multiplicações e três adições. Uma maneira de reduzir o erro de arredondamento é reduzir o número de operações que produzem erro.

## EXERCÍCIOS 1.2

1. Calcule o erro absoluto e o erro relativo na aproximação de $p$ por $p^*$.
   a. $p = \pi$, $p^* = 22/7$ b. $p = \pi$, $p^* = 3{,}1416$
   c. $p = e$, $p^* = 2{,}718$ d. $p = \sqrt{2}$, $p^* = 1{,}414$
   e. $p = e^{10}$, $p^* = 22\,000$ f. $p = 10^{\pi}$, $p^* = 1.400$
   g. $p = 8!$, $p^* = 39\,900$ h. $p = 9!$, $p^* = \sqrt{18\pi}(9/e)^9$
2. Determine o maior intervalo no qual $p^*$ deve estar contido a fim de aproximar $p$ com erro relativo de no máximo $10^{-4}$ para cada valor de $p$.
   a. $\pi$ b. $e$ c. $\sqrt{2}$ d. $\sqrt[3]{7}$
3. Suponha que $p^*$ deva aproximar $p$ como erro relativo de no máximo $10^{-3}$. Determine o maior intervalo no qual $p^*$ deve estar contido para cada valor de $p$.
   a. 150 b. 900 c. 1 500 d. 90
4. Efetue os seguintes cálculos (i) exatamente, (ii) usando aritmética de truncamento, com três algarismos, e (iii) usando aritmética de arredondamento, com três algarismos. (iv) Calcule os erros relativos nas partes (ii) e (iii).
   a. $\frac{4}{5} + \frac{1}{3}$ b. $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$ c. $\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{11}\right) + \frac{3}{20}$ d. $\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{11}\right) - \frac{3}{20}$
5. Use a aritmética de arredondamento, com três algarismos, para efetuar os seguintes cálculos. Calcule o erro absoluto e o erro relativo com o valor exato determinado com pelo menos cinco algarismos.
   a. $133 + 0{,}921$ b. $133 - 0{,}499$ c. $(121 - 0{,}327) - 119$
   d. $(121 - 119) - 0{,}327$ e. $\dfrac{\frac{13}{14} - \frac{6}{7}}{2e - 5{,}4}$ f. $-10\pi + 6e - \frac{3}{62}$
   g. $\left(\frac{2}{9}\right) \cdot \left(\frac{9}{7}\right)$ h. $\dfrac{\pi - \frac{22}{7}}{\frac{1}{7}}$
6. Repita o Exercício 5 usando a aritmética de arredondamento, com quatro algarismos.
7. Repita o Exercício 5 usando a aritmética de truncamento, com três algarismos.
8. Repita o Exercício 5 usando a aritmética de truncamento, com quatro algarismos.
9. Os primeiros três termos diferentes de zero na série de Maclaurin para a função arco-tangente são $x - (1/3)x^3 + (1/5)x^5$. Calcule o erro absoluto e o erro relativo nas seguintes aproximações de $\pi$ usando o polinômio em vez do arco-tangente:
   a. $4\left[\text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ b. $16\ \text{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) + 4\ \text{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$
10. O número $e$ pode ser definido por $e = \sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$. Calcule o erro absoluto e o erro relativo nas seguintes aproximações de $e$:
    a. $\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!}$ b. $\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$

**11.** Seja

$$f(x) = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}.$$

**a.** Determine $\lim_{x\to 0} f(x)$.
**b.** Use a aritmética de arredondamento, com quatro algarismos, para calcular $f(0{,}1)$.
**c.** Substitua cada função trigonométrica por seu polinômio de Maclaurin de grau três e repita o item (b).
**d.** O valor real é $f(0{,}1) = -1{,}99899998$. Determine o erro relativo para os valores obtidos nos itens (b) e (c).

**12.** Seja

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}.$$

**a.** Determine $\lim_{x\to 0}(e^x - e^{-x})/x$.
**b.** Use a aritmética de arredondamento, com três algarismos, para calcular $f(0{,}1)$.
**c.** Substitua cada função exponencial por seu polinômio de Maclaurin de grau três e repita o item (b).
**d.** O valor real é $f(0{,}1) = 2{,}003335000$. Determine o erro relativo para os valores obtidos nos itens (b) e (c).

**13.** Use a aritmética de arredondamento, com quatro algarismos, e as fórmulas do Exemplo 5 para determinar a aproximação mais precisa para as raízes das seguintes equações quadráticas. Calcule os erros absolutos e relativos.

**a.** $\frac{1}{3}x^2 - \frac{123}{4}x + \frac{1}{6} = 0$
**b.** $\frac{1}{3}x^2 + \frac{123}{4}x - \frac{1}{6} = 0$
**c.** $1{,}002x^2 - 11{,}01x + 0{,}01265 = 0$
**d.** $1{,}002x^2 + 11{,}01x + 0{,}01265 = 0$

**14.** Repita o Exercício 13 usando a aritmética de truncamento, com quatro algarismos.

**15.** Use o formato real longo de 64 bits para determinar o equivalente decimal dos seguintes números de máquina em ponto flutuante.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** 0 | 10000001010 | 10010011000000000000 | 00000000000000000000000000000000 |
| **b.** 1 | 10000001010 | 10010011000000000000 | 00000000000000000000000000000000 |
| **c.** 0 | 01111111111 | 01010011000000000000 | 00000000000000000000000000000000 |
| **d.** 0 | 01111111111 | 01010011000000000000 | 00000000000000000000000000000001 |

**16.** Determine os próximos maior e menor números de máquina na forma decimal para os números fornecidos no Exercício 15.

**17.** Suponha que dois pontos $(x_0, y_0)$ e $(x_1, y_1)$ estejam em uma reta, com $y_1 \neq y_0$. Há duas fórmulas disponíveis para determinar a intersecção da reta com o eixo $x$:

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \text{ e } x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)y_0}{y_1 - y_0}.$$

**a.** Mostre que ambas as fórmulas são algebricamente corretas.
**b.** Use os dados $(x_0, y_0) = (1{,}31,\ 3{,}24)$ e $(x_1, y_1) = (1{,}93,\ 4{,}76)$ e a aritmética de arredondamento, com três algarismos, para calcular a intersecção com o eixo $x$ das duas maneiras. Qual método é melhor e por quê?

**18.** O polinômio de Taylor de grau $n$ para $f(x) = e^x$ é $\sum_{i=0}^{n}(x^i/i!)$. Use o polinômio de grau nove e a aritmética de truncamento, com três algarismos, para determinar uma aproximação de $e^{-5}$ por cada um dos seguintes métodos.

**a.** $e^{-5} \approx \sum_{i=0}^{9} \frac{(-5)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i 5^i}{i!}$

**b.** $e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^{9} \frac{5^i}{i!}}$.

c. Um valor aproximado de $e^{-5}$ correto até três algarismos é 6,74 x $10^{-3}$. Qual fórmula, (a) ou (b), fornece o resultado mais preciso e por quê?

19. O sistema linear dois por dois

$$ax + by = e, \; cx + dy = f,$$

onde $a, b, c, d, e, f$ são dados, pode ser resolvido para $x$ e $y$ como segue:

$$\text{faça } m = \frac{c}{a}, \quad \text{desde que } a \neq 0;$$
$$d_1 = d - mb;$$
$$f_1 = f - me;$$
$$y = \frac{f_1}{d_1};$$
$$x = \frac{e - by}{a};$$

Resolva os seguintes sistemas lineares usando a aritmética de arredondamento, com quatro algarismos.

a. $1{,}130x - 6{,}990y = 14{,}20$
$1{,}013x - 6{,}099y = 14{,}22$

b. $8{,}110x + 12{,}20y = -0{,}1370$
$-18{,}11x + 112{,}2y = -0{,}1376$

20. Repita o Exercício 19 usando a aritmética de truncamento, com quatro algarismos.

21. a. Mostre que a técnica de estruturação de polinômio descrita no Exemplo 6 pode também ser aplicada ao cálculo de

$$f(x) = 1{,}01e^{4x} - 4{,}62e^{3x} - 3{,}11e^{2x} + 12{,}2e^{x} - 1{,}99.$$

b. Use a aritmética de arredondamento, com três algarismos, na hipótese que $e^{1,53} = 4{,}62$ e o fato de que $e^{nx} = (e^x)^n$ para calcular $f(1{,}53)$ como dado no item (a).

c. Refaça o cálculo no item (b) primeiro estruturando os cálculos.

d. Compare as aproximações do item (b) e (c) com o resultado verdadeiro com três algarismos $f(1{,}53) = -7{,}61$.

22. Um paralelepípedo retangular tem lados de comprimento 3 cm, 4 cm e 5 cm, medidos até o centímetro mais próximo. Quais são os melhores limitantes superior e inferior para o volume desse paralelepípedo? Quais são os melhores limitantes superior e inferior para a área da superfície?

23. Seja $P_n(x)$ o polinômio de Maclaurin de grau $n$ para a função arco-tangente. Use o Maple com 75 algarismos decimais para determinar o valor de $n$ necessário para aproximar $\pi$ com precisão de $10^{-25}$ usando as seguintes fórmulas.

a. $4\left[P_n\left(\frac{1}{2}\right) + P_n\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

b. $16P_n\left(\frac{1}{5}\right) - 4P_n\left(\frac{1}{239}\right)$

24. Suponha que $fl(y)$ seja uma aproximação por arredondamento, com $k$ algarismos, de $y$. Mostre que

$$\left| \frac{y - fl(y)}{y} \right| \leq 0{,}5 \times 10^{-k+1}.$$

[*Sugestão*: se $d_{k+1} < 5$, então $fl(y) = 0,d_1d_2 \ldots d_k \times 10^n$. Se $d_{k+1} \geq 5$, então $fl(y) = 0,d_1d_2 \ldots d_k \times 10^n + 10^{n-k}$].

25. O coeficiente binomial

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

descreve o número de maneiras para se escolher um subconjunto com $k$ objetos a partir de um conjunto com $m$ elementos.

a. Suponha que os números de máquina decimais sejam da forma

$$\pm\, 0,d_1d_2d_3d_4 \times 10^n, \text{ com } 1 \leq d_1 \leq 9,\ 0 \leq d_i \leq 9 \text{ se } i = 2, 3, 4 \text{ e } |n| \leq 15.$$

# EXERCÍCIOS 2.1

1. Utilize o método da Bissecção para determinar $p_3$ para $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ em $[0, 1]$.

2. Seja $f(x) = 3(x + 1)(x - \frac{1}{2})(x - 1)$. Utilize o método da Bissecção nos intervalos a seguir para determinar $p_3$.
   a. $[-2, 1{,}5]$
   b. $[-1{,}25, 2{,}5]$

3. Utilize o método da Bissecção para determinar as soluções com precisão de $10^{-2}$ para $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ em cada intervalo.
   a. $[0, 1]$
   b. $[1, 3{,}2]$
   c. $[3{,}2, 4]$

4. Utilize o método da Bissecção para determinar as soluções com precisão de $10^{-2}$ para $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$ em cada intervalo.
   a. $[-2, -1]$
   b. $[0, 2]$
   c. $[2, 3]$
   d. $[-1, 0]$

5. Utilize o método da Bissecção para determinar as soluções com precisão de $10^{-5}$ para os problemas a seguir.
   a. $x - 2^{-x} = 0$ para $0 \leq x \leq 1$
   b. $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ para $0 \leq x \leq 1$
   c. $2x\cos(2x) - (x + 1)^2 = 0$ para $-3 \leq x \leq -2$ e $-1 \leq x \leq 0$
   d. $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ para $0{,}2 \leq x \leq 0{,}3$ e $1{,}2 \leq x \leq 1{,}3$

6. Utilize o método da Bissecção para determinar as soluções com precisão de $10^{-5}$ para os problemas a seguir.
   a. $3x - e^x = 0$ para $1 \leq x \leq 2$
   b. $x + 3\cos x - e^x = 0$ para $0 \leq x \leq 1$
   c. $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$ para $1 \leq x \leq 2$ e $2 \leq x \leq 4$
   d. $x + 1 - 2\,\text{sen}\,\pi x = 0$ para $0 \leq x \leq 0{,}5$ e $0{,}5 \leq x \leq 1$

7. a. Esboce os gráficos de $y = x$ e $y = 2\,\text{sen}\,x$.
   b. Utilize o método da Bissecção para determinar uma aproximação com precisão de $10^{-5}$ do primeiro valor positivo de $x$ com $x = 2\,\text{sen}\,x$.

8. a. Esboce os gráficos de $y = x$ e $y = \text{tg}\,x$.
   b. Utilize o método da Bissecção para determinar uma aproximação com precisão de $10^{-5}$ do primeiro valor positivo de $x$ com $x = \text{tg}\,x$.

9. a. Esboce os gráficos de $y = e^x - 2$ e $y = \cos(e^x - 2)$.
   b. Utilize o método da Bissecção para determinar uma aproximação com precisão de $10^{-5}$ de um valor em $[0{,}5, 1{,}5]$ com $e^x - 2 = \cos(e^x - 2)$.

10. Seja $f(x) = (x + 2)(x + 1)^2 x(x - 1)^3(x - 2)$. Para qual zero de $f$ o método da Bissecção converge quando aplicado aos intervalos a seguir?
    a. $[-1{,}5, 2{,}5]$
    b. $[-0{,}5, 2{,}4]$
    c. $[-0{,}5, 3]$
    d. $[-3, -0{,}5]$

11. Seja $f(x) = (x + 2)(x + 1)x(x - 1)^3(x - 2)$. Para qual zero de $f$ o método da Bissecção converge quando aplicado aos intervalos a seguir?
    a. $[-3, 2{,}5]$
    b. $[-2{,}5, 3]$
    c. $[-1{,}75, 1{,}5]$
    d. $[-1{,}5, 1{,}75]$

12. Determine uma aproximação de $\sqrt{3}$ correta até $10^{-4}$, utilizando o Algoritmo da Bissecção. [*Sugestão:* considere $f(x) = x^2 - 3$.]

13. Determine uma aproximação de $\sqrt[3]{25}$ correta até $10^{-4}$, utilizando o Algoritmo da Bissecção.

14. Utilize o Teorema 2.1 para determinar um limitante para o número de iterações necessárias para a obtenção de uma aproximação com precisão de $10^{-3}$ da solução de $x^3 + x - 4 = 0$ dentro do intervalo $[1, 4]$. Determine uma aproximação da raiz com essa ordem de precisão.

**15.** Utilize o Teorema 2.1 para determinar um limitante para o número de iterações necessárias para obter uma aproximação com precisão de $10^{-4}$ da solução de $x^3 - x - 1 = 0$ dentro do intervalo $[1, 2]$. Determine uma aproximação da raiz com essa ordem de precisão.

**16.** Seja $f(x) = (x - 1)^{10}$, $p = 1$ e $p_n = 1 + 1/n$. Mostre que $|f(p_n)| < 10^{-3}$ sempre que $n > 1$, mas que $|p - p_n| < 10^{-3}$ requer $n > 1\,000$.

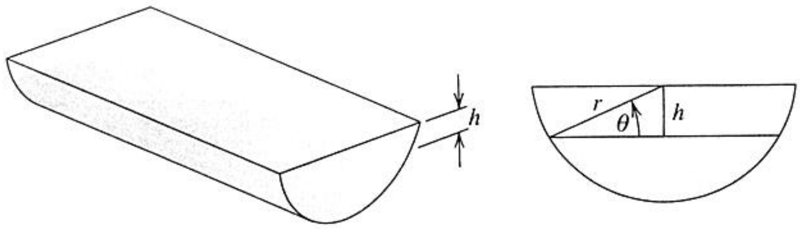
**17.** Seja $\{p_n\}$ a seqüência definida por $p_n = \sum_{k=1}^{n} (1/k)$. Mostre que $\{p_n\}$ diverge mesmo que $\lim_{n\to\infty} (p_n - p_{n-1}) = 0$.

**18.** A função definida por $f(x) = \text{sen}\, \pi x$ tem zeros em cada inteiro. Mostre que quando $-1 < a < 0$ e $2 < b < 3$, o método da Bissecção converge para

**a.** 0, se $a + b < 2$ **b.** 2, se $a + b > 2$ **c.** 1, se $a + b = 2$

**19.** Uma gamela de comprimento $L$ tem seção transversal semicircular com raio $r$ (veja a figura abaixo). Quando a gamela está cheia com água até uma distância $h$ do topo, o volume $V$ de água é

$$V = L\left[0{,}5\,\pi r^2 - r^2 \text{arcsen}\left(\frac{h}{r}\right) - h(r^2 - h^2)^{1/2}\right].$$



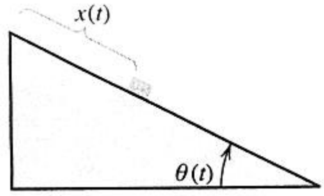

Suponha que $L = 10$ pés, $r = 1$ pé e $V = 12{,}4$ pés$^3$. Determine a profundidade da água na gamela com precisão de 0,01 pé. (1 PÉ = 30,48 cm)

**20.** Uma partícula começa a se movimentar sobre um plano inclinado liso cujo ângulo $\theta$ está variando a velocidade constante

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0.$$

Depois de $t$ segundos, a posição do objeto é dada por

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \text{sen}\,\omega t\right).$$




Suponha que a partícula tenha se deslocado 1,7 pé em um segundo. Determine, com precisão de $10^{-5}$, a velocidade $\omega$ com a qual $\theta$ varia. Suponha que $g = 32{,}17$ pés/s$^2$.

fix

**c.** Para a função $g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$,

$$g_3'(x) = -\tfrac{3}{4}x^2(10 - x^3)^{-1/2} \leq 0 \quad \text{em } [1, 2],$$

de modo que $g_3$ é estritamente decrescente em $[1, 2]$. Entretanto, $|g_3'(2)| \approx 2{,}12$, de modo que a condição $|g_3'(x)| \leq k < 1$ falha em $[1, 2]$. Uma análise mais detalhada da seqüência $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ que se inicia com $p_0 = 1{,}5$ mostra ser suficiente considerar o intervalo $[1, 1{,}5]$ em vez de $[1, 2]$. Nesse intervalo, ainda é verdade que $g_3'(x) < 0$ e que $g_3$ é estritamente decrescente, mas além disso

$$1 < 1{,}28 \approx g_3(1{,}5) \leq g_3(x) \leq g_3(1) = 1{,}5,$$

para todo $x \in [1, 1{,}5]$. Isso mostra que $g_3$ leva $[1, 1{,}5]$ em $[1, 1{,}5]$. Como também é verdade que $|g_3'(x)| \leq |g_3'(1{,}5)| \approx 0{,}66$ nesse intervalo, o Teorema 2.3 confirma a convergência que sabíamos existir.

**d.** Para $g_4(x) = (10/(4 + x))^{1/2}$, temos

$$|g_4'(x)| = \left| \frac{-5}{\sqrt{10}(4 + x)^{3/2}} \right| \leq \frac{5}{\sqrt{10}(5)^{3/2}} < 0{,}15 \quad \text{para todo} \quad x \in [1, 2].$$

O limitante do módulo de $g_4'(x)$ é muito menor que o limitante (encontrado em (**c**)) do módulo de $g_3'(x)$, o que explica a convergência mais rápida quando usamos $g_4$.

**e.** A seqüência definida por

$$g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$$

converge de modo muito mais rápido que as outras opções. Nas próximas seções, discutiremos a origem dessa opção e por que ela é tão eficiente. ■

## EXERCÍCIOS 2.2

**1.** Utilize manipulação algébrica para mostrar que cada uma das funções a seguir tem um ponto fixo em $p$ precisamente quando $f(p) = 0$, onde $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$.

**a.** $g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}$

**b.** $g_2(x) = \left(\dfrac{x + 3 - x^4}{2}\right)^{1/2}$

**c.** $g_3(x) = \left(\dfrac{x + 3}{x^2 + 2}\right)^{1/2}$

**d.** $g_4(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$

**2.** **a.** Se possível, efetue quatro iterações em cada função $g$ definida no Exercício 1. Faça $p_0 = 1$ e $p_{n+1} = g(p_n)$, para $n = 0, 1, 2, 3$.

**b.** Qual é a função que você acredita que vai fornecer a melhor aproximação da solução?

**3.** Os quatro métodos a seguir são propostos para o cálculo de $21^{1/3}$. Classifique-os de acordo com sua velocidade de convergência aparente, supondo $p_0 = 1$.

**a.** $p_n = \dfrac{20p_{n-1} + 21/p_{n-1}^2}{21}$

**b.** $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^3 - 21}{3p_{n-1}^2}$

**c.** $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^4 - 21p_{n-1}}{p_{n-1}^2 - 21}$

**d.** $p_n = \left(\dfrac{21}{p_{n-1}}\right)^{1/2}$

4. Os quatro métodos a seguir são propostos para o cálculo de $7^{1/5}$. Classifique-os de acordo com sua velocidade de convergência aparente, supondo $p_0 = 1$.

a. $p_n = p_{n-1}\left(1 + \dfrac{7 - p_{n-1}^5}{p_{n-1}^2}\right)^3$

b. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^5 - 7}{p_{n-1}^2}$

c. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^5 - 7}{5p_{n-1}^4}$

d. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^5 - 7}{12}$

5. Utilize um método de iteração de ponto fixo para determinar uma solução com precisão de $10^{-2}$ para $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ em $[1, 2]$. Utilize $p_0 = 1$.

6. Utilize um método de iteração de ponto fixo para determinar uma solução com precisão de $10^{-2}$ para $x^3 - x - 1 = 0$ em $[1, 2]$. Utilize $p_0 = 1$.

7. Utilize o Teorema 2.2 para mostrar que $g(x) = \pi + 0{,}5\ \text{sen}(x/2)$ tem um único ponto fixo em $[0, 2\pi]$. Aplique a iteração de ponto fixo para encontrar uma aproximação do ponto fixo que tenha a precisão de $10^{-2}$. Utilize o Corolário 2.4 para estimar o número de iterações necessárias para que a precisão de $10^{-2}$ seja alcançada e compare essa estimativa teórica com o número realmente necessário.

8. Utilize o Teorema 2.2 para mostrar que $g(x) = 2^{-x}$ tem um único ponto fixo em $[\frac{1}{3}, 1]$. Aplique a iteração de ponto fixo para encontrar uma aproximação do ponto fixo que tenha a precisão de $10^{-4}$. Utilize o Corolário 2.4 para estimar o número de iterações necessárias para que a precisão de $10^{-4}$ seja alcançada e compare essa estimativa teórica com o número realmente necessário.

9. Utilize um método de iteração de ponto fixo para encontrar uma aproximação de $\sqrt{3}$ com precisão de $10^{-4}$. Compare seu resultado e o número de iterações necessárias com a resposta obtida no Exercício 10 da Seção 2.1.

10. Utilize um método de iteração de ponto fixo para encontrar uma aproximação de $\sqrt[3]{25}$ com precisão de $10^{-4}$. Compare seu resultado e o número de iterações necessárias com a resposta obtida no Exercício 11 da Seção 2.1.

11. Para cada uma das equações a seguir, determine um intervalo $[a, b]$ no qual a iteração de ponto fixo convirja. (i) Estime o número de iterações necessárias para obter aproximações com precisão de $10^{-5}$ e (ii) efetue os cálculos.

a. $x = \dfrac{2 - e^x + x^2}{3}$

b. $x = \dfrac{5}{x^2} + 2$

c. $x = \left(\dfrac{e^x}{3}\right)^{1/2}$

d. $x = 5^{-x}$

e. $x = 6^{-x}$

f. $x = 0{,}5\ (\text{sen}\ x + \cos x)$

12. Para cada uma das equações a seguir, utilize o intervalo dado ou determine um intervalo $[a, b]$ no qual a iteração de ponto fixo convirja. (i) Estime o número de iterações necessárias para obter aproximações com precisão de $10^{-5}$ e (ii) efetue os cálculos.

a. $2 + \text{sen}\ x - x = 0$ utilize $[2, 3]$

b. $x^3 - 2x - 5 = 0$ utilize $[2, 3]$

c. $3x^2 - e^x = 0$

d. $x - \cos x = 0$

13. Determine todos os zeros de $f(x) = x^2 + 10 \cos x$, utilizando a iteração de ponto fixo para uma função de iteração $g$ adequada. Determine os zeros com precisão de $10^{-4}$.

14. Utilize um método de iteração de ponto fixo para determinar uma solução com precisão de $10^{-4}$ para $x = \text{tg}\ x$, com $x$ em $[4, 5]$.

15. Utilize um método de iteração de ponto fixo para determinar uma solução com precisão de $10^{-2}$ para $2\ \text{sen}\ \pi x + x = 0$ em $[1, 2]$. Utilize $p_0 = 1$.

16. Seja $A$ uma constante positiva dada e $g(x) = 2x - Ax^2$.

a. Mostre que se a iteração de ponto fixo convergir para um limite não-nulo, o limite será $p = 1/A$, de modo que o inverso de um número possa ser determinado simplesmente por meio de multiplicações e subtrações.

**b.** Determine um intervalo em torno de $1/A$ para o qual a iteração de ponto fixo convirja, desde que $p_0$ esteja neste intervalo.

**17.** Encontre uma função $g$ definida em $[0, 1]$ que não satisfaça nenhuma das hipóteses do Teorema 2.2, mas possua um único ponto fixo em $[0, 1]$.

**18.** **a.** Mostre que o Teorema 2.2 é verdadeiro se a desigualdade $|g'(x)| \leq k$ for substituída por $g'(x) \leq k$, para todo $x \in (a, b)$. [*Sugestão*: observe que apenas a unicidade está em jogo.]

**b.** Mostre que o Teorema 2.3 pode não ser válido se a desigualdade $|g'(x)| \leq k$ for substituída por $g'(x) \leq k$. [*Sugestão*: mostre que $g(x) = 1 - x^2$, para $x$ em $[0, 1]$, fornece um contra-exemplo.]

**19.** **a.** Utilize o Teorema 2.3 para mostrar que a seqüência definida por

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, \quad \text{para } n \geq 1,$$

converge para $\sqrt{2}$ sempre que $x_0 > \sqrt{2}$.

**b.** Use o fato de que $0 < (x_0 - \sqrt{2})^2$ sempre que $x_0 \neq \sqrt{2}$ para mostrar que se $0 < x_0 < \sqrt{2}$ então $x_1 > \sqrt{2}$.

**c.** Use os resultados das partes (a) e (b) para mostrar que a seqüência em (a) converge para $\sqrt{2}$, sempre que $x_0 > 0$.

**20.** **a.** Mostre que se $A$ for qualquer número positivo, então a seqüência definida por

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{A}{2x_{n-1}}, \quad \text{para } n \geq 1,$$

convergirá para $\sqrt{A}$, sempre que $x_0 > 0$.

**b.** O que ocorre se $x_0 < 0$?

**21.** Substitua a hipótese no Teorema 2.3 de que "existe um número positivo $k < 1$ com $|g'(x)| \leq k$" por "$g$ satisfaz uma condição de Lipschitz no intervalo $[a, b]$, com constante de Lipschitz $L < 1$". (Consulte o Exercício 25, Seção 1.1.) Mostre que as conclusões do teorema permanecem válidas.

**22.** Suponha que $g$ seja continuamente diferenciável em algum intervalo $(c, d)$ que contenha o ponto fixo $p$ de $g$. Mostre que se $|g'(p)| < 1$, existe um $\delta > 0$, tal que se $|p_0 - p| \leq \delta$, então a iteração de ponto fixo converge.

* **23.** Um objeto em queda vertical no ar está sujeito à resistência viscosa, bem como à força da gravidade. Suponha que um objeto com massa $m$ seja solto a uma altura $s_0$ e que a altura do objeto após $t$ segundos seja

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-kt/m}),$$

onde $g = 32{,}17$ pés/s$^2$ e $k$ representa o coeficiente de resistência do ar em lb-s/pé. Suponha que $s_0 = 300$ pés, $m = 0{,}25$ lb e $k = 0{,}1$ lb-s/pé. Determine, com precisão de 0,01 s, o tempo decorrido até que o objeto alcance o solo.

**24.** Sejam $g \in C^1[a, b]$ e $p$ em $(a, b)$, com $g(p) = p$ e $|g'(p)| > 1$. Mostre que existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < |p_0 - p| < \delta$, então, $|p_0 - p| < |p_1 - p|$. Desse modo, independentemente de quão próxima a aproximação inicial $p_0$ esteja de $p$, a próxima iteração $p_1$ estará mais afastada, de modo que a iteração de ponto fixo não convergirá, caso $p_0 \neq p$.

## 2.3 Método de Newton

O **método de Newton** (ou *Newton-Raphson*) é um dos métodos numéricos mais eficientes e conhecidos para a solução de um problema de determinação de raiz e pode ser introduzido de várias formas.

Geralmente, a maior segurança do método da Falsa Posição faz com que sejam necessários mais cálculos que no método da Secante, do mesmo modo que a simplificação possibilitada pelo método da Secante em relação ao método de Newton, normalmente, introduz o ônus de iterações adicionais. Outros exemplos de aspectos positivos e negativos desses métodos podem ser vistos nos Exercícios 17 e 18.

**Tabela 2.6**

| $n$ | $p_n$ |
|---|---|
| 0 | 0,5 |
| 1 | 0,7853981635 |
| 2 | 0,7363841388 |
| 3 | 0,7390581392 |
| 4 | 0,7390848638 |
| 5 | 0,7390851305 |
| 6 | 0,7390851332 |

## EXERCÍCIOS 2.3

1. Seja $f(x) = x^2 - 6$ e $p_0 = 1$. Utilize o método de Newton para determinar $p_2$.
2. Seja $f(x) = -x^3 - \cos x$ e $p_0 = -1$. Utilize o método de Newton para determinar $p_2$. Poderíamos utilizar $p_0 = 0$?
3. Seja $f(x) = x^2 - 6$. Com $p_0 = 3$ e $p_1 = 2$, determine $p_3$.
   **a.** Utilize o método da Secante.
   **b.** Utilize o método da Falsa Posição.
   **c.** Qual é o resultado mais próximo de $\sqrt{6}$, (a) ou (b)?
4. Seja $f(x) = -x^3 - \cos x$. Com $p_0 = -1$ e $p_1 = 0$, determine $p_3$.
   **a.** Utilize o método da Secante.
   **b.** Utilize o método da Falsa Posição.
5. Utilize o método de Newton para encontrar soluções com precisão de $10^{-4}$ para os problemas a seguir.
   **a.** $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$, $[1, 4]$
   **b.** $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$, $[-3, -2]$
   **c.** $x - \cos x = 0$, $[0, \pi/2]$
   **d.** $x - 0{,}8 - 0{,}2 \operatorname{sen} x = 0$, $[0, \pi/2]$
6. Utilize o método de Newton para encontrar soluções com precisão de $10^{-5}$ para os problemas a seguir.
   **a.** $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ para $1 \leq x \leq 2$
   **b.** $\ln(x - 1) + \cos(x - 1) = 0$ para $1{,}3 \leq x \leq 2$
   **c.** $2x \cos 2x - (x - 2)^2 = 0$ para $2 \leq x \leq 3$ e $3 \leq x \leq 4$
   **d.** $(x - 2)^2 - \ln x = 0$ para $1 \leq x \leq 2$ e $e \leq x \leq 4$
   **e.** $e^x - 3x^2 = 0$ para $0 \leq x \leq 1$ e $3 \leq x \leq 5$
   **f.** $\operatorname{sen} x - e^{-x} = 0$ para $0 \leq x \leq 1$, $3 \leq x \leq 4$ e $6 \leq x \leq 7$
7. Repita o Exercício 5, utilizando o método da Secante.
8. Repita o Exercício 6, utilizando o método da Secante.
9. Repita o Exercício 5, utilizando o método da Falsa Posição.
10. Repita o Exercício 6, utilizando o método da Falsa Posição.
11. Utilize todos os três métodos desta seção para encontrar soluções com precisão de $10^{-5}$ para os problemas a seguir.

**12.** Utilize todos os três métodos desta seção para encontrar soluções com precisão de $10^{-7}$ para os problemas a seguir.

**a.** $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$ e para $2 \leqslant x \leqslant 4$

**b.** $x + 1 - 2 \operatorname{sen} \pi x = 0$ para $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ e para $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

**13.** Utilize o método de Newton para encontrar uma aproximação com precisão de $10^{-4}$ do valor de $x$ que produza o ponto no gráfico de $y = x^2$ mais próximo a $(1, 0)$. [*Sugestão*: minimize $[d(x)]^2$, onde $d(x)$ representa a distância de $(x, x^2)$ a $(1, 0)$.]

**14.** Utilize o método de Newton para encontrar uma aproximação com precisão de $10^{-4}$ do valor de $x$ que produza o ponto no gráfico de $y = 1/x$ mais próximo a $(2, 1)$.

**15.** O seguinte enunciado descreve o método de Newton de forma gráfica: suponha que $f'(x)$ exista em $[a, b]$ e que $f'(x) \neq 0$ em $[a, b]$. Suponha também que exista um $p \in [a, b]$, tal que $f(p) = 0$, e seja $p_0 \in [a, b]$ arbitrário. Seja $p_1$ o ponto no qual a reta tangente a $f$ em $(p_0, f(p_0))$ cruza o eixo $x$. Para cada $n \geqslant 1$, seja $p_n$ a interseção da reta tangente a $f$ em $(p_{n-1}, f(p_{n-1}))$ com o eixo $x$. Deduza a fórmula que descreve esse método.

**16.** Utilize o método de Newton para resolver a equação

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos 2x, \qquad \text{com } p_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Faça iterações, utilizando o método de Newton, até a precisão de $10^{-5}$ ser alcançada. Explique por que o resultado não parece normal para o método de Newton. Além disso, resolva a equação com $p_0 = 5\pi$ e $p_0 = 10\pi$.

**17.** O polinômio de quarto grau

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

tem dois zeros reais, um em $[-1, 0]$ e outro em $[0, 1]$. Tente encontrar a aproximação desses zeros com a precisão de $10^{-6}$, utilizando os seguintes métodos:

**a.** Método da Falsa Posição,

**b.** Método da Secante,

**c.** Método de Newton.

Utilize as extremidades de cada intervalo como aproximações iniciais em (a) e (b) e os pontos médios como as aproximações iniciais em (c).

**18.** A função $f(x) = \operatorname{tg} \pi x - 6$ tem um zero em $(1/\pi) \operatorname{arctg} 6 \approx 0{,}447431543$. Sejam $p_0 = 0$ e $p_1 = 0{,}48$. Faça dez interações de cada um dos métodos a seguir para encontrar a aproximação dessa raiz. Qual é o método mais eficiente e por quê?

**a.** Método da Bissecção,

**b.** Método da Falsa Posição,

**c.** Método da Secante.

**19.** A equação de iteração do método da Secante pode ser escrita na forma mais simples

$$p_n = \frac{f(p_{n-1})p_{n-2} - f(p_{n-2})p_{n-1}}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}.$$

Explique por que, em geral, essa equação de iteração tende a ser menos precisa que a do Algoritmo 2.4.

**20.** A equação $x^2 - 10 \cos x = 0$ tem duas soluções, $\pm 1{,}3793646$. Utilize o método de Newton para encontrar uma aproximação das soluções com precisão de $10^{-5}$, com os valores de $p_0$ a seguir.

**a.** $p_0 = -100$ **b.** $p_0 = -50$ **c.** $p_0 = -25$

**d.** $p_0 = 25$ **e.** $p_0 = 50$ **f.** $p_0 = 100$

**21.** A equação $4x^2 - e^x - e^{-x} = 0$ tem quatro soluções $\pm x_1$ e $\pm x_2$. Utilize o método de Newton para encontrar uma aproximação da solução com precisão de $10^{-5}$, com os valores de $p_0$ a seguir.

**a.** $p_0 = -10$ **b.** $p_0 = -5$ **c.** $p_0 = -3$

**d.** $p_0 = -1$ **e.** $p_0 = 0$ **f.** $p_0 = 1$

g. $p_0 = 3$ h. $p_0 = 5$ i. $p_0 = 10$

22. Utilize o Maple para determinar quantas iterações do método de Newton com $p_0 = \pi/4$ são necessárias para encontrar uma raiz de $f(x) = \cos x - x$ com precisão de $10^{-100}$.

23. A função descrita por $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{0,4x} \cos \pi x$ tem um número infinito de zeros.
   a. Determine, com precisão de $10^{-6}$, o único zero negativo.
   b. Determine, com precisão de $10^{-6}$, os quatro menores zeros positivos.
   c. Determine uma aproximação inicial razoável para determinar o $n$-ésimo menor zero positivo de $f$. [*Sugestão*: esboce um gráfico aproximado de $f$.]
   d. Utilize a parte (c) para determinar, com precisão de $10^{-6}$, o 25º menor zero positivo de $f$.

24. Determine uma aproximação para $\lambda$, com precisão de $10^{-4}$, para a equação da população

$$1\,564\,000 = 1\,000\,000e^{\lambda} + \frac{435\,000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1),$$

discutida na introdução deste capítulo. Utilize esse valor para calcular a população no fim do segundo ano, supondo que a taxa de imigração durante o ano permaneça em 435 000 indivíduos por ano.

25. A soma de dois números é 20. Se cada número for adicionado à respectiva raiz quadrada, o produto das duas somas será 155,55. Determine os dois números com precisão de $10^{-4}$.

26. O valor acumulado em uma poupança com base em pagamentos regulares pode ser determinado a partir da *equação da anuidade antecipada*,

$$A = \frac{P}{i}[(1 + i)^n - 1].$$

Nessa equação, $A$ é a quantia na conta, $P$ é a quantia depositada de forma regular e $i$ é a taxa de juros por período para $n$ períodos de depósito. Um engenheiro gostaria de ter uma poupança de US\$ 750 000,00 ao se aposentar, depois de 20 anos de trabalho e pode depositar US\$ 1 500,00 por mês para esse fim. Qual é a taxa de juros mínima com a qual essa quantia pode ser investida, supondo que os juros sejam compostos mensalmente?

27. Os problemas que envolvem a quantia necessária para o pagamento de uma hipoteca durante um período fixo empregam a fórmula a seguir

$$A = \frac{P}{i}[1 - (1 + i)^{-n}],$$

denominada *equação da anuidade ordinária*. Nessa equação, $A$ é o valor da hipoteca, $P$ é a quantia de cada pagamento, e $i$ é a taxa de juros por período para $n$ períodos de pagamento. Suponha que uma quantia de US\$ 135 000,00 deva ser paga em 30 anos pela hipoteca de uma casa e que o mutuário possa pagar até US\$ 1 000,00 por mês pela casa. Qual deve ser a taxa de juros máxima para que o mutuário possa pagar a hipoteca?

28. A concentração de um medicamento no sangue de um paciente é determinada por $c(t) = Ate^{-t/3}$ miligramas por mililitro, $t$ horas após a injeção de $A$ unidades. A concentração máxima segura é de 1 mg/ml.
   a. Qual é a quantidade a ser injetada para que esta concentração máxima segura seja alcançada e quando esse valor máximo será alcançado?
   b. Uma quantidade adicional desse medicamento deve ser administrada ao paciente após a concentração cair para 0,25 mg/ml. Determine, com precisão de minutos, quando essa segunda injeção deve ser aplicada.
   c. Suponha que a concentração após injeções consecutivas seja aditiva e que 75% da quantidade injetada originalmente seja administrada na segunda injeção. Quando a terceira injeção deve ser aplicada?

29. Seja $f(x) = 3^{3x+1} - 7 \cdot 5^{2x}$.
   a. Utilize os comandos `solve` e `fsolve` do Maple para tentar determinar todas as raízes de $f$.
   b. Trace o gráfico de $f(x)$ para encontrar aproximações iniciais das raízes de $f$.

**c.** Utilize o método de Newton para determinar raízes de $f$ com precisão de $10^{-16}$.
**d.** Encontre as soluções exatas de $f(x) = 0$, sem utilizar o Maple.

**30.** Repita o Exercício 29, utilizando $f(x) = 2^{x^2} - 3 \cdot 7^{x+1}$.

**31.** O modelo de crescimento populacional logístico é descrito por uma equação na forma

$$P(t) = \frac{P_L}{1 - ce^{-kt}},$$

onde $P_L$, $c$ e $k > 0$ são constantes, e $P(t)$ é a população no instante $t$. $P_L$ representa o valor-limite da população, pois $\lim_{t\to\infty} P(t) = P_L$. Utilize os dados do censo dos anos 1950, 1960 e 1970 fornecidos na tabela da página 101 para determinar as constantes $P_L$, $c$ e $k$ para um modelo de crescimento logístico. Utilize o modelo logístico para calcular a população dos Estados Unidos em 1980 e 2010, supondo $t = 0$, em 1950. Compare os resultados obtidos para 1980 com o valor real.

**32.** O modelo de crescimento populacional de Gompertz é descrito por

$$P(t) = P_L e^{-ce^{-kt}},$$

onde $P_L$, $c$ e $k > 0$ são constantes e $P(t)$ é a população no instante $t$. Repita o Exercício 27, utilizando o modelo de crescimento de Gompertz em vez do modelo logístico.

**33.** O jogador A eliminará (ganha por 21 a 0) o jogador B em uma partida de raquetebol com uma probabilidade

$$P = \frac{1+p}{2}\left(\frac{p}{1-p+p^2}\right)^{21},$$

onde $p$ denota a probabilidade de A vencer qualquer rebatida específica (independentemente do sacador). (Consulte [Keller, J], pág. 267). Determine, com precisão de $10^{-3}$, o valor mínimo de $p$ que garanta que A eliminará B em pelo menos metade das partidas jogadas.

**34.** No projeto de veículos para qualquer tipo de terreno, é necessário considerar falhas do veículo quando este tenta transpor dois tipos de obstáculos. Um tipo de falha é denominado *falha de suspensão* e ocorre quando o veículo tenta cruzar um obstáculo onde sua parte inferior toca o chão. Outro tipo de falha é chamado *falha dianteira* e ocorre quando o veículo desce em uma vala e sua parte dianteira toca o chão.

A figura a seguir, adaptada a partir de [Bek], mostra os componentes envolvidos na falha dianteira de um veículo. Nessa referência é mostrado que o ângulo $\alpha$ máximo que pode ser transposto por um veículo quando $\beta$ é o ângulo máximo para o qual a falha de suspensão *não* ocorre, satisfaz a equação

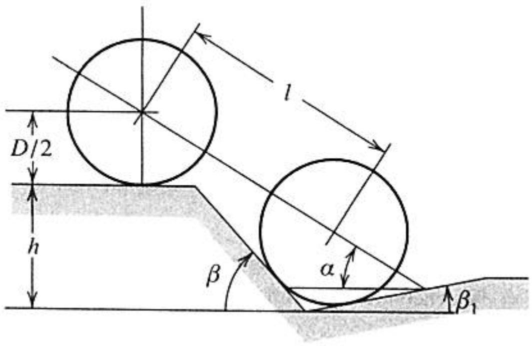
$$A \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + B \operatorname{sen}^2 \alpha - C \cos \alpha - E \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

onde

$$A = l\operatorname{sen} \beta_1, \quad B = l\cos \beta_1, \quad C = (h + 0{,}5D)\operatorname{sen} \beta_1 - 0{,}5D \tan\beta_1, \quad \text{e}$$
$$E = (h + 0{,}5D)\cos \beta_1 - 0{,}5D.$$

**a.** Afirma-se que quando $l = 89$ pol, $h = 49$ pol, $D = 55$ pol, e $\beta_1 = 11{,}5°$, o ângulo $\alpha$ é de aproximadamente de 33°. Verifique esse resultado.

**b.** Determine $\alpha$ para a situação em que $l$, $h$ e $\beta_1$ tenham os valores indicados na parte (a), mas $D = 30$ pol.



*Passo 4* Se $|p - p_0| < TOL$, então
SAÍDA ($p$); (*Procedimento concluído com sucesso.*)
PARE.

*Passo 5* Faça $i = i + 1$.

*Passo 6* Faça $p_0 = p$. (*Atualiza $p_0$.*)

*Passo 7* SAÍDA ('O método falhou após $N_0$ iterações, $N_0$ =', $N_0$);
(*O procedimento não foi bem-sucedido.*)
PARE. ■

Observe que $\Delta^2 p_n$ pode ser 0, o que introduziria um 0 no denominador da próxima iteração. Caso isso ocorra, terminamos a seqüência e selecionamos $p_2^{(n-1)}$ como a resposta aproximada.

**Exemplo 2** Para resolver $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, utilizando o método de Steffensen, faça $x^3 + 4x^2 = 10$, divida por $x + 4$ e isole $x$. Esse procedimento produz o método de ponto fixo

$$g(x) = \left(\frac{10}{x+4}\right)^{1/2},$$

utilizado no Exemplo 3(d) da Seção 2.2.

O procedimento de Steffensen com $p_0 = 1{,}5$ fornece os valores da Tabela 2.12. A iteração $p_0^{(2)} = 1{,}365230013$ tem precisão até a nona casa decimal. Neste exemplo, a precisão alcançada pelo método de Steffensen é aproximadamente a mesma obtida no método de Newton (consulte o Exemplo 4 na Seção 2.4). ■

**Tabela 2.12**

| $k$ | $p_0^{(k)}$ | $p_1^{(k)}$ | $p_2^{(k)}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,5 | 1,348399725 | 1,367376372 |
| 1 | 1,365265224 | 1,365225534 | 1,365230583 |
| 2 | 1,365230013 | | |

De acordo com o Exemplo 2, parece que o método de Steffensen fornece a convergência quadrática sem o cálculo de uma derivada, e o Teorema 2.14 confirma que este é o caso. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [He2, págs. 90-92] ou [IK, págs. 103-107].

*Teorema 2.14* Suponha que $x = g(x)$ tenha a solução $p$ com $g'(p) \neq 1$. Caso exista um $\delta > 0$ tal que $g \in C^3[p - \delta, p + \delta]$, então, o método de Steffensen fornece a convergência quadrática para qualquer $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$. ■

## EXERCÍCIOS 2.5

1. As seqüências a seguir são linearmente convergentes. Gere os primeiros cinco termos da seqüência $\{\hat{p}_n\}$, utilizando o método $\Delta^2$ de Aitken.
   a. $p_0 = 0{,}5$, $p_n = (2 - e^{p_{n-1}} + p_{n-1}^2)/3$, $n \geq 1$
   b. $p_0 = 0{,}75$, $p_n = (e^{p_{n-1}}/3)^{1/2}$, $n \geq 1$
   c. $p_0 = 0{,}5$, $p_n = 3^{-p_{n-1}}$, $n \geq 1$
   d. $p_0 = 0{,}5$, $p_n = \cos p_{n-1}$, $n \geq 1$

2. Considere a função $f(x) = e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 8)e^{4x} - (\ln 2)^3$. Utilize o método de Newton com $p_0 = 0$ para obter uma aproximação de um zero de $f$. Gere termos até que $|p_{n+1} - p_n| < 0{,}0002$. Obtenha a seqüência $\Delta^2$ de Aitken $\{\hat{p}_n\}$. Houve melhora na convergência?

3. Seja $g(x) = \cos(x - 1)$ e $p_0^{(0)} = 2$. Utilize o método de Steffensen para determinar $p_0^{(1)}$.

4. Seja $g(x) = 1 + (\text{sen}\, x)^2$ e $p_0^{(0)} = 1$. Utilize o método de Steffensen para determinar $p_0^{(1)}$ e $p_0^{(2)}$.

5. O método de Steffensen é aplicado a uma função $g(x)$ com $p_0^{(0)} = 1$ e $p_2^{(0)} = 3$ para a obtenção de $p_0^{(1)} = 0{,}75$. Qual é o $p_1^{(0)}$?

6. O método de Steffensen é aplicado a uma função $g(x)$ com $p_0^{(0)} = 1$ e $p_1^{(0)} = \sqrt{2}$ para a obtenção de $p_0^{(1)} = 2{,}7802$. Qual é o $p_2^{(0)}$?

7. Utilize o método de Steffensen para determinar com a precisão de $10^{-4}$ a raiz de $x^3 - x - 1 = 0$ no intervalo $[1, 2]$ e compare o resultado com os resultados do Exercício 6 da Seção 2.2.

8. Utilize o método de Steffensen para determinar com a precisão de $10^{-4}$ a raiz de $x - 2^{-x} = 0$ no intervalo $[0, 1]$ e compare o resultado com os resultados do Exercício 8 da Seção 2.2.

9. Utilize o método de Steffensen com $p_0 = 2$ para calcular uma aproximação de $\sqrt{3}$ com precisão de $10^{-4}$. Compare o resultado com os resultados do Exercício 9 da Seção 2.2 e do Exercício 12 da Seção 2.1.

10. Utilize o método de Steffensen com $p_0 = 3$ para calcular uma aproximação de $\sqrt[3]{25}$ com precisão de $10^{-4}$. Compare o resultado com os resultados do Exercício 10 da Seção 2.2 e do Exercício 13 da Seção 2.1.

11. Utilize o método de Steffensen para obter uma aproximação das soluções das equações a seguir com precisão de $10^{-5}$.
**a.** $x = (2 - e^x + x^2)/3$, onde $g$ é a função do Exercício 11(a) da Seção 2.2.
**b.** $x = 0{,}5\,(\text{sen}\, x + \cos x)$, onde $g$ é a função do Exercício 11(f) da Seção 2.2.
**c.** $x = (e^x/3)^{1/2}$, onde $g$ é a função do Exercício 11(c) da Seção 2.2.
**d.** $x = 5^{-x}$, onde $g$ é a função do Exercício 11(d) da Seção 2.2.

12. Utilize o método de Steffensen para obter uma aproximação das soluções das equações a seguir com precisão de $10^{-5}$.
**a.** $2 + \text{sen}\, x - x = 0$, onde $g$ é a função do Exercício 12(a) da Seção 2.2.
**b.** $x^3 - 2x - 5 = 0$, onde $g$ é a função do Exercício 12(b) da Seção 2.2.
**c.** $3x^2 - e^x = 0$, onde $g$ é a função do Exercício 12(c) da Seção 2.2.
**d.** $x - \cos x = 0$, onde $g$ é a função do Exercício 12(d) da Seção 2.2.

13. As seqüências a seguir convergem para 0. Utilize o método $\Delta^2$ de Aitken para gerar $\{\hat{p}_n\}$ até que $|\hat{p}_n| \leq 5 \times 10^{-2}$:

**a.** $p_n = \dfrac{1}{n}, \quad n \geqslant 1$ **b.** $p_n = \dfrac{1}{n^2}, \quad n \geqslant 1$

14. Uma seqüência $\{p_n\}$ é considerada **superlinearmente convergente** para $p$ se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = 0.$$

**a.** Mostre que se $p_n \to p$ com ordem $\alpha$, para $\alpha > 1$, $\{p_n\}$ é superlinearmente convergente para $p$.
**b.** Mostre que $p_n = 1/n^n$ é superlinearmente convergente para 0, mas não converge para 0 com para qualquer $\alpha > 1$.

15. Suponha que $\{p_n\}$ seja superlinearmente convergente para $p$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p|} = 1.$$

c.

| $p_0 = 2{,}5,\ p_1 = 2{,}0,\ p_2 = 2{,}25$ | | |
|---|---|---|
| $i$ | $p_i$ | $f(p_i)$ |
| 3 | 1,96059 | $-0{,}611255$ |
| 4 | 1,97056 | $0{,}748825 \times 10^{-2}$ |
| 5 | 1,97044 | $-0{,}295639 \times 10^{-4}$ |
| 6 | 1,97044 | $-0{,}259639 \times 10^{-4}$ |

Utilizamos o Maple para gerar a parte (a) da Tabela 2.13. Para isso, definimos $f(x)$ e as aproximações iniciais por

```
>f:=x->16*x^4-40*x^3+5*x^2+20*x+6;
>p0:=0.5; p1:=-0.5; p2:=0.0;
```

Calculamos o polinômio nos valores iniciais

```
>f0:=f(p0); f1:=f(p1); f2=f(p2);
```

e obtemos $c = 6$, $b = 10$, $a = 9$ e $p_3 = -0{,}5555555558 + 0{,}5983516452i$, utilizando as fórmulas do método de Müller:

```
>c:=f2;
>b:=((p0-p2)^2*(f1-f2)-(p1-p2)^}2*(f0-f2))/((p0-p2)*(p1-p2)*(p0-p1));
>a:=((p1-p2)*(f0-f2)-(p0-p2)*(f1-f2))/((p0-p2)*(p1-p2)*(p0-p1));
>p3:=p2-(2*c)/(b+(b/abs(b))*sqrt(b^2-4*a*c));
```

O valor $p_3$ foi gerado por meio da aritmética complexa, como no cálculo

```
>f3:=f(p3);
```

que fornece $f_3 = -29{,}40070112 - 3{,}898724738i$.

Os valores reais das raízes da equação são 1,241677, 1,970446 e $-0{,}356062 \pm 0{,}162758i$, o que mostra a precisão das aproximações obtidas pelo método de Müller. ■

O Exemplo 3 ilustra que o método de Müller pode determinar aproximações das raízes dos polinômios com uma variedade de valores iniciais. De fato, o método de Müller geralmente converge para a raiz de um polinômio para qualquer opção de aproximação inicial, embora problemas nos quais a convergência não ocorra possam ser construídos. Por exemplo, suponha que, para algum $i$, tenhamos $f(p_i) = f(p_{i+1}) = f(p_{i+2}) \neq 0$. Nesse caso, a equação quadrática será reduzida a uma função constante não-nula que nunca cruzará o eixo $x$. Porém, em geral, isso não ocorre, e pacotes de software de uso geral que utilizam o método de Müller requerem apenas uma aproximação inicial para cada raiz e até mesmo oferecem essa aproximação como opção.

## EXERCÍCIOS 2.6

1. Determine aproximações, com precisão de $10^{-4}$, de todos os zeros reais dos polinômios a seguir, utilizando o método de Newton.
   - **a.** $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$
   - **b.** $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$
   - **c.** $f(x) = x^3 - x - 1$
   - **d.** $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$
   - **e.** $f(x) = x^3 + 4{,}001x^2 + 4{,}002x + 1{,}101$
   - **f.** $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 4$
2. Determine aproximações, com precisão de $10^{-5}$, de todos os zeros de cada um dos polinômios a seguir, primeiramente encontrando os zeros reais, usando o método de Newton, e, a seguir, reduzindo a polinômios de menor grau para determinar quaisquer zeros complexos.
   - **a.** $f(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 85x - 136$

b. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 16x - 40$
c. $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$
d. $f(x) = x^5 + 11x^4 - 21x^3 - 10x^2 - 21x - 5$
e. $f(x) = 16x^4 + 88x^3 + 159x^2 + 76x - 240$
f. $f(x) = x^4 - 4x^2 - 3x + 5$
g. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$
h. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$

3. Repita o Exercício 1, utilizando o método de Müller.

4. Repita o Exercício 2, utilizando o método de Müller.

5. Utilize o método de Newton para determinar, com precisão de $10^{-3}$, os zeros e os pontos críticos das funções a seguir. Utilize os resultados para esboçar o gráfico de $f$.
a. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 12$
b. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 12x - 5$

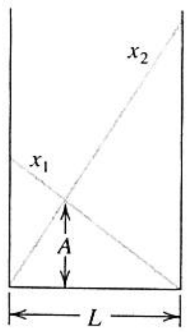
6. $f(x) = 10x^3 - 8{,}3x^2 + 2{,}295x - 0{,}21141 = 0$ tem uma raiz em $x = 0{,}29$. Utilize o método de Newton, com aproximação inicial $x_0 = 0{,}28$, para tentar determinar essa raiz. Explique o que ocorre.

7. Utilize cada um dos métodos a seguir para determinar uma solução em $[0{,}1,\ 1]$, com precisão de $10^{-4}$, de

$$600x^4 - 550x^3 + 200x^2 - 20x - 1 = 0.$$

a. Método da Bissecção
b. Método de Newton
c. Método da Secante
d. Método da Falsa Posição
e. Método de Müller

8. Duas escadas se cruzam em um beco de largura $L$. Cada escada tem uma extremidade apoiada na base de uma parede e a outra extremidade apoiada em algum ponto da parede oposta. As escadas se cruzam a uma altura $A$ acima do pavimento. Calcule $L$, sendo $x_1 = 20$ pés e $x_2 = 30$ pés os respectivos comprimentos das escadas e $A = 8$ pés.




9. Uma lata em forma de cilindro circular reto deve ser fabricada de tal forma que possa conter o volume de 1 000 cm$^3$. A tampa e o fundo circulares da lata devem ter um raio 0,25 cm maior que o do cilindro para que o excesso de material seja utilizado como vedação da borda. A chapa de material da lateral da lata também deve ser 0,25 cm mais longa que a circunferência da lata para formar a vedação. Determine, com precisão de $10^{-4}$, a quantidade mínima de material necessária para a fabricação da lata.

10. Em 1224, Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, respondeu a um desafio matemático de John de Palermo na presença do Imperador Frederick II: determine uma raiz da equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Primeiramente, ele mostrou que a equação não tinha raízes racionais e nem raízes irracionais euclidianas, isto é, não existia nenhuma raiz na forma $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, ou $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, onde $a$ e $b$ são números racionais.