

# REDES NEURAIS ARTIFICIAIS PARA A RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE EM DOMÍNIOS MULTIDIMENSIONAIS

<sup>a</sup>Anderson B. Modena, <sup>b</sup>Vitória Biesek, <sup>c</sup>Pedro H. A. Konzen

<sup>a</sup>IME, Universidade Federal do Rio Grande do Sul

<sup>b</sup>PPGMap, IME, Universidade Federal do Rio Grande do Sul

<sup>a</sup>andersonmodena@hotmail.com, <sup>b</sup>vitoriabiesek@gmail.com, <sup>c</sup>pedro.konzen@ufrgs.br



XI ERMAC 23 - Pelotas, RS, Brasil

## Introdução

A resolução de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) é um desafio no campo da matemática computacional. *Physics-informed neural networks* (PINNs) são aplicações de técnicas de aprendizagem profunda para a solução de tais equações. Neste trabalho, aplicamos Redes Neurais Artificiais (RNAs) do tipo Perceptron Multicamadas (MLP), como ilustra o modelo da Figura 1.

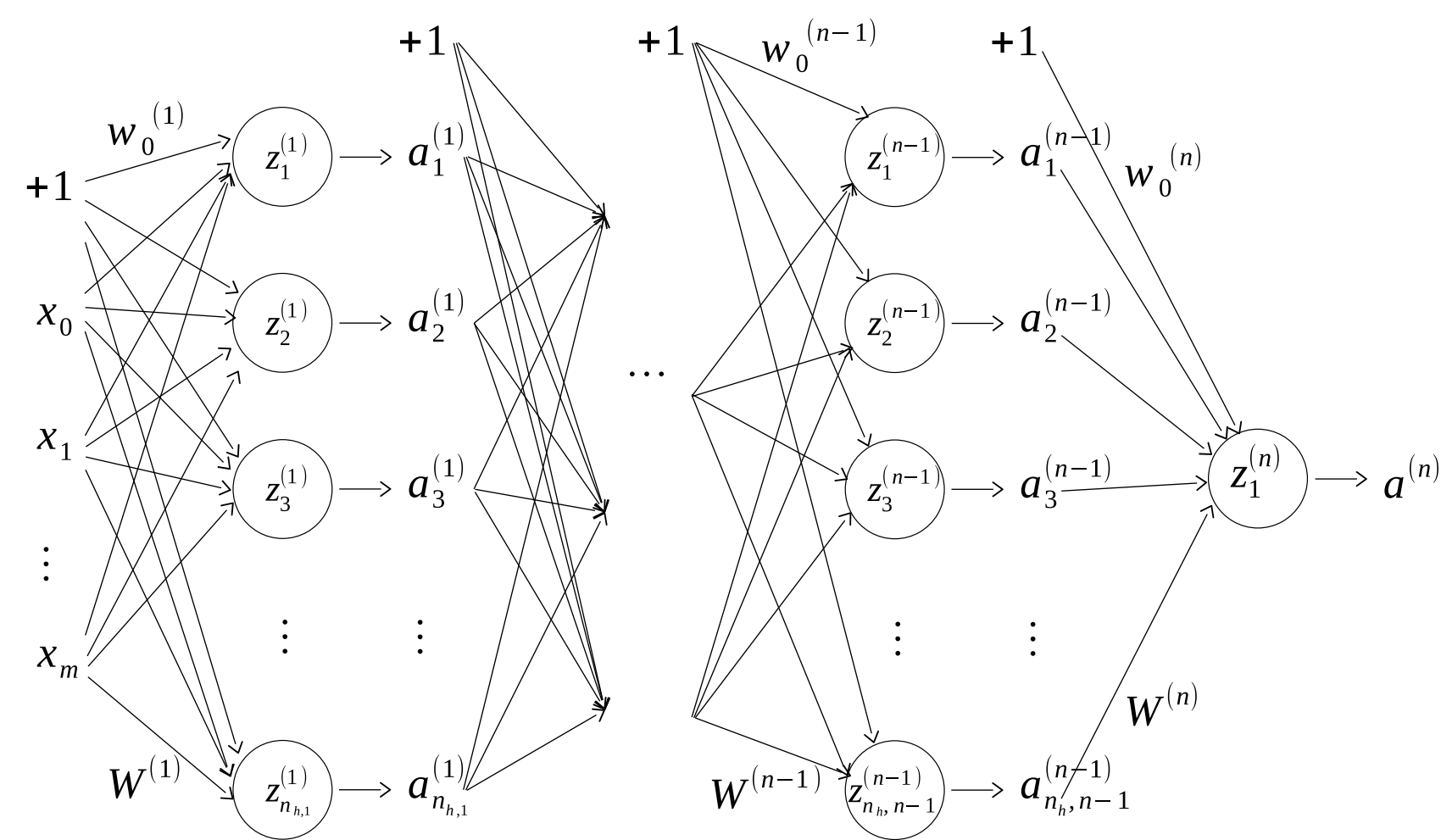


Figura 1: Modelo de RNA baseada em MLP

O objetivo é resolver a Equação de Laplace em domínios multidimensionais, considerando condições de contorno do tipo Robin. Buscamos uma alternativa promissora para a resolução dessas equações em comparação com métodos numéricos tradicionais. Esses métodos podem enfrentar dificuldades em obter soluções convergentes e também exigem um alto custo computacional.

## Problema Geral

### Equação de Laplace

$$\Delta u = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (1)$$

com condição de contorno de Robin

$$au + b \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g, \quad \mathbf{x} \in \partial D, \quad (2)$$

onde  $u = u(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^{1,2}$ ,  $\mathbf{n}$  é a normal unitária à fronteira  $\partial D$  e dados parâmetros  $a = a(\mathbf{x})$ ,  $b = b(\mathbf{x})$  e  $g = g(\mathbf{x})$ .

### Rede Neural Artificial

$$\tilde{u} = \mathcal{N}(\mathbf{x}; \left\{ \left( W^{(l)}, \mathbf{b}^{(l)}, f^{(l)} \right) \right\}_{l=1}^{n_l}), \quad (3)$$

onde  $\tilde{u} \approx u(\mathbf{x})$  é a saída estimada pela rede,  $\mathbf{x} \in \bar{D}$  as entradas,  $(W^{(l)}, \mathbf{b}^{(l)}, f^{(l)})$  é a tripla de pesos  $W^{(l)}$ , bias  $\mathbf{b}^{(l)}$  e função de ativação  $f^{(l)}$  na  $l$ -ésima camada da rede,  $l = 1, 2, \dots, n_l$ .

### Cálculo do Resíduo

O resíduo da EDP é dado por

$$r(\mathbf{x}, t) := \Delta u, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}. \quad (4)$$

### Treinamento da Rede

O treinamento da RNA é realizado resolvendo-se o problema de minimização

$$\min_{\{(W^{(l)}, \mathbf{b}^{(l)})\}_{l=1}^{n_l}} \left\{ \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} r^2(\mathbf{x}_{r,i}) + \frac{p}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} [\tilde{u}(\mathbf{x}_{b,i}) - u(\mathbf{x}_{b,i})]^2 \right\}, \quad (5)$$

onde  $\{\mathbf{x}_{r,i}\}_{i=1}^{N_r} \subset D$  são  $N_r$  pontos de colocação selecionados e  $\{\mathbf{x}_{b,i}\}_{i=1}^{N_b} \subset \partial D$  são  $N_b$  pontos de contorno selecionados.

### Problema 0. Unidimensional

$$u_{xx} = 0, \quad -1 < x < 1, \quad (6)$$

com condições de contorno dadas por

$$u(-1) = 1, \quad u(1) + u_x(1) = 4. \quad (7)$$

Este problema tem solução analítica dada por

$$u(x) = x + 2 \quad (8)$$

### Problema 1. Bidimensional

$$\Delta u = 0, \quad \mathbf{x} \in (1, 3) \times (0, 1), \quad (9)$$

com condições de contorno dadas por

$$-u_{x_2} = 0, \quad \mathbf{x} \in [1, 3] \times \{0\}, \quad (10)$$

$$u = \ln(x_2^2 + 1), \quad \mathbf{x} \in \{1\} \times [0, 1], \quad (11)$$

$$u = \ln(x_1^2 + 1), \quad \mathbf{x} \in [1, 3] \times \{1\}, \quad (12)$$

$$u + u_{x_1} = \ln(x_2^2 + 9) + \frac{6}{x_2^2 + 9}, \quad \mathbf{x} \in \{3\} \times [0, 1]. \quad (13)$$

Este problema tem solução analítica dada por

$$u(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2) \quad (14)$$

## Resultados

### Problema 0.

A função erro é dada por

$$\varepsilon := \frac{1}{ns} \left( \sum_{i=1}^{ns} |\tilde{u}_{xx}| \right) + |\tilde{u}(-1) - 1|^2 + |\tilde{u}(1) + \tilde{u}_x(1) - 4|^2 \quad (15)$$

$$= \frac{1}{ns} \left( \sum_{i=1}^{ns} \left| \frac{\tilde{u}_{i+1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i-1}}{h^2} \right| \right) + |\tilde{u}_0 - 1|^2 + \left| \tilde{u}_{ns} + \frac{\tilde{u}_{ns} - \tilde{u}_{ns-1}}{h} - 4 \right|^2 \quad (16)$$

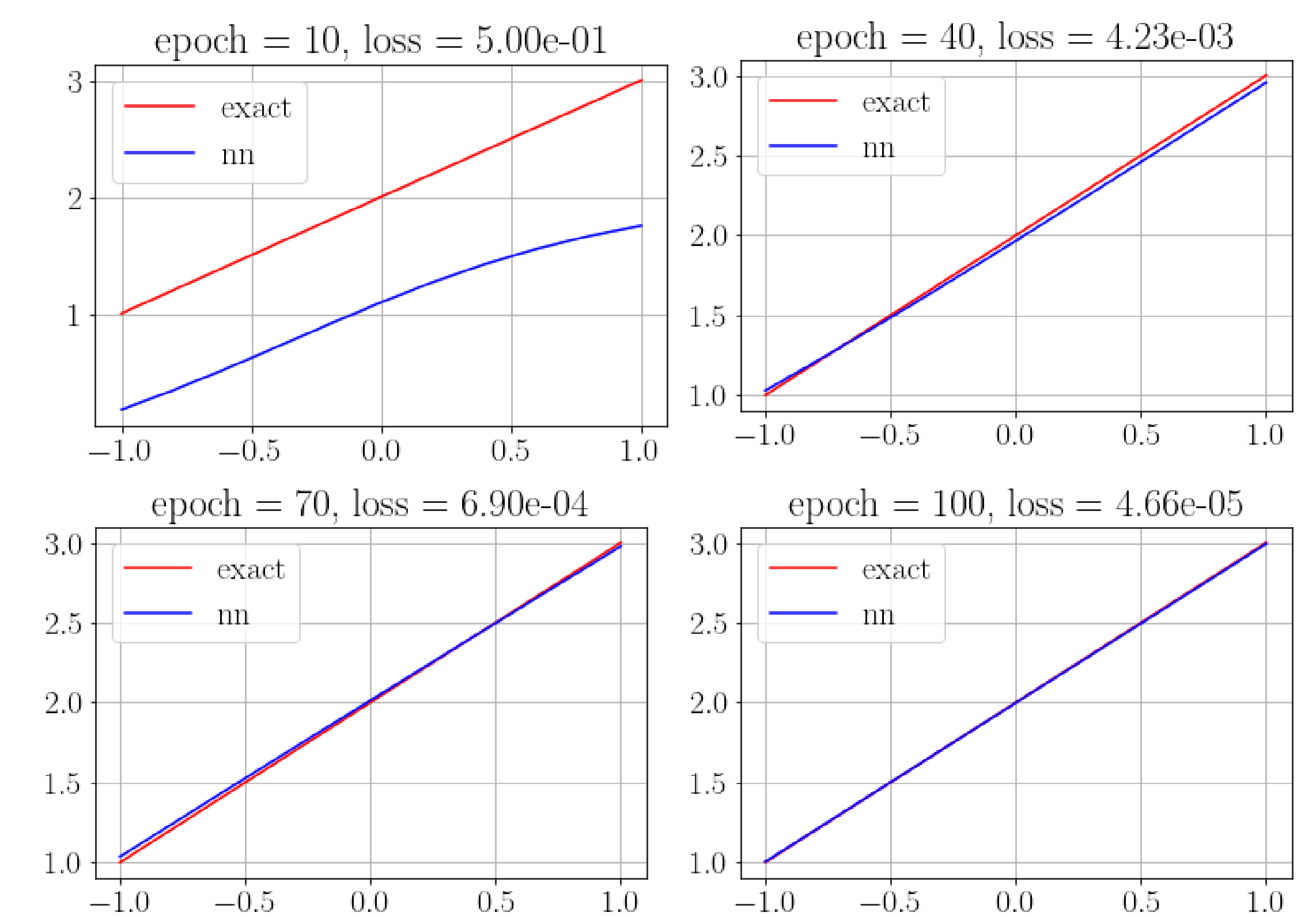


Figura 2: Estimativas da RNA em diferentes épocas do treinamento para o Problema 0.

### Problema 1.

A função erro é dada por

$$\varepsilon := \frac{1}{ns} \left( \sum_{i=1}^{ns} |\tilde{u}_{x_1 x_1} + \tilde{u}_{x_2 x_2}| \right) + |-\tilde{u}_{x_2}|^2 + |\tilde{u}(1, x_2) - \ln(x_2^2 - 1)|^2 + |\tilde{u}(x_1, 1) - \ln(x_2^2 - 1)|^2 + \left| \tilde{u}(3, x_2) + \tilde{u}_{x_1}(3, x_2) - \ln(x_2^2 + 9) - \frac{6}{x_2^2 + 9} \right|^2 \quad (17)$$

$$\varepsilon := \frac{1}{ns} \left( \sum_{i,j=1}^{ns} \left| \frac{\tilde{u}_{i+1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i-1}}{h^2} + \frac{\tilde{u}_{j+1} - 2\tilde{u}_j + \tilde{u}_{j-1}}{h^2} \right| \right) + |-\tilde{u}_{x_2}|^2 + |\tilde{u}(1, x_2) - \ln(x_2^2 - 1)|^2 + |\tilde{u}(x_1, 1) - \ln(x_2^2 - 1)|^2 + \left| \tilde{u}(3, x_2) + \tilde{u}_{x_1}(3, x_2) - \ln(x_2^2 + 9) - \frac{6}{x_2^2 + 9} \right|^2 \quad (18)$$

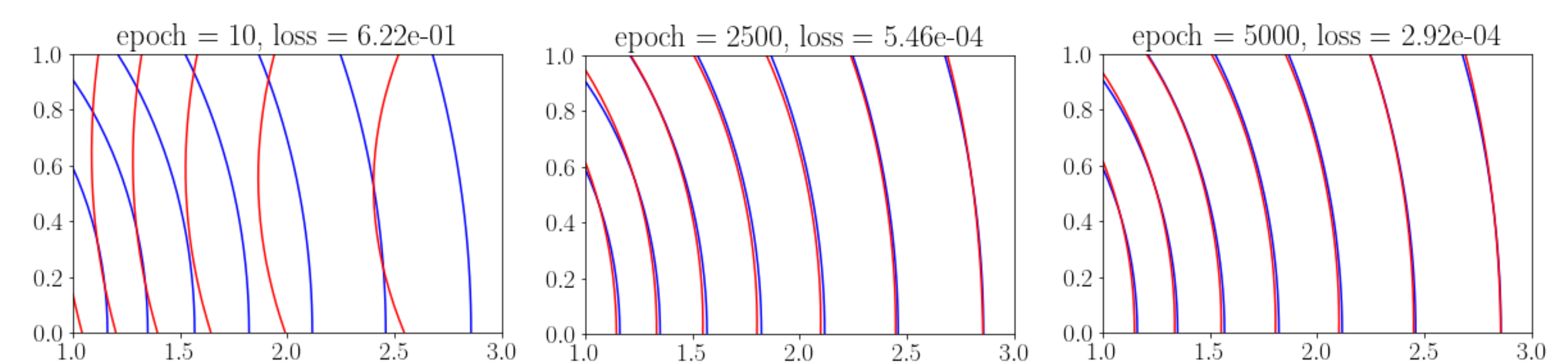


Figura 3: Estimativas da RNA em diferentes épocas do treinamento do Problema 1.

## Considerações Finais

Podemos concluir que as RNAs treinadas foram capazes de fornecer boas soluções aproximadas para os problemas estudados. Como futuras atividades, iremos verificar a diferença entre diferentes métodos de obtenção das derivadas, utilizando as derivadas automáticas da rede.

## Referências

- [1] Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A. **Deep Learning**. London: Massachusetts Institute of Technology, 2014. ISBN: 97800262035613.
- [2] Raissi, M., Perdikaris, P., Karniadakis, G.E. "Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations". Em: **Journal of Computational Physics** 378 (2019), pp. 686-707. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.10.045.