es

$$y = 4e^{-t}(\operatorname{sen} t - \cos t), \qquad t \ge 0.$$

Determine el valor promedio de y en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$.

Fórmulas de reducción

En los ejercicios 61 a 64, utilice integración por partes para establecer la fórmula de reducción.

61. $\displaystyle\int x^n \cos x\, dx = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1}\operatorname{sen} x\, dx$

62. $\displaystyle\int x^n \operatorname{sen} x\, dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\, dx$

63. $\displaystyle\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\, dx, \quad a \ne 0$

64. $\displaystyle\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx$

65. Demuestre que

$$\int_a^b \left(\int_x^b f(t)\, dt\right) dx = \int_a^b (x-a)f(x)\, dx.$$

66. Utilice integración por partes para obtener la fórmula

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Integración de funciones inversas

La integración por partes conduce a una regla para la integración de inversas, que por lo regular da buenos resultados:

$$\begin{aligned}\int f^{-1}(x)\, dx &= \int y f'(y)\, dy && y = f^{-1}(x),\quad x = f(y) \\ & && dx = f'(y)\, dy \\ &= yf(y) - \int f(y)\, dy && \text{Integración por partes con} \\ & && u = y,\ dv = f'(y)\, dy \\ &= xf^{-1}(x) - \int f(y)\, dy\end{aligned}$$

La idea es tomar la parte más complicada de la integral, en este caso $f^{-1}(x)$, y simplificarla en primer lugar. Para la integral de $\ln x$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx &= \int ye^y\, dy && y = \ln x,\quad x = e^y \\ & && dx = e^y\, dy \\ &= ye^y - e^y + C \\ &= x\ln x - x + C.\end{aligned}$$

Para la integral de $\cos^{-1} x$, tenemos

$$\begin{aligned}\int \cos^{-1} x\, dx &= x\cos^{-1} x - \int \cos y\, dy && y = \cos^{-1} x \\ &= x\cos^{-1} x - \operatorname{sen} y + C \\ &= x\cos^{-1} x - \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) + C.\end{aligned}$$

Utilice la fórmula

$$\int f^{-1}(x)\, dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)\, dy \qquad y = f^{-1}(x) \tag{4}$$

para evaluar las integrales en los ejercicios 67 a 70. Exprese su respuesta en términos de x.

67. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} x\, dx$

68. $\displaystyle\int \tan^{-1} x\, dx$

69. $\displaystyle\int \sec^{-1} x\, dx$

70. $\displaystyle\int \log_2 x\, dx$

Otra forma de integrar $f^{-1}(x)$ (por supuesto, cuando $f^{-1}(x)$ es integrable) es utilizar integración por partes con $u = f^{-1}(x)$ y $dv = dx$ para rescribir la integral de f^{-1} como

$$\int f^{-1}(x)\, dx = xf^{-1}(x) - \int x\left(\frac{d}{dx}f^{-1}(x)\right) dx. \tag{5}$$

Los ejercicios 71 y 72 comparan los resultados de utilizar las ecuaciones (4) y (5).

71. Las ecuaciones (4) y (5) dan fórmulas diferentes para la integral de $\cos^{-1} x$:

a. $\displaystyle\int \cos^{-1} x\, dx = x\cos^{-1} x - \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) + C$ Ec. (4)

b. $\displaystyle\int \cos^{-1} x\, dx = x\cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C$ Ec. (5)

¿Pueden ser correctas ambas integraciones? Explique.

72. Las ecuaciones (4) y (5) dan fórmulas diferentes para la integral de $\tan^{-1} x$:

a. $\displaystyle\int \tan^{-1} x\, dx = x\tan^{-1} x - \ln\sec(\tan^{-1} x) + C$ Ec. (4)

b. $\displaystyle\int \tan^{-1} x\, dx = x\tan^{-1} x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$ Ec. (5)

¿Pueden ser correctas ambas integraciones? Explique.

Evalúe las integrales en los ejercicios 73 y 74 **(a)** con la ecuación (4) y **(b)** con la ecuación (5). En cada caso, verifique su respuesta derivándola con respecto a x.

73. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^{-1} x\, dx$

74. $\displaystyle\int \tanh^{-1} x\, dx$