# Rede Neural Informada por Modelo de Crescimento Econômico AK Espacial

Fernando Dudczak Lummertz*[1], Vitória Biesek[2], Pedro Henrique de Almeida Konzen[3], João Plínio Juchem Neto[4]

[1,4]FCE, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil
[2,3]PPGMAp, IME, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil

O modelo de crescimento econômico AK espacial, recentemente proposto por Juchem Neto (2023), considera uma economia espacial representada por um intervalo compacto da reta, sendo cada ponto neste intervalo uma economia local. Este modelo descreve a evolução espaço-temporal do capital per capita da economia, a partir de uma distribuição inicial dada, considerando uma função de produção linear, taxas de poupança e depreciação do capital constantes e um movimento espacial difusivo do capital, com este se movimentando para regiões onde é mais escasso. Ao considerar condições de contorno do tipo Neumann homogêneas - que representam uma economia espacial autárquica, sem troca de capital com o exterior - esse modelo é capaz de gerar um crescimento persistente do capital per capita da economia no longo prazo, desde que a taxa de poupança seja grande o suficiente, assim como na sua versão original não-espacial (Barro & Sala-I-Martin, 2004; Jones, 2000). Ao considerar condições de contorno Dirichlet homogêneas, este modelo espacial também é capaz de considerar economias onde por algum motivo há destruição de capital em sua fronteira, possibilitando analisar o impacto de tais cenários na economia como um todo. Matematicamente, o modelo AK espacial consiste na seguinte equação diferencial parcial (EDP):

$$u_t = (sA - \delta)u + du_{xx},\ x \in (0, L),\ 0 < t \leq t_f, \tag{1}$$

onde $u = u(t,x) \geq 0$ denota a densidade do capital *per capita* da economia. Assumindo um espaço homogêneo, temos que $t_f, d > 0$, $s, \delta \in (0, 1)$ são constantes. Ainda, consideramos dadas condição inicial e condições de contorno mistas homogêneas.

Neste trabalho, apresentamos aplicações de PINNs (do inglês, *physics-informed neural networks*, (Raissi et al., 2019)) para a solução do modelo AK. PINNs são técnicas de aprendizagem profunda (Goodfellow et al., 2016) para a resolução de EDPs. Assumindo uma discretização no tempo $t^{(k)} = kh_t$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n_t$, com $n_t$ passos de tamanho $h_t = t_f/n_t$, buscamos estimar a solução de (1) por uma sequência $\left(\tilde{u}^{(k)} = \mathcal{N}^{(k)}(x)\right)_{k=1}^{n_t+1}$ de redes neurais do tipo perceptron

*fedulummertz@gmail.com

multicamadas (MLP, do inglês, *multilayer perceptron*)

$$\tilde{u}^{(k)}(x) = \mathcal{N}^{(k)}\left(x; \left\{\left(W^{(l)}, \boldsymbol{b}^{(l)}, \boldsymbol{f}^{(l)}\right)\right\}_{l=1}^{n_l}\right), \tag{2}$$

onde, $\tilde{u}^{(k)}(x) \approx u\left(t^{(k)}, x\right)$ e $\left(W^{(l)}, \boldsymbol{b}^{(l)}, \boldsymbol{f}^{(l)}\right)$ denota tripla de pesos, *biases* e função de ativação da $l$-ésima camada da rede, $l = 1, 2, 3, \ldots, n_l$.

Para o treinamento das redes neurais, aplicamos um esquema de Euler implícito com transferência de aprendizado (Biesek et al., 2023). Assumindo uma malha espacial $x_i = (i-1)h_x$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n_x + 1$, com $n_x$ passos de tamanho $h_x = L/n_x$, a rede $\mathcal{N}^{(k)}$ é treinada pela resolução do seguinte problema de minimização

$$\min_{\left\{\left(W^{(l)}, \boldsymbol{b}^{(l)}\right)\right\}_{l=1}^{n_l}} \left\{\frac{1}{n_x - 1}\sum_{s=2}^{n_x-1}\left|r_{\mathrm{in},i}^{(k)}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{x_s=0,L}\left|r_{\mathrm{cc},x_s}^{(k)}\right|^2\right\}, \tag{3}$$

onde, $r_{\mathrm{in},i}^{(k)}$ é o resíduo de Euler implícito

$$r_{\mathrm{in},i}^{(k)} := \tilde{u}^{(k)}(x_i) - \tilde{u}^{(k-1)} + h_t\left[(sA - \delta)\tilde{u}^{(k)}(x_i) + d\tilde{u}_{xx}^{(k)}(x_i)\right] \tag{4}$$

e nos contornos $r_{\mathrm{cc},x_s}^{(k)} = a\tilde{u}^{(k)}(x_s) - b\tilde{u}_x^{(k)}(x_s)$, para $x_s = 0, L$. As derivadas são estimadas diretamente da rede neural por diferenciação automática. A inicialização dos pesos e *biases* da rede $\mathcal{N}^{(1)}$ é feita por distribuição uniforme. Uma vez treinada, é feita a transferência de aprendizado, inicializando a rede $\mathcal{N}^{(k+1)}$ a partir dos parâmetros da rede $\mathcal{N}^{(k)}$. O esquema computacional proposto foi implementado em linguagem Python com a ajuda do pacote de aprendizado de máquina PyTorch.

Esta pesquisa está em desenvolvimento, sendo que experimentos numéricos preliminares indicam que boas estimativas da solução podem ser obtidas empregando redes com arquitetura $1 - 50 \times 4 - 1$, tangente hiperbólica como função de ativação nas camadas escondidas e função identidade na camada de saída. Resultados numéricos e comparações com soluções analíticas serão apresentados para três estudos de caso reportados por Juchem Neto (2023) - com condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mistas homogêneas.

## Referências Bibliográficas


Barro, B., Sala-I-Martin, X. (2004). *Economic growth*, 2ed., MIT Press.

Biesek, V., Konzen, P.H.A. (2023) "Burgers' PINNs with implicit Euler transfer learning". Aceito em: *XXVI Encontro Nacional de Modelagem Computacional (XXVI ENMC) e XIV Encontro de Ciência e Tecnologia de Materiais (XIV ECTM)*, Nova Friburgo, Brasil.

Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A. (2016). *Deep Learning*, 1ed., MIT Press.

Jones, C. (2000). *Introdução à teoria do crescimento econômico*, 1ed., Elsevier.

Juchem Neto, J.P. (2023). Uma versão espacial do modelo de crescimento econômico AK, Aceito em *Revista Eletrônica da Matemática.*

Raissi, M., Perdikaris, P., Karniadakis, G.E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378, 686-707.