**Universidade Federal do Rio Grande do Sul**
**Instituto de Física**
**Departamento de Física**
**Professor:** ***Rudi Gaelzer***
**Disciplina:** ***Mecânica Clássica II***
**Cursos:** ***Bacharelados em Física***

# Lista de Exercícios 3
# Formalismo Hamiltoniano

**1)** ***Equações de Hamilton.*** Obtenha as equações canônicas de Hamilton a partir do Princípio de Hamilton

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\left\{\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}; t\right\} dt = 0$$

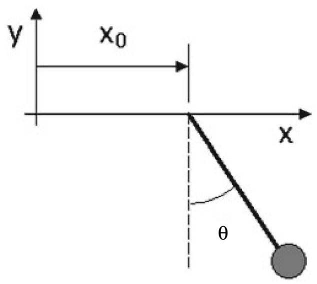
para uma sistema com $n$ graus de liberdade.

---

**2)** A figura abaixo mostra um pêndulo com extensão $\ell$ e massa $m$. O seu ponto de suspensão está localizado no ponto $x_0$, o qual é movimentado horizontalmente de acordo com

$$x_0\left(t\right) = A + a\cos\omega t,$$

sendo $A$, $a$ e $\omega$ constantes dadas.




*(a)* Encontre a Hamiltoniana deste sistema.

*(b)* Derive as equações canônicas de Hamilton.

*(c)* Considere a possibilidade de oscilações de pequena amplitude ($|\theta| \ll 1$ e $a \ll 1$) e obtenha as equações de movimento linearizadas.

*(d)* Resolva as equações de movimento no regime estacionário, *i. e.*, suponha que a solução possa ser escrita

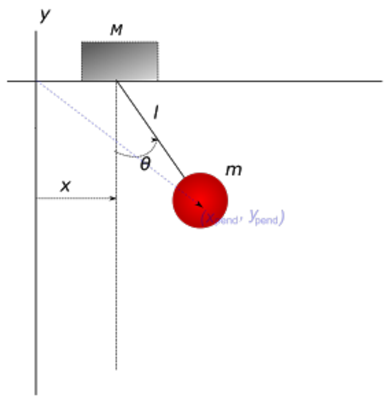
$$p_\theta\left(t\right) = C\,\mathrm{sen}\,\omega t + D\cos\omega t$$

e obtenha as constantes $C$ e $D$ e a solução para $\theta\left(t\right)$.

*(e)* Discuta em que situação a aproximação de pequenas oscilações deixa de ser válida.

---

**3)** Considere o sistema abaixo constituído por um pêndulo simples de massa $m$ e comprimento $\ell$, com o seu ponto de suspensão preso ao fundo de um carrinho de massa $M$, o qual é livre para se mover sem atrito ao longo de um trilho horizontal.




*(a)* Obtenha a Lagrangiana do sistema pêndulo + carrinho.

*(b)* Obtenha as equações de Euler-Lagrange.

*(c)* Obtenha a Hamiltoniana do sistema.

*(d)* Obtenha as equações canônicas de Hamilton.

*(e)* Resolva as equações de movimento (em qualquer formulação) realizando uma aproximação de oscilações de pequenas amplitudes.

*(f)* A superfície sobre a qual a massa $M$ se apoia é agora inclinada por um ângulo $\alpha$ em relação à horizontal. Repita os itens *(a)* – *(e)* nesta situação.

---

**4)** Uma partícula de massa $m$ movimenta-se sem atrito sobre uma mesa horizontal. Uma corda rígida e leve tem uma de suas extremidades conectada à partícula, passa por um orifício no centro da mesa e tem a sua outra extremidade conectada a uma mola de constante elástica $k$, conforme ilustrado na figura abaixo. A extensão da corda é tal que a força restauradora da mola é nula quando a partícula se encontra sobre o orifício.

*(a)* Obtenha a Hamiltoniana do sistema.

*(b)* Obtenha as equações de Hamilton.

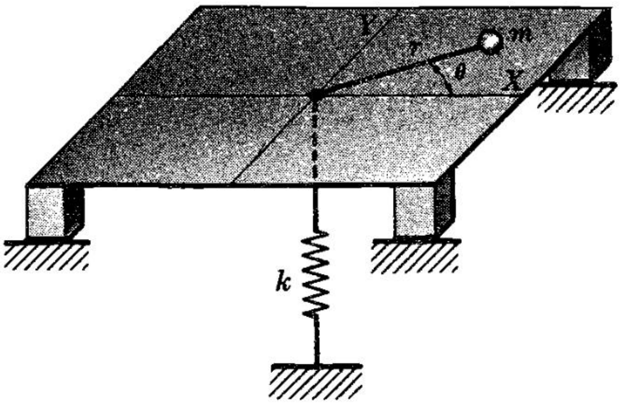
*(c)* Qual coordenada é cíclica? Qual é a constante de movimento associada à mesma?

*(d)* Mostre que a função Hamiltoniana é a energia total do sistema e que ambas são conservadas.

*(e)* As equações de movimento podem ser integradas. Siga passos semelhantes aos adotados para resolver o problema de Kepler e mostre que

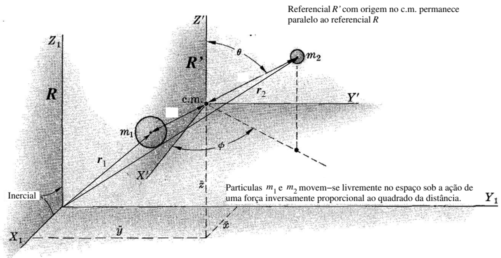
$$\theta(r) = \frac{p_\theta}{m} \int \frac{r^{-2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(H - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}kr^2\right)}} + \text{cte.}$$

Obtenha a forma da órbita da partícula.




---

**5)** ***Hamiltoniano de um sistema planetário.*** Duas partículas de massas $m_1$ e $m_2$ movem-se livremente no espaço sob a ação da força gravitacional mútua. Este sistema é ilustrado na figura abaixo.




*(a)* Expresse as posições de cada partícula em termos das posições do centro de massa (c.m.) do sistema

$$\bar{\boldsymbol{r}} = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$$

e da posição relativa ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$). Note que, de acordo com os referenciais $R$ e $R'$ ilustrados na figura, a origem de $R'$ está no centro de massa.

*(b)* Sendo

$$\boldsymbol{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad \boldsymbol{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

as forças internas do sistema, mostre primeiro que

$$\boldsymbol{\nabla}_1 = \frac{m_1}{M}\boldsymbol{\nabla}_{\bar{\boldsymbol{r}}} - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} \qquad \boldsymbol{\nabla}_2 = \frac{m_2}{M}\boldsymbol{\nabla}_{\bar{\boldsymbol{r}}} + \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}$$

e então obtenha a energia potencial interna total empregando um sistema de coordenadas esférico.

*(c)* Expressando a posição do c.m. em coordenadas cartesianas $\bar{\boldsymbol{r}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e a posição relativa em coordenadas esféricas $\boldsymbol{r} = (r, \theta, \phi)$, mostre que na ausência de forças externas a Lagrangiana do sistema é

$$\begin{aligned} L\left\{\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}}, \dot{\bar{z}}, r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}\right\} &= \frac{1}{2}M\left(\dot{\bar{x}}^2 + \dot{\bar{y}}^2 + \dot{\bar{z}}^2\right) \\ &+ \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\dot{\phi}^2\right) + G\frac{m_1 m_2}{r}, \end{aligned}$$

sendo $M = m_1 + m_2$ e $\mu = m_1 m_2 / M$ a massa reduzida do sistema.

*(d)* Obtenha as equações de Euler-Lagrange do sistema. Como é o movimento do centro de massa? Verifique em que situação as equações de movimento permitem uma solução com $\dot{\theta} = 0$.

*(e)* Obtenha os momentos canônicos conjugados.

*(f)* Obtenha a Hamiltoniana do sistema.

*(g)* Derive as equações de Hamilton. Além dos momentos associados com as coordenadas cíclicas, qual é a outra constante de movimento deste sistema?

*(h)* Da mesma forma como no item *(d)*, as equações de Hamilton admitem uma solução com $\dot{\theta} = 0$. Mostre que nestas condições a órbita das partículas é determinada pela quadratura

$$\phi(r) = \int \frac{\left(p_\phi / r^2\right) dr}{\sqrt{2\mu\left(H_{\text{rel}} + G\frac{m_1 m_2}{r} - \frac{p_\phi^2}{2\mu r^2}\right)}} + \text{cte.},$$

onde

$$H_{\text{rel}} = H - \frac{1}{2M}\left(p_{\bar{x}}^2 + p_{\bar{y}}^2 + p_{\bar{z}}^2\right).$$

---

**6)** Dada a Hamiltoniana $H\left(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N, t\right)$ de um sistema de $N$ partículas, deseja-se investigar a invariância da mesma sob a ação das transformações infinitesimais

$$\boldsymbol{r}_\alpha \to \boldsymbol{r}'_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha + \delta\boldsymbol{r}_\alpha \qquad \boldsymbol{p}_\alpha \to \boldsymbol{p}'_\alpha = \boldsymbol{p}_\alpha + \delta\boldsymbol{p}_\alpha.$$

*(a)* Obtenha a expressão para a variação da Hamiltoniana $\delta H$ frente a estas transformações.

*(b)* Para o caso de translações rígidas, $\delta\boldsymbol{r}_\alpha = \epsilon\hat{\boldsymbol{n}}$ e $\delta\boldsymbol{p}_\alpha = 0$, verifique a conservação do momento linear canônico total do sistema.

*(c)* Para o caso de rotações rígidas, $\delta\boldsymbol{r}_\alpha = \delta\theta\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{r}_\alpha$ e $\delta\boldsymbol{p}_\alpha = \delta\theta\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{p}_\alpha$, verifique a conservação do momento angular canônico total do sistema.

---

**7)** Uma massa $m$ oscila num plano vertical fixo, suspensa por um fio de massa desprezível que passa por um orifício numa mesa horizontal. O fio, que possui um comprimento inicial $\ell_0$, é puxado através do orifício a uma taxa constante, de tal modo que o seu comprimento varia de acordo com $\ell(t) = \ell_0 - \alpha t$, sendo $\alpha > 0$.

*(a)* Obtenha a Lagrangiana e a equação de movimento.

*(b)* Obtenha a Hamiltoniana e as equações canônicas de Hamilton.

*(c)* Discuta a conservação da Hamiltoniana e sua relação com a energia mecânica.

*(d)* Supondo que a massa é abandonada a partir do repouso em um ângulo inicial $\theta_0$ pequeno, obtenha uma solução para a equação de movimento. Discuta a validade desta solução.[1]

---

**8)** A dinâmica de um sistema físico é descrito pela Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} m \left( \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 \right) + a \rho^2 \dot{\phi},$$

onde $(\rho, \phi, z)$ são coordenadas cilíndricas e $a$ é uma constante.

*(a)* Encontre a Hamiltoniana do sistema.

*(b)* Identifique três constantes de movimento.

*(c)* A Hamiltoniana é igual à energia mecânica do sistema?

*(d)* Mostre que a solução da equação radial pode ser reduzida a uma quadratura na forma

$$t = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\alpha - \left(\beta - a\rho^2\right)^2 / m^2 \rho^2}},$$

sendo $\alpha$ e $\beta$ constantes. Identifique as mesmas em termos das constantes de movimento.

**9)** Considere a Hamiltoniana $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2$, sendo $a$ e $b$ constantes.

*(a)* Prove que as quantidades

$$F_1 = \frac{p_2 - b q_2}{q_1}, \qquad F_2 = q_1 q_2, \qquad F_3 = q_1 e^{-t}$$

são constantes de movimento.

*(b)* Obtenha uma quarta constante de movimento.

*(c)* Obtenha as soluções para $q_1(t)$, $q_2(t)$, $p_1(t)$ e $p_2(t)$ em termos das 4 constantes de movimento.

---

**10)** Uma partícula de massa $m$ se move sob a ação da gravidade ao longo da hélice $z = k\phi$, $\rho = \text{constante}$, onde $k$ é constante. Obtenha as equações de movimento de Hamilton.

---

**11)** Uma mola de massa desprezível com constante elástica $k$ e comprimento de equilíbrio $\ell$ conecta duas massas $m_1$ e $m_2$. O sistema repousa sobre uma superfície lisa e pode tanto oscilar quanto rotar.

*(a)* Determine a lagrangiana e as equações de movimento.[2]

*(b)* Determine os momentos conjugados. Há alguma(s) coordenada(s) cíclica(s)?

*(c)* Determine as equações de movimento de Hamilton.

[1] *Sugestão*: BOAS, MARY L., Mathematical Methods in the Physical Sciences, 2$^{\text{nd}}$ Ed., 1983, seção 12.16.

[2] *Sugestão:* Transforme este problema de 2 corpos em 2 problemas de 1 corpo. Escreva a posição de cada partícula em termos da posição do centro de massa e da posição relativa.

# Algumas Respostas

**2)** *(a)* Hamiltoniana:

$$H(\theta, p_\theta, t) = \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{m\ell^2} - \frac{p_\theta}{\ell}\dot{x}_0\cos\theta - \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta - mg\ell\cos\theta.$$

*(b)* Equações de Hamilton:

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m\ell^2} - \frac{\dot{x}_0}{\ell}\cos\theta$$
$$\dot{p}_\theta = -\left(\frac{\dot{x}_0}{\ell}p_\theta - m\dot{x}_0^2\cos\theta + mg\ell\right)\mathrm{sen}\,\theta.$$

*(c)* Equações linearizadas:

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m\ell^2} - \frac{\dot{x}_0}{\ell}$$
$$\dot{p}_\theta = -mg\ell\theta.$$

---

**3)** *(a)* Lagrangiana:

$$L\left\{\theta, \dot{x}, \dot{\theta}\right\} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + m\ell\left(g + \dot{x}\dot{\theta}\right)\cos\theta.$$

*(b)* Equações de Euler-Lagrange:

$$(M+m)\dot{x} + m\ell\dot{\theta}\cos\theta = \text{cte.}$$
$$\cos\theta\ddot{x} + \ell\ddot{\theta} + g\,\mathrm{sen}\,\theta = 0.$$

*(c)* Hamiltoniana:

$$H(\theta, p_x, p_\theta) = \frac{m\ell^2p_x^2 + (M+m)p_\theta^2 - 2m\ell\cos\theta p_xp_\theta}{2(M+m\,\mathrm{sen}^2\,\theta)m\ell^2} - m\ell g\cos\theta.$$

*(d)* Equações de Hamilton:

$$\dot{x} = \frac{\ell p_x - \cos\theta p_\theta}{(M+m\,\mathrm{sen}^2\,\theta)\ell}$$
$$\dot{\theta} = \frac{(M+m)p_\theta - m\ell p_x\cos\theta}{(M+m\,\mathrm{sen}^2\,\theta)m\ell^2}$$
$$p_x = \text{cte.}$$
$$\dot{p}_\theta = \frac{m\ell p_x\cos\theta - (m+M)p_\theta}{(M+m\,\mathrm{sen}^2\,\theta)^2\ell^2}(\ell p_x - p_\theta\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta - m\ell g\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

---

**4)** *(a)* Lagrangiana:

$$L\left\{r, \dot{r}, \dot{\theta}\right\} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2}kr^2.$$

*(b)* Equações de Euler-Lagrange:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + kr = 0$$
$$mr^2\dot{\theta} = \text{cte.}$$

*(c)* A Hamiltoniana:

$$H(r, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}kr^2.$$

*(d)* Equações de Hamilton:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \qquad \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - kr$$
$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \qquad \dot{p}_\theta = 0.$$

---

**5)** *(d)* As equações de Euler-Lagrange:

$$M\dot{\bar{x}} = \text{cte.}$$
$$\mu\ddot{r} - \mu r\left(\dot{\theta}^2 + \mathrm{sen}^2\,\theta\dot{\phi}^2\right) + G\frac{m_1m_2}{r^2} = 0$$
$$M\dot{\bar{y}} = \text{cte.}$$
$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) - r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0$$
$$M\dot{\bar{z}} = \text{cte.}$$
$$r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\dot{\phi} = \text{cte.}$$

*(f)* Hamiltoniana:

$$H(r, \theta, p_{\bar{x}}, p_{\bar{y}}, p_{\bar{z}}, p_r, p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2M}\left(p_{\bar{x}}^2 + p_{\bar{y}}^2 + p_{\bar{z}}^2\right) + \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\right) - G\frac{m_1m_2}{r}.$$

*(g)* Eqs. Hamilton:

$$\dot{\bar{x}} = \frac{p_{\bar{x}}}{M} \qquad p_{\bar{x}} = \text{cte.}$$
$$\dot{\bar{y}} = \frac{p_{\bar{y}}}{M} \qquad p_{\bar{y}} = \text{cte.}$$
$$\dot{\bar{z}} = \frac{p_{\bar{z}}}{M} \qquad p_{\bar{z}} = \text{cte.}$$
$$\dot{r} = \frac{p_r}{\mu} \qquad \dot{p}_r = \frac{1}{\mu r^3}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\mathrm{sen}^2\,\theta}\right) - G\frac{m_1m_2}{r^2}$$
$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2} \qquad \dot{p}_\theta = \frac{p_\phi^2\cos\theta}{\mu r^2\,\mathrm{sen}^3\,\theta}$$
$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{\mu r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \qquad p_\phi = \text{cte.}$$

---

**7)** *(a)* A Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\ell}^2 + \ell^2\dot{\theta}^2\right) + mg\ell\cos\theta.$$

*(b)* Equações de Hamilton:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m\ell^2} \qquad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = -mg\ell\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

*(d)* Solução:

$$\theta(t) = \frac{\pi\sqrt{g\ell_0}\theta_0}{\alpha\sqrt{\ell_0 - \alpha t}}\left[J_2\left(\frac{2\sqrt{g\ell_0}}{\alpha}\right)Y_1\left(\frac{2\sqrt{g}}{\alpha}\sqrt{\ell_0 - \alpha t}\right) - Y_2\left(\frac{2\sqrt{g\ell_0}}{\alpha}\right)J_1\left(\frac{2\sqrt{g}}{\alpha}\sqrt{\ell_0 - \alpha t}\right)\right].$$

Para realizar uma visualização de $\theta(t)$, define-se as quantidades

$$\beta = \frac{2\sqrt{g\ell_0}}{\alpha} \qquad \tau = \frac{\alpha t}{\ell_0},$$

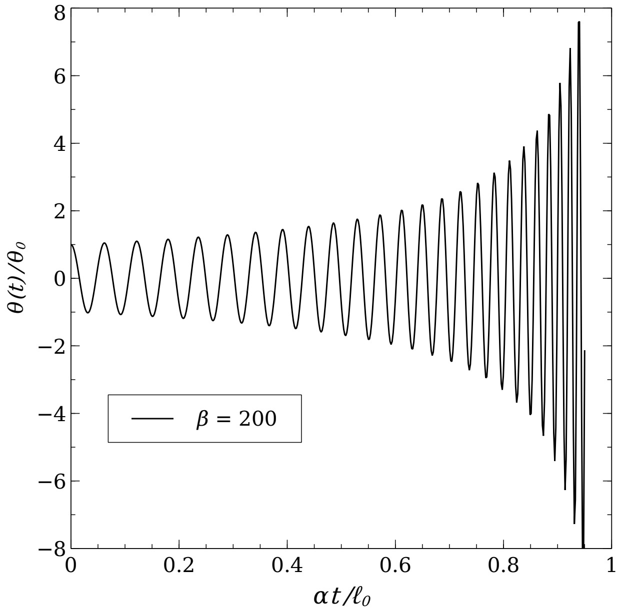
em termos das quais pode-se escrever

$$\frac{\theta(\tau)}{\theta_0} = \frac{1}{2}\frac{\pi\beta}{\sqrt{1-\tau}}\left[J_2(\beta)\,Y_1\left(\beta\sqrt{1-\tau}\right) - Y_2(\beta)\,J_1\left(\beta\sqrt{1-\tau}\right)\right].$$

A quantidade $\beta$ deve ser grande para que o pêndulo possa realizar várias oscilações. Nota-se também que

$$\lim_{\ell\to 0}\tau = 1.$$

A figura abaixo ilustra as oscilações a partir de $\theta_0$ para $\beta = 200$. Observa-se claramente como a amplitude e a frequência das oscilações aumentam à medida que o comprimento do pêndulo diminui.




**8)** *(a)* Hamiltoniana:

$$H(\rho,\phi,z,p_\rho,p_\phi,p_z) = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{\rho^2}{2m}\left(\frac{p_\phi}{\rho^2} - a\right)^2 + \frac{p_z^2}{2m}.$$

---

**10)** Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}\frac{p_z^2}{\rho^2/k^2+1} + mgz$$

Eqs. Hamilton:

$$\dot{z} = \frac{1}{m}\frac{p_z}{\rho^2/k^2+1}, \qquad \dot{p}_z = -mg.$$

---

**11)** *(a)* Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}\left[M\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\Theta}^2\right) + \mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)\right] - \frac{1}{2}k(r-\ell)^2.$$

*(c)* A Hamiltoniana:

$$H = \frac{p_R^2}{2M} + \frac{p_\Theta^2}{2MR^2} + \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}k(r-\ell)^2.$$

Equações canônicas de Hamilton:

$$\dot{R} = \frac{p_R}{M} \qquad \dot{p}_R = 0$$
$$\dot{\Theta} = \frac{p_\Theta}{MR^2} \qquad \dot{p}_\Theta = 0$$
$$\dot{r} = \frac{p_r}{\mu} \qquad \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - k(r-\ell)$$
$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2} \qquad \dot{p}_\theta = 0.$$