El área de la región es

$$\begin{aligned} A &= \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy = \int_0^2 [y + 2 - y^2]\,dy \\ &= \int_0^2 [2 + y - y^2]\,dy \\ &= \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 \\ &= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Éste es el resultado del ejemplo 5, obtenido con menos trabajo. ■

Ejercicios 5.6

Evaluación de integrales definidas

Utilice la fórmula de sustitución del teorema 7 para evaluar las integrales en los ejercicios 1 a 24.

1. **a.** $\int_0^3 \sqrt{y+1}\,dy$ **b.** $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1}\,dy$

2. **a.** $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$ **b.** $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$

3. **a.** $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,dx$ **b.** $\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x\,dx$

4. **a.** $\int_0^{\pi} 3\cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$ **b.** $\int_{2\pi}^{3\pi} 3\cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$

5. **a.** $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$ **b.** $\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^3\,dt$

6. **a.** $\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2+1)^{1/3}\,dt$ **b.** $\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3}\,dt$

7. **a.** $\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$ **b.** $\int_0^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,dr$

8. **a.** $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv$ **b.** $\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,dv$

9. **a.** $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ **b.** $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

10. **a.** $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$ **b.** $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,dx$

11. **a.** $\int_0^{\pi/6} (1-\cos 3t)\operatorname{sen} 3t\,dt$ **b.** $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\cos 3t)\operatorname{sen} 3t\,dt$

12. **a.** $\int_{-\pi/2}^0 \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$ **b.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2+\tan\frac{t}{2}\right)\sec^2\frac{t}{2}\,dt$

13. **a.** $\int_0^{2\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\operatorname{sen} z}}\,dz$ **b.** $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\operatorname{sen} z}}\,dz$

14. **a.** $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\operatorname{sen} w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$ **b.** $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} w}{(3+2\cos w)^2}\,dw$

15. $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}\,(5t^4+2)\,dt$ **16.** $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}\,(1+\sqrt{y})^2}$

17. $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2\theta \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta$ **18.** $\int_{\pi}^{3\pi/2} \cot^5\left(\frac{\theta}{6}\right)\sec^2\left(\frac{\theta}{6}\right)d\theta$

19. $\int_0^{\pi} 5(5-4\cos t)^{1/4}\operatorname{sen} t\,dt$ **20.** $\int_0^{\pi/4} (1-\operatorname{sen} 2t)^{3/2}\cos 2t\,dt$

21. $\int_0^1 (4y-y^2+4y^3+1)^{-2/3}(12y^2-2y+4)\,dy$

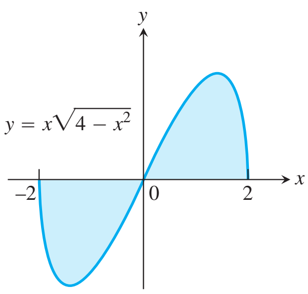
22. $\int_0^1 (y^3+6y^2-12y+9)^{-1/2}(y^2+4y-4)\,dy$

23. $\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{\theta}\cos^2(\theta^{3/2})\,d\theta$ **24.** $\int_{-1}^{-1/2} t^{-2}\operatorname{sen}^2\left(1+\frac{1}{t}\right)dt$

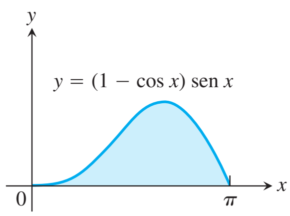
Área

En los ejercicios 25 a 40, determine las áreas totales de las regiones sombreadas.

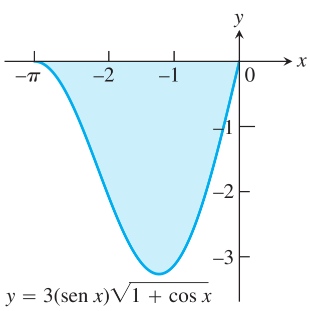
25.



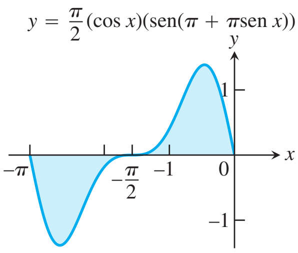
26.



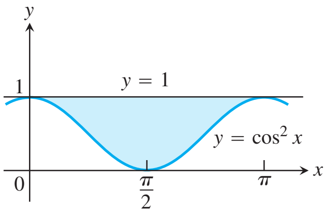
27.



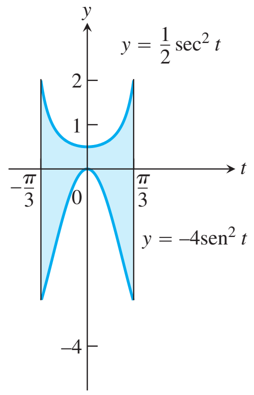
28.



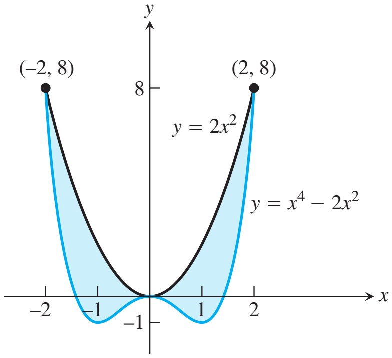
29.



30.

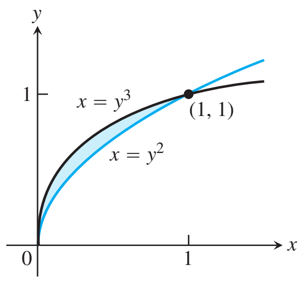


31.

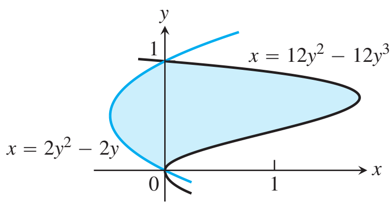


NO ESTÁ A ESCALA

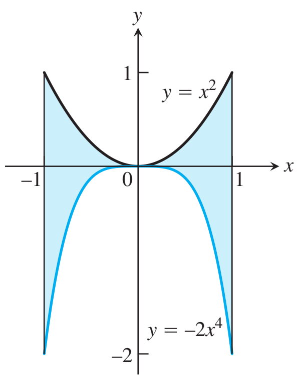
32.



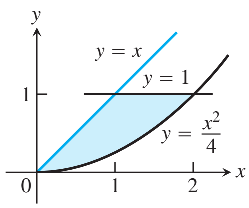
33.



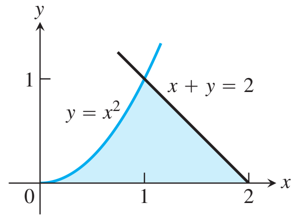
34.



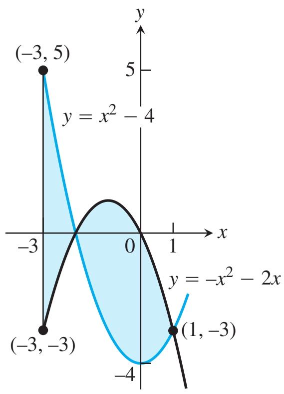
35.



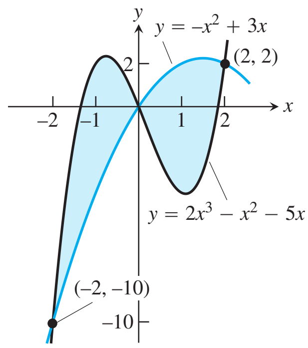
36.



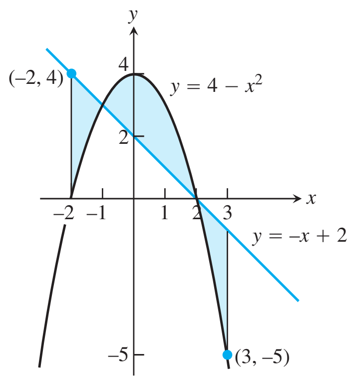
37.



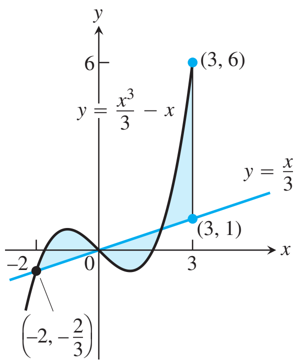
38.



39.



40.



En los ejercicios 41 a 50, determine las áreas de las regiones encerradas por las rectas y las curvas.

41. $y = x^2 - 2$ y $y = 2$

42. $y = 2x - x^2$ y $y = -3$

43. $y = x^4$ y $y = 8x$

44. $y = x^2 - 2x$ y $y = x$

45. $y = x^2$ y $y = -x^2 + 4x$

46. $y = 7 - 2x^2$ y $y = x^2 + 4$

47. $y = x^4 - 4x^2 + 4$ y $y = x^2$

48. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$, y $y = 0$

49. $y = \sqrt{|x|}$ y $5y = x + 6$ (¿Cuántos puntos de intersección hay?)

50. $y = |x^2 - 4|$ y $y = (x^2/2) + 4$

Determine las áreas de las regiones encerradas por las rectas y las curvas en los ejercicios 51 a 58.

51. $x = 2y^2$, $x = 0$ y $y = 3$

52. $x = y^2$ y $x = y + 2$

53. $y^2 - 4x = 4$ y $4x - y = 16$

54. $x - y^2 = 0$ y $x + 2y^2 = 3$

55. $x = y^2 - y$ y $x = 2y^2 - 2y - 6$

56. $x - y^{2/3} = 0$ y $x + y^4 = 2$

57. $x = y^2 - 1$ y $x = y^2 - 1$ y $x = |y|\sqrt{1 - y^2}$

58. $x = y^3 - y^2$ y $x = 2y$

En los ejercicios 59 a 62, determine las áreas de las regiones encerradas por las curvas.

59. $4x^2 + y = 4$ y $x^4 - y = 1$

60. $x^3 - y = 0$ y $3x^2 - y = 4$

61. $x + 4y^2 = 4$ y $x + y^4 = 1$, para $x \geq 0$

62. $x + y^2 = 3$ y $4x + y^2 = 0$

En los ejercicios 63 a 70, determine las áreas de las regiones encerradas por las rectas y las curvas.

63. $y = 2 \operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen} 2x$, $0 \leq x \leq \pi$

64. $y = 8 \cos x$ y $y = \sec^2 x$, $-\pi/3 \leq x \leq \pi/3$

65. $y = \cos(\pi x/2)$ y $y = 1 - x^2$

66. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2)$ y $y = x$

67. $y = \sec^2 x$, $y = \tan^2 x$, $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$

68. $x = \tan^2 y$ y $x = -\tan^2 y$, $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$

69. $x = 3 \operatorname{sen} y \leq \sqrt{\cos y}$ y $x = 0$, $0 \leq y \leq \pi/2$

70. $y = \sec^2(\pi x/3)$ y $y = x^{1/3}$, $-1 \leq x \leq 1$

71. Determine el área de la región en forma de hélice encerrada por la curva $x - y^3 = 0$ y la recta $x - y = 0$.

72. Determine el área de la región en forma de hélice encerrada por la curva $x - y^{1/3} = 0$ y la recta $x - y^{1/5} = 0$.

73. Determine el área de la región en el primer cuadrante acotada por la recta $y = x$, la recta $x = 2$, la curva $y = 1/x^2$ y el eje x.

74. Determine el área de la región "triangular" en el primer cuadrante acotada por la izquierda por el eje y y a la derecha por las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$.

75. La región acotada por abajo por la parábola $y = x^2$ y por arriba por la recta $y = 4$ se divide, mediante una recta horizontal $y = c$, en dos subsecciones de igual área.

a. Dibuje la región y una recta $y = c$ que la cruce y que parezca la correcta. En términos de c, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos donde la recta interseca a la parábola? Añádalos a su figura.

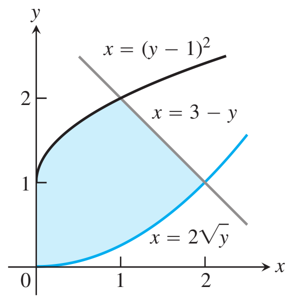
b. Determine c integrando con respecto a x. (Esto coloca a c en los límites de integración).

c. Determine c integrando con respecto a x. (Esto coloca a c también en el integrando).

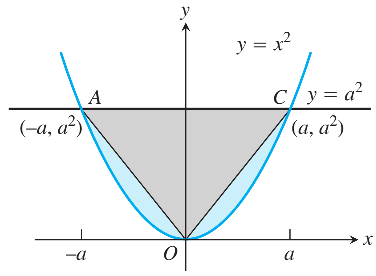
76. Determine el área de la región entre la curva $y = 3 - x^2$ y la recta $y = -1$ mediante la integración con respecto a **(a)** x, **(b)** y.

77. Determine el área de la región en el primer cuadrante acotada a la izquierda por el eje y, abajo por la recta $y = x/4$, arriba a la izquierda por la curva $y = 1 + \sqrt{x}$ y arriba a la derecha por la curva $y = 2/\sqrt{x}$.

78. Determine el área de la región en el primer cuadrante acotada a la izquierda por el eje y, abajo por la curva $x = 2\sqrt{y}$, arriba a la izquierda por la curva $x = (y - 1)^2$ y arriba a la derecha por la recta $x = 3 - y$.

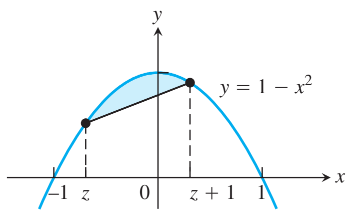


79. La siguiente figura muestra el triángulo AOC inscrito en la región acotada por la parábola $y = x^2$ y por la recta $y = a^2$. Determine el límite de la razón del área del triángulo al área de la región parabólica cuando a tiende a cero.



80. Suponga que el área de la región entre la gráfica de una función continua positiva f y el eje x desde $x = a$ a $x = b$ es 4 unidades cuadradas. Determine el área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = 2f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$.

81. Demuestre que el área de la región sombreada es igual a $1/6$ para todos los valores de z.



82. Indique si lo siguiente es verdadero, sólo algunas veces verdadero o falso. El área de la región entre las gráficas de las funciones continuas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, así como las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, $(a < b)$ es

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Justifique su respuesta.

Teoría y ejemplos

83. Suponga que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, $x > 0$. Exprese

$$\int_1^3 \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\, dx$$

en términos de F.

84. Demuestre que si f es continua, entonces

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1-x)\,dx.$$

85. Suponga que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 3.$$

Determine

$$\int_{-1}^0 f(x)\,dx$$

si **(a)** f es impar, **(b)** f es par.

86. **a.** Demuestre que si f es impar en $[-a, a]$ entonces

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$$

b. Pruebe el resultado del inciso (a) con $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $a = \pi/2$.

87. Si f es una función continua, determine el valor de la integral

$$I = \int_0^a \frac{f(x)\,dx}{f(x) + f(a-x)}$$

haciendo la sustitución $u = a - x$ y sumando la integral resultante a I.

88. Mediante una sustitución, demuestre que para todos los números positivos x y y,

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^y \frac{1}{t}\,dt.$$

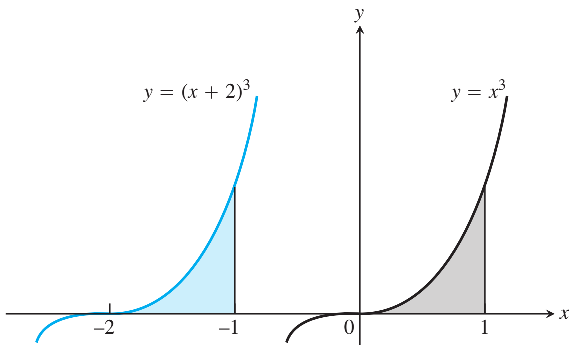
La propiedad de desplazamiento para integrales definidas Una propiedad básica de las integrales definidas es que son invariantes bajo traslación, como se expresa con la ecuación

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,dx. \qquad (1)$$

La ecuación se cumple siempre que f sea integrable y esté definida para los valores necesarios de x. Por ejemplo, en la siguiente figura muestre que

$$\int_{-2}^{-1} (x+2)^3\,dx = \int_0^1 x^3\,dx$$

ya que las áreas de las regiones sombreadas son congruentes.



89. Utilice una sustitución para verificar la ecuación (1).

90. Para cada una de las siguientes funciones, grafique $f(x)$ en $[a, b]$ y $f(x+c)$ en $[a-c, b-c]$ para convencerse de que la ecuación (1) es razonable.

a. $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$

b. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$, $b = \pi$, $c = \pi/2$

c. $f(x) = \sqrt{x-4}$, $\quad a = 4$, $\quad b = 8$, $\quad c = 5$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 91 a 94 determinará el área entre las curvas en el plano en casos donde no es posible determinar sus puntos de intersección mediante cálculos algebraicos sencillos. Utilice una SAC para realizar los siguientes pasos:

a. Grafique juntas las curvas para ver cómo se ven y cuántos puntos de intersección tienen.

b. Utilice en su SAC la función para resolver numéricamente y determine todos los puntos de intersección.

c. Integre $|f(x) - g(x)|$ en pares de valores de intersección consecutivos.

d. Sume todas las integrales que determinó en el inciso (c).

91. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{1}{3}, \quad g(x) = x - 1$

92. $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 3x^3 + 10, \quad g(x) = 8 - 12x$

93. $f(x) = x + \operatorname{sen}(2x), \quad g(x) = x^3$

94. $f(x) = x^2 \cos x, \quad g(x) = x^3 - x$

Capítulo 5 Preguntas de repaso

1. ¿En ocasiones, ¿cómo se pueden estimar cantidades como la distancia recorrida, el área y el valor promedio mediante sumas finitas? ¿Por qué necesitaría hacer esto?
2. ¿Qué es la notación sigma? ¿Qué ventajas ofrece? Dé ejemplos.
3. ¿Qué es una suma de Riemann? ¿Por qué necesitaría considerar tal suma?
4. ¿Qué es la norma de una partición de un intervalo cerrado?
5. ¿Qué es la integral definida de una función f en un intervalo cerrado $[a, b]$? ¿Cuándo podemos asegurar que existe?
6. ¿Cuál es la relación entre integrales definidas y el área? Describa otras interpretaciones de las integrales definidas.
7. ¿Cuál es el valor promedio de una función integrable en un intervalo cerrado? ¿La función debe tomar su valor promedio? Explique.
8. Describa las reglas para trabajar con integrales definidas (tabla 5.4). Dé ejemplos.
9. ¿Cuál es el teorema fundamental del cálculo? ¿Por qué es tan importante? Ilustre cada parte del teorema con un ejemplo.
10. ¿Cuál es el teorema del cambio efectivo? ¿Qué dice acerca de la integral de la velocidad? ¿De la integral del costo marginal?