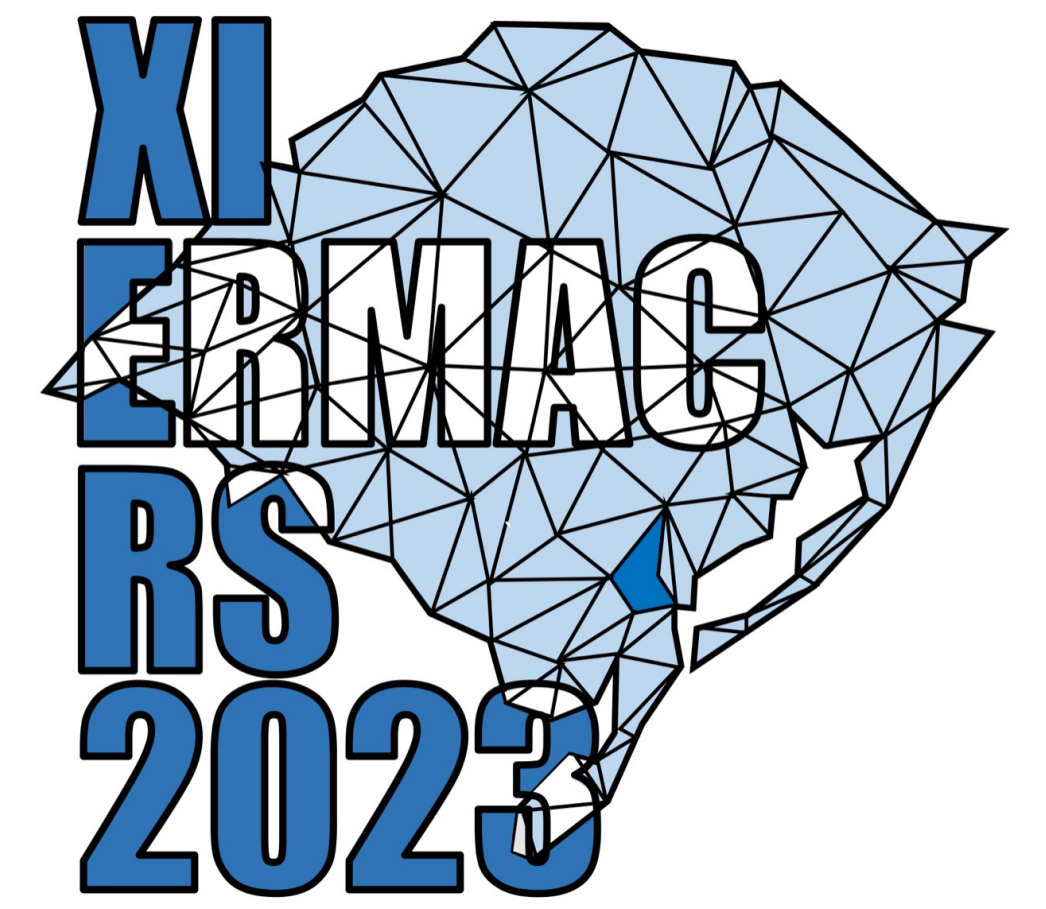


MÉTODO ANN-MoC PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE TRANSPORTE DE PARTÍCULAS NEUTRAS EM DOMÍNIO UNIDIMENSIONAL

^aAugusto Tchanchalam, ^bPedro Henrique de Almeida Konzen

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, IME, PPGMAp

^aaugustotchanchalam11@gmail.com, ^bpedro.konzen@ufrgs.br



28-30/Jun/2023, Pelotas, RS, Brasil

Introdução

Problemas de transporte de partículas neutras são fundamentais na modelagem de transferência de energia por radiação (fótons) e por nêutrons com muitas aplicações importantes [3, 4]. Algumas aplicações são encontradas nos campos da astrofísica, óptica médica, desenvolvimento de sistemas microeletromecânicos, entre outras. O transporte de nêutrons também tem aplicações na medicina e na geração de energia nuclear. Neste trabalho, apresentamos o novo método ANN-MoC para resolver problemas de transporte em domínios unidimensionais.

Assumimos que o transporte de partículas neutras é modelado em um domínio espacial unidimensional $\overline{\mathcal{D}} = [a, b]$ como segue

$$\forall \mu \in [-1, 1] : \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x} I(x, \mu) + \sigma_t I = \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 I(x, \mu') d\mu' + q(x, \mu), \forall x \in \mathcal{D}, \quad (1a)$$

$$\forall \mu > 0 : I(a, \mu) = I_a; \quad \forall \mu < 0 : I(b, \mu) = I_b, \quad (1b)$$

onde $I(x, \mu)$ é o fluxo angular de partículas no ponto $x \in \overline{\mathcal{D}} = [a, b]$ e na direção $\mu \in [-1, 1]$, $\sigma_t = \kappa + \sigma_s$ é o coeficiente de absorção total e σ_s o coeficiente de espalhamento, $q(x, \mu)$, I_a e I_b são, respectivamente, as fontes em \mathcal{D} e em seus extremos. O fluxo médio de partículas é dado por $\Psi(x) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(x, \mu) d\mu$.

O Método ANN-MoC

Seguindo o Método das Ordenadas Discretas (DOM), assumimos uma quadratura numérica $\{\mu_i, w_i\}_{i=1}^N$, e a aproximação da Iteração da Fonte (SI) do problema (1) é dada da seguinte forma

$$i = 1, \dots, N : \mu_i \cdot \frac{\partial}{\partial x} I_i^{(j)}(x, \mu_i) + \sigma_t I_i^{(j)}(x) = \sigma_s \Psi^{(j-1)}(x) + q(x, \mu_i), \forall x \in D, \quad (2a)$$

$$\mu_i > 0 : I_i^{(j)}(a) = I_a, \quad \mu_i < 0 : I_i^{(j)}(b) = I_b, \quad (2b)$$

onde $I_i^{(j)} \approx I^{(j)}(x, \mu_i)$, $l = 1, 2, \dots, L$, e $\Psi^{(0)}(x)$ é uma aproximação inicial dada para $\Psi(x)$. Então, a j -ésima aproximação do fluxo médio é dada por

$$\Psi^{(j)}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i I_i^{(j)}(x) \quad (3)$$

Agora usamos o Método das Características (MoC) aplicando a mudança de variáveis $x(s) = x_0 + s\mu_i$. Então, para cada $i = 1, \dots, N$, a equação (2a) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{d}{ds} I_i^{(j)}(s) = \sigma_s \Psi^{(j-1)}(s) + q(s, \mu_i), \quad (4)$$

onde $I_i^{(j)}(s) = I_i^{(j)}(x(s))$, e análogo para os outros termos. Por fator de integração obtém-se

$$I_i^{(j)}(s) = I_i^{(j)}(0) e^{-\int_0^s \sigma_t ds'} + \int_0^s [\Psi^{(j)}(s') + q(s', \mu_i)] e^{-\int_s' s \sigma_t ds''} ds' \quad (5)$$

Estimativa do Fluxo Médio por ANN

A estimativa $\tilde{\Psi}$ é obtida por uma ANN do tipo MLP (*Multilayer Perceptron*) com estrutura fixa. A rede é treinada resolvendo-se o seguinte problema de otimização

$$\min_{\{(W^{(l)}, b^{(l)})\}_{l=1}^{n_s}} \frac{1}{n_s} \sum_{m=1}^{n_s} |\tilde{\Psi}^{(m)} - \Psi^{(m)}|^2 \quad (6)$$

para um dado conjunto de treinamento $\{x^{(m)}, \tilde{\Psi}^{(m)}(x^{(m)})\}_{m=1}^{n_s}$ onde n_s é o número de amostras.

O Algoritmo ANN-MoC

1. Defina a estrutura da ANN $\mathcal{N}(x)$ com pesos e bias aleatórios.
2. Defina uma aproximação inicial $\Psi^{(0)}(x)$ para todo $x \in \overline{\mathcal{D}}$.
3. Defina n_s e o conjunto de pontos $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{n_s}$.
4. Treine a ANN com o conjunto de treinamento $\{x^{(m)}, \tilde{\Psi}^{(m)}(x^{(m)})\}_{m=1}^{n_s}$.
5. Defina a quadratura $\{\mu_i, w_i\}_{i=1}^N$.
6. Para $j = 1, \dots, L$:

6.a) Para $i = 1, \dots, N$, para $m = 1, \dots, n_s$:

* Se $\mu_i > 0$, então $s = (x^{(m)} - a)/\mu_i$

$$I_i^{(j)}(x^{(m)}) = I_a e^{-\int_0^s \sigma_t ds'} + \int_0^s [\mathcal{N}(s') + q(s', \mu_i)] e^{-\int_s' s \sigma_t ds''} ds' \quad (7)$$

* Se $\mu_i < 0$, então $s = (x^{(m)} - b)/\mu_i$

$$I_i^{(j)}(x^{(m)}) = I_b e^{-\int_0^s \sigma_t ds'} + \int_0^s [\mathcal{N}(s') + q(s', \mu_i)] e^{-\int_s' s \sigma_t ds''} ds' \quad (8)$$

6.b) Calcule $\Psi^{(j)} = \frac{1}{2} \sum_i w_i I_i^{(j)}$

6.c) Retreine a ANN $\mathcal{N}(x)$ com o novo conjunto de treinamento $\{x^{(m)}, \Psi^{(j)}(x^{(m)})\}_{m=1}^{n_s}$.

6.d) Verifique um dado critério de parada.

6.e) Redefina o conjunto aleatório de pontos $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{n_s}$.

Resultados

Problema 1. Solução manufaturada

- Solução exata

$$\hat{I}(x, \mu) = e^{-\alpha \sigma_t x}$$

- Fonte

$$q(x, \mu) = \sigma_t (1 - \alpha \mu) e^{-\alpha \sigma_t x}$$

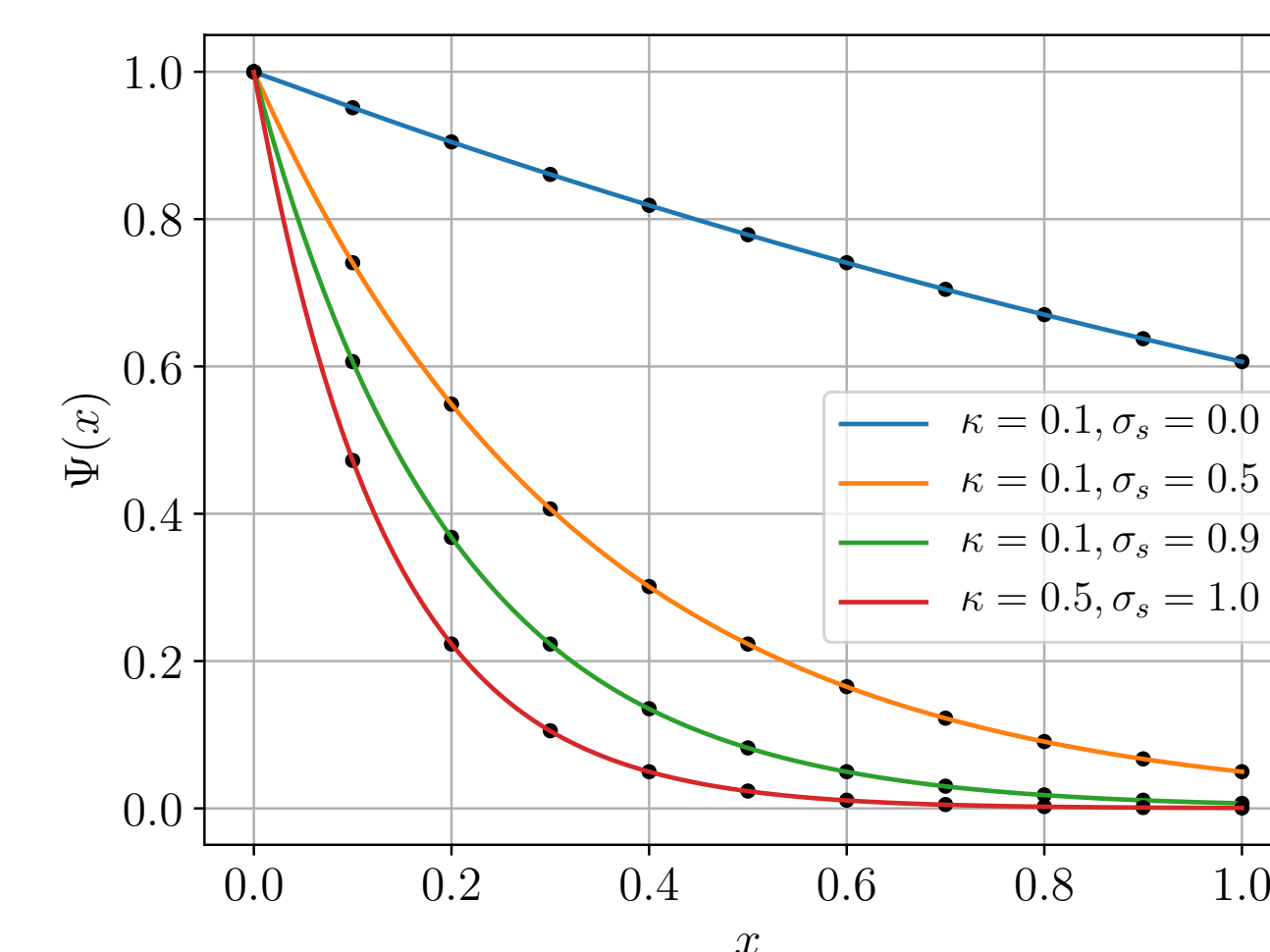


Figura 1: ANN-MoC (linhas) versus as soluções exatas (pontos) para vários valores de κ e σ_s .

Problema 2. Solução benchmark

Problema *benchmark* disponível na literatura [5, Table 1], onde a fonte é dada por

$$q(x, \mu) = x - x^2$$

e as condições de contorno são do tipo vácuo.

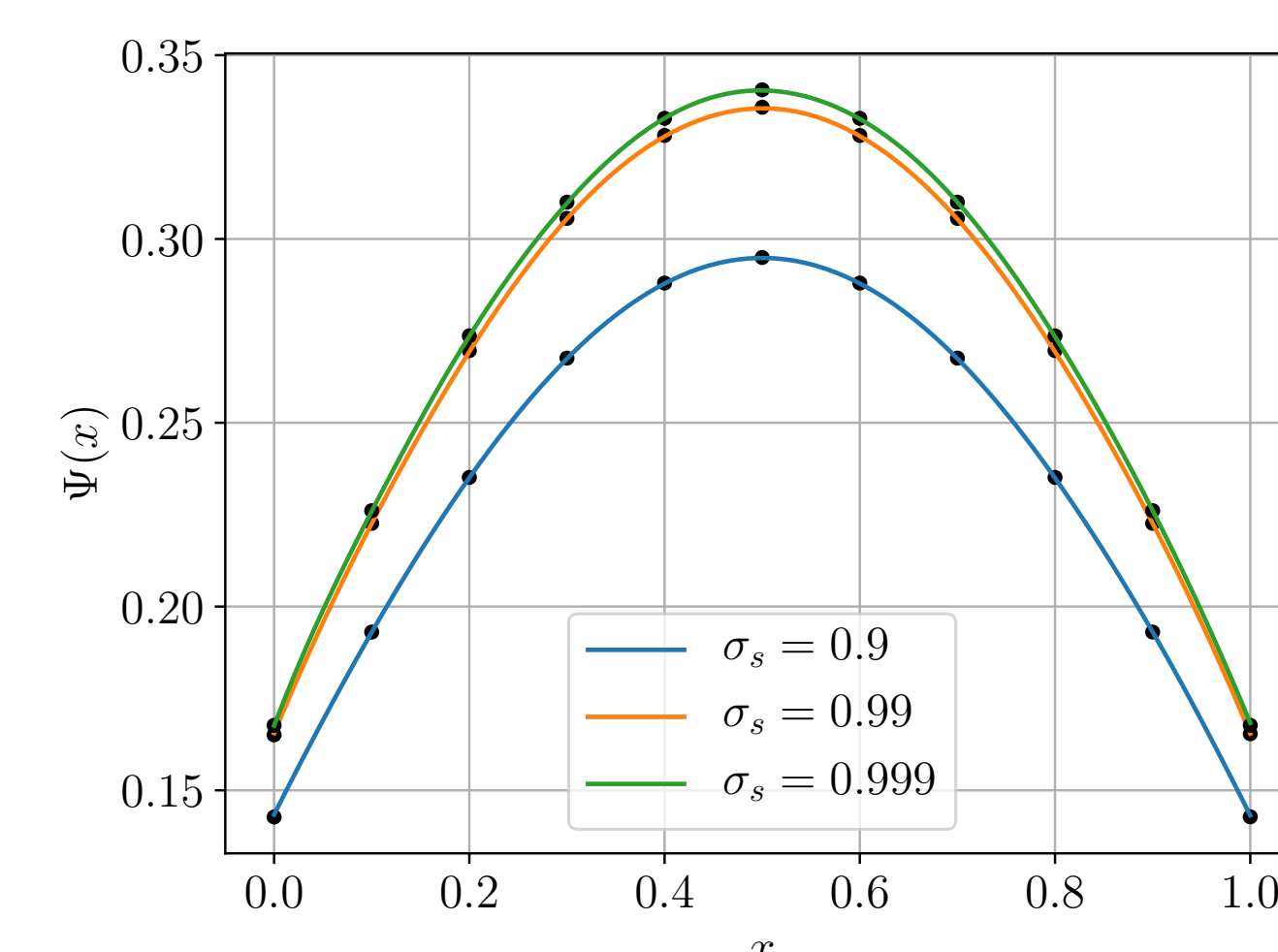


Figura 2: ANN-MoC (linhas) versus as soluções exatas (pontos) para o Problema 2 com $\sigma_s = 0, 9, 0, 99$ e $0, 999$.

Considerações Finais

Em comparação com as estratégias DOM-MoC, o novo método tem a vantagem de não depender de malha e fornecer uma ANN para estimar o fluxo médio de partículas em qualquer ponto do domínio. Os resultados alcançados indicam a potencialidade da técnica proposta.

Referências

- [1] Evans, L.C. **Partial Differential Equations**, 2. ed. Providence: AMS, 2010. ISBN: 978-0821849743.
- [2] Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A. **Deep Learning**. London: Massachusetts Institute of Technology, 2016. ISBN: 978-0262035613.
- [3] Modest, M.F. **Radiative Heat Transfer**, 3. ed. New York: Elsevier, 2013. ISBN: 978-0123869906.
- [4] Stacey, W.M. **Nuclear Reactor Physics**, 2. ed. Weinheim: Wiley-VCH, 2007. ISBN: 978-3527413669.
- [5] Vargas, R.F.; Segatto, C.F.; Vilhena, M.T. "Solution of the radiative heat transfer equation with internal energy sources in a slab by the LTSN method". Em: **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer** 105 (2017), pp. 1-7. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2006.10.009.