El subíndice "rpc" significa "raíz del promedio del cuadrado" (también se designa como "rms", por las siglas de root mean square). Como el valor promedio de $V^2 = (V_{\text{máx}})^2 \operatorname{sen}^2 120\pi t$ en un ciclo es

$$(V^2)_{\text{prom}} = \frac{1}{(1/60) - 0}\int_0^{1/60} (V_{\text{máx}})^2 \operatorname{sen}^2 120\pi t\, dt = \frac{(V_{\text{máx}})^2}{2},$$

(ejercicio 64, inciso c), el voltaje rpc es

$$V_{\text{rpc}} = \sqrt{\frac{(V_{\text{máx}})^2}{2}} = \frac{V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}}.$$

Los valores dados para las instalaciones eléctricas caseras y los voltajes siempre son valores rpc. Así, "115 volts de corriente alterna (ac)" indican que el voltaje rpc es de 115. El pico del voltaje, obtenido de la última ecuación, es

$$V_{\text{máx}} = \sqrt{2}\, V_{\text{rpc}} = \sqrt{2}\cdot 115 \approx 163 \text{ volts},$$

que es considerablemente mayor. ■

Ejercicios 5.5

Evaluación de integrales indefinidas

Evalúe las integrales indefinidas en los ejercicios 1 a 16; hágalo usando las sustituciones dadas para reducir las integrales a una forma estándar.

1. $\int 2(2x+4)^5\, dx, \quad u = 2x+4$
2. $\int 7\sqrt{7x-1}\, dx, \quad u = 7x-1$
3. $\int 2x(x^2+5)^{-4}\, dx, \quad u = x^2+5$
4. $\int \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}\, dx, \quad u = x^4+1$
5. $\int (3x+2)(3x^2+4x)^4\, dx, \quad u = 3x^2+4x$
6. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^{1/3}}{\sqrt{x}}\, dx, \quad u = 1+\sqrt{x}$
7. $\int \operatorname{sen} 3x\, dx, \quad u = 3x$
8. $\int x \operatorname{sen}(2x^2)\, dx, \quad u = 2x^2$
9. $\int \sec 2t \tan 2t\, dt, \quad u = 2t$
10. $\int \left(1-\cos\frac{t}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt, \quad u = 1-\cos\frac{t}{2}$
11. $\int \frac{9r^2\, dr}{\sqrt{1-r^3}}, \quad u = 1-r^3$
12. $\int 12(y^4+4y^2+1)^2(y^3+2y)\, dy, \quad u = y^4+4y^2+1$
13. $\int \sqrt{x}\operatorname{sen}^2(x^{3/2}-1)\, dx, \quad u = x^{3/2}-1$
14. $\int \frac{1}{x^2}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) dx, \quad u = -\frac{1}{x}$
15. $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta\, d\theta$

    a. Usando $u = \cot 2\theta$ **b.** Usando $u = \csc 2\theta$.
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+8}}$

    a. Usando $u = 5x+8$ **b.** Usando $u = \sqrt{5x+8}$

Evalúe las integrales en los ejercicios 17 a 50.

17. $\int \sqrt{3-2s}\, ds$
18. $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\, ds$
19. $\int \theta\sqrt[4]{1-\theta^2}\, d\theta$
20. $\int 3y\sqrt{7-3y^2}\, dy$
21. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\, dx$
22. $\int \cos(3z+4)\, dz$
23. $\int \sec^2(3x+2)\, dx$
24. $\int \tan^2 x \sec^2 x\, dx$
25. $\int \operatorname{sen}^5\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\, dx$
26. $\int \tan^7\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\, dx$
27. $\int r^2\left(\frac{r^3}{18}-1\right)^5 dr$
28. $\int r^4\left(7-\frac{r^5}{10}\right)^3 dr$
29. $\int x^{1/2}\operatorname{sen}(x^{3/2}+1)\, dx$
30. $\int \csc\left(\frac{v-\pi}{2}\right)\cot\left(\frac{v-\pi}{2}\right) dv$
31. $\int \frac{\operatorname{sen}(2t+1)}{\cos^2(2t+1)}\, dt$
32. $\int \frac{\sec z \tan z}{\sqrt{\sec z}}\, dz$
33. $\int \frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t}-1\right) dt$
34. $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t}+3)\, dt$
35. $\int \frac{1}{\theta^2}\operatorname{sen}\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta}\, d\theta$
36. $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\operatorname{sen}^2\sqrt{\theta}}\, d\theta$
37. $\int t^3(1+t^4)^3\, dt$
38. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\, dx$
39. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{2-\frac{1}{x}}\, dx$
40. $\int \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\, dx$
41. $\int \sqrt{\frac{x^3-3}{x^{11}}}\, dx$
42. $\int \sqrt{\frac{x^4}{x^3-1}}\, dx$

43. $\int x(x-1)^{10}\,dx$

44. $\int x\sqrt{4-x}\,dx$

45. $\int (x+1)^2(1-x)^5\,dx$

46. $\int (x+5)(x-5)^{1/3}\,dx$

47. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

48. $\int 3x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$

49. $\int \frac{x}{(x^2-4)^3}\,dx$

50. $\int \frac{x}{(x-4)^3}\,dx$

Si no sabe qué sustitución hacer, trate de reducir la integral poco a poco; para ello, use una sustitución de prueba para simplificar un poco la integral y luego otra para simplificarla un poco más. Verá lo que queremos decir con esto si prueba la sucesión de sustituciones en los ejercicios 51 y 52.

51. $\int \frac{18\tan^2 x\sec^2 x}{(2+\tan^3 x)^2}\,dx$

a. $u=\tan x$, seguida de $v=u^3$ y luego de $w=2+v$.

b. $u=\tan^3 x$, seguida de $v=2+u$.

c. $u=2+\tan^3 x$

52. $\int \sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-1)}\,\operatorname{sen}(x-1)\cos(x-1)\,dx$

a. $u=x-1$, seguida de $v=\operatorname{sen} u$ y luego de $w=1+v^2$

b. $u=\operatorname{sen}(x-1)$, seguida de $v=1+u^2$

c. $u=1+\operatorname{sen}^2(x-1)$

Evalúe las integrales en los ejercicios 53 y 54.

53. $\int \frac{(2r-1)\cos\sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}}\,dr$

54. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\cos^3\sqrt{\theta}}\,d\theta$

Problemas con valor inicial

En los ejercicios 55 a 60, resuelva los problemas con valor inicial.

55. $\frac{ds}{dt}=12t(3t^2-1)^3,\quad s(1)=3$

56. $\frac{dy}{dx}=4x(x^2+8)^{-1/3},\quad y(0)=0$

57. $\frac{ds}{dt}=8\operatorname{sen}^2\left(t+\frac{\pi}{12}\right),\quad s(0)=8$

58. $\frac{dr}{d\theta}=3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right),\quad r(0)=\frac{\pi}{8}$

59. $\frac{d^2s}{dt^2}=-4\operatorname{sen}\left(2t-\frac{\pi}{2}\right),\quad s'(0)=100,\quad s(0)=0$

60. $\frac{d^2y}{dx^2}=4\sec^2 2x\tan 2x,\quad y'(0)=4,\quad y(0)=-1$

Teoría y ejemplos

61. La velocidad de una partícula que se mueve hacia atrás y hacia delante en una línea recta es $v=ds/dt=6\operatorname{sen}2t$ m/seg para toda t. Si $s=0$ cuando $t=0$, determine el valor de s cuando $t=\pi/2$ seg.

62. La aceleración de una partícula que se mueve hacia atrás y hacia delante en una recta es $a=d^2s/dt^2=\pi^2\cos\pi t$ m/seg^2 para toda t. Si $s=0$ y $v=8$ m/seg cuando $t=0$, determine s cuando $t=1$ seg.

63. Parece que podemos integrar 2 sen x cos x con respecto a x de tres maneras diferentes:

a. $\int 2\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\int 2u\,du\qquad u=\operatorname{sen}x$

$=u^2+C_1=\operatorname{sen}^2 x+C_1$

b. $\int 2\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\int -2u\,du\qquad u=\cos x$

$=-u^2+C_2=-\cos^2 x+C_2$

c. $\int 2\operatorname{sen}x\cos x\,dx=\int \operatorname{sen}2x\,dx\qquad 2\operatorname{sen}x\cos x=\operatorname{sen}2x$

$=-\frac{\cos 2x}{2}+C_3.$

¿Pueden ser correctas las tres integraciones? Justifique su respuesta.

64. (*Continuación del ejemplo 9*).

a. Evaluando la integral en la expresión demuestre

$$\frac{1}{(1/60)-0}\int_0^{1/60} V_{\text{máx}}\operatorname{sen}120\,\pi t\,dt$$

que el valor promedio de $V=V_{\text{máx}}\operatorname{sen}120\,\pi t$ en un ciclo completo es cero.

b. El circuito que hace funcionar a las estufas eléctricas está clasificado en 240 volts rpc. ¿Cuál es el valor pico del voltaje permisible?

c. Demuestre que

$$\int_0^{1/60}(V_{\text{máx}})^2\operatorname{sen}^2 120\,\pi t\,dt=\frac{(V_{\text{máx}})^2}{120}.$$

5.6 Sustitución y área entre curvas

Existen dos métodos para evaluar por sustitución una integral definida. Un método es determinar una antiderivada mediante sustitución y luego evaluar la integral definida mediante la aplicación del teorema de evaluación. El otro método extiende el proceso de sustitución directamente a integrales *definidas* mediante el cambio de límites de integración. Aquí aplicamos la nueva fórmula al problema de calcular el área entre dos curvas.

La fórmula de sustitución

La siguiente fórmula muestra cómo se modifican los límites de integración cuando se cambia la variable de integración mediante sustitución.