Introdução ao Cálculo Estocástico

Nelson Seixas dos Santos

Faculdade de Ciências Econômicas
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

4 de novembro de 2017

Sumário

Introdução

Problema

Prever os preços das ações.

Importância do problema

- Prática: a possibilidade de previsão melhoraria a gestão dos fundos de investimento
- Teórica: compreender como os recursos poupados pelos indivíduos são direcionados às empresas por meio do mercado de capitais.
- Empírica: permitir o teste de teorias alternativas sobre o funcionamento do mercado de capitais.

Introdução (cont.)

Fatos estilizados

1. os preços de ações parecem ser aleatórios.
2. os preços variam ao longo do tempo.

Método

Construir um modelo matemático que descreva os preços como fenômeno aleatório e dinâmico.

Processo Estocástico

Definição

Um processo estocástico é uma função $X : \Omega \times \Theta \to \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado (ω, t) um número real.

Observações

- Se fixarmos t e fizermos apenas ω variar, o processo estocástico se reduz a uma variável aleatória que pode ser escrita como $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$;
- Se fixarmos ω e variarmos apenas t, o processo estocástico se reduz a uma função de t;
- Se interpretarmos t como sendo a variável tempo, então o processo pode ser interpretado como a descrição de um fenômeno aleatório ao longo do tempo, tendo em vista que uma variável aleatória representa o conjunto de valores que a medida de um grandeza em um experimento aleatório pode assumir. Por exemplo, a temperatura dentro de um carro que passa por diferentes condições meteorológicas. O valor da temperatura é o resultado (realização) do experimento (viagem de carro) e pode ser representado por uma variável aleatória;

Observações 2

- Se $\Theta = \mathbb{Z}_+$, então o processo estocástico é uma sequência de variáveis aleatórias e é chamado de processo estocástico discreto.
- Se $\Theta = \mathbb{R}_+$, dizemos que o processo é contínuo na variável.

Exemplos

1. Se o preço de fechamento de uma ação é uma variável aleatória, então a sequência de preços de fechamento é um processo estocástico discreto.
2. O retorno de uma ação é calculado como uma variação no seu preço. Logo, o retorno também é um processo estocástico.

Ruído Branco

Definição

Um ruído branco é uma sequência de variáveis aleatórias (processo estocástico discreto) não autocorrelacionadas entre si $\epsilon : \Omega \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ com média zero e variância constante, isto é, $\forall t, s \in \mathbb{Z}_+$, temos que:

$$E(\epsilon_t) = 0 \tag{1}$$

$$var(\epsilon_t) = \sigma^2 \tag{2}$$

$$cov(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0 \tag{3}$$

Passeio Aleatório

Definição

Um passeio aleatório é um processo estocástico discreto $X : \Omega \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ tal que:

$$X_0 = 0 \tag{4}$$

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t, \quad \forall t > 0 \tag{5}$$

onde ϵ_t é um ruído branco.

Cálculo estocástico

É a parte do cálculo que estuda limite, derivada e integral de funções de variáveis aleatórias.

Limites de variáveis aleatórias

Há várias noções de limites de variáveis aleatórias, sendo seguintes as mais comuns destas noções:

- limite em probabilidade;
- limite em distribuição, e
- limite em média quadrática.

O conjunto L^2

Chama-se de L^2 ao conjunto das variáveis aleatórias $X : \Omega \to \mathbb{R}$ com variância finita, isto é, $var(X) < \infty$.

Limite em média quadrática

Diz-se que uma sequência de variáveis aleatórias (ou processo estocástico discreto) $(X_t)_{t=0}^{\infty}$ converge para uma variável aleatória X se $\forall \epsilon > 0, \exists T \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$t > T \implies |X_t - X| < \epsilon \tag{6}$$

Diferencial estocástica I

Observação 1

A diferencial pode ser entendida intuitivamente como um limite de uma diferença entre dois elementos de um conjunto. Em L^2, isto seria o limite entre a diferença entre duas variáveis aleatórias. Podemos olhar, em cada instante de tempo, para a convergência entre variáveis aleatórias que compõem os dois processos estocásticos, isto é, limite em média quadrática.

Diferencial estocástica II

Observação 2

Defina $\Delta X(t) = X(t + \Delta(t)) - X(t)$ com $\Delta(t) > 0$. Faça $dX(t) = \lim_{\Delta(t) \to 0} \Delta X(t)$. Note que, por menor que seja $\Delta(t)$, a diferença obtida ainda será a subtração entre duas variáveis aleatórias. Logo, será também uma variável aleatória. Assim, $dX(t)$ será a variável aleatória limite para o qual converge esta diferença em vez de simplesmente se aproximar de zero.

Diferencial e Integral estocásticas I

Note que $\forall t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t$ o processo pode ser escrito como segue:

$$X(t) = X(t_0) + \Delta X(t) \tag{7}$$

Onde: $\Delta X(t) = X(t) - X(t_0)$
Mas:

$$\begin{aligned} \Delta X(t) = {} & [X(t_n) - X(t_{n-1})] + [X(t_{n-1}) - X(t_{n-2})] \\ & + \ldots + [X(t_1) - X(t_0)] \end{aligned} \tag{8}$$

Diferencial e Integral estocásticas II

Ou seja:

$$\Delta X(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \left[X(t_{i+1}) - X(t_i) \right]$$

Calculando o limite do processo quando $t_n \rightarrow t_0$, temos:

$$X(t) = X(t_0) + \lim_{t_n \rightarrow t_0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \left[X(t_{i+1}) - X(t_i) \right] \qquad (9)$$

Diferencial e Integral estocásticas III

Definição: integral estocástica

A partir da equação (9), podemos definir a integral estocástica como segue:

$$X(t) \equiv X(t_0) + \int_{t_0}^{t} dX$$

Ou, mais claramente:

$$\int_{t_0}^{t} dX \equiv X(t) - X(t_0) \tag{10}$$

Observação

- Esta definição de integral permite definir diferencial de um processo, porém explicita apenas a evolução temporal do mesmo, escondendo sua evolução probabilística.
- De fato, deve-se atentar para o fato que, na construção da integral, se tem a soma de infinitas variáveis aleatórias com os primeiros dois momentos finitos.
- Pelo teorema central do limite, sabemos que esta soma converge para uma normal. Este é o chamado processo de Wiener ou movimento browniano padrão.
- Este é o ponto que iremos explorar agora, isto é, faremos a construção definitiva da diferencial estocástica a partir da construção da integral estocástica.

Integral estocástica e movimento browniano I

Observe a equação (9). Suponha que X é um passeio aleatório e note que ela podemos reescrevê-la como segue:

$$X(t) = X(t_0) + n. \lim_{t_n \to t_0} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \left[X(t_{i+1}) - X(t_i) \right]$$

Ou ainda:

$$X(t) = X(t_0) + n. \lim_{t_n \to t_0} E \left\{ \Delta \left[X(t_{i+1}) - X(t_i) \right] \right\} \qquad (11)$$

Integral estocástica e movimento browniano II

Passando $X(t_0)$ para o outro lado da igualdade em (11), obtemos:

$$X(t) - X(t_0) = n. \lim_{t_n \to t_0} E\left\{\Delta\left[X(t_{i+1}) - X(t_i)\right]\right\}$$

Ou ainda:

$$\int_{t_0}^{t} dX = n. \lim_{t_n \to t_0} E\left\{\Delta\left[X(t_{i+1}) - X(t_i)\right]\right\} \qquad (12)$$

Integral estocástica e movimento browniano III

Como X é um passeio aleatório, pelo teorema central do limite, temos que o limite da equação (12) converge para distribuição normal de média 0 e variância $\frac{\sigma^2}{n}$, isto é:

$$\int_{t_0}^{t} dX = n.N(0, \frac{\sigma^2}{n}) \equiv W \tag{13}$$

Onde W é o processo contínuo no tempo denominado **movimento browniano padrão** ou **processo de Wiener**, sendo seu limite uma distribuição normal com média zero e variância igual a 1.

Integral de Itô

Corolário (Integral de Itô)

Seja $\left(\Omega, \Sigma, (\Sigma_t)_{t\in\Upsilon}, P\right)$ *um espaço de probabilidade filtrado. Considere um processo de Wiener* $W : \Omega \times \Upsilon \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}^2$ *e processo previsível* $\theta : \Omega \times \Upsilon \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}^2$*. Então, a integral estocástica abaixo existe e é denominada Integral de Itô:*

$$\int \theta.dW \equiv \int_\Upsilon \theta(\omega, t).dW(\omega, t) < \infty$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \theta(\omega, t_i).\left[W\left(t_{i+1}\right) - W\left(t_i\right)\right] \tag{14}$$

Propriedades da Integral de Itô

Proposição

- *A integral de Itô é um martingale*
- *A integral de Itô é linear.*
- *A integra de Itô não é integrável nas trajetórias ("pathwise integrable") se f é contínua e não antecipativa.*
- *A integral de Itô é isométrica. Isto é:*

$$E\left\{\left[\int_0^t f.dW\right].\left[\int_0^t g.dW\right]\right\} = \int_0^t E\left\{f.g\right\}.ds$$

$$e$$

$$E\left\{\int_0^t f.dW\right\}^2 = E\left\{\int_0^t f^2.ds\right\}$$

Calculando a primeira integral de Itô I

Exemplo

Seja $X(t) = dW(t)$ definido em um espaço de probabilidade filtrado $\left(\Omega, \Sigma, (\Sigma_t)_{t\in\Upsilon}, P\right)$. Determine $\int_0^T dW.dW$

Observação

Note que, embora querer calcular esta integral possa parecer estranho do ponto de vista do cálculo de integrais de Riemman, dW é um processo estocástico que atende a todas as propriedades necessárias para o procedimento de integração de Itô.

Calculando a primeira integral de Itô II

Inicialmente, note que:

$$\int_0^T dW.dW = \int_0^T E\,(dW)^2\,.dt$$

Mas:

$$\int_0^T E\,(dW)^2\,.dt = \int_0^T dt$$

Pois a esperança dentro do sinal de integral corresponde à variância do processo de Wiener.

Calculando a primeira integral de Itô III

Ou seja:

$$\int_0^T (dW)^2 = \int_0^T dt$$

Isto é:

$$(dW)^2 = dt \tag{15}$$

Calculando a primeira integral de Itô IV

Observação

- De modo geral, nos cálculos, utilizaremos a equação 15 para determinar as integrais.
- Muitas vezes, não é possível calcular os limites em média quadrática analiticamente. Não obstante, uma vez sabido que o limite existe, pode-se empregar métodos numéricos para o cálculo da integral de Itô.
- A equação 15 é o ponto inicial que permite compreender o Lema de Itô.

Processos de Itô

Definição (Processo de Itô)

Seja $\left(\Omega, \Sigma, (\Sigma_t)_{t \in \Upsilon}, P\right)$ um espaço de probabilidade filtrado, $W(t)$ um processo de Wiener Σ_t-adaptado, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $X : \Omega \times \Upsilon \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}^2$ um processo estocástico em tempo contínuo definido por $X(t) = f(W, t)$. Dizemos que X é um processo de Itô se, $\forall t \in \Upsilon$ X puder ser escrito como segue:

$$X(T) = X(0) + \int_0^T a(t).dt + \int_0^T \theta(t).dW \tag{16}$$

Ou ainda, na forma diferencial, temos:

$$dX = a(t).dt + \theta(t).dW \tag{17}$$

Observação

Forma diferencial do processo de Itô e EDE

A forma diferencial dos processo de Itô, neste momento, pode ser entendida apenas como uma notação ou como um tipo particular de equação diferencial estocástica (EDE) que é um objeto matemático que estudaremos posteriormente.

Diferenciando Processos de Itô I

Teorema (Lema de Itô)

Seja $\left(\Omega, \Sigma, (\Sigma_t)_{t\in\Upsilon}, P\right)$ *um espaço de probabilidade filtrado,* $W(t)$ *um processo de Wiener* Σ_t*-adaptado,* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2 *e* $X : \Omega \times \Upsilon \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}^2$ *um processo de Itô* Σ_t*-adaptado e* Y *um processo estocástico em tempo contínuo definido por* $Y(t) = f(X)$*. Nestas condições, temos que:*

$$Y = f(X(0)) + \left[f'(X).a + \frac{1}{2}\theta^2 f''(X)\right].dt + f'(X).\theta.dW \quad (18)$$

Diferenciando Processos de Itô II

Teorema (Lema de Itô)

Seja $\left(\Omega, \Sigma, (\Sigma_t)_{t\in\Upsilon}, P\right)$ *um espaço de probabilidade filtrado,* $W(t)$ *um processo de Wiener* Σ_t*-adaptado,* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^2*,* $X : \Omega \times \Upsilon \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}^2$ *um processo de Itô* Σ_t*-adaptado e* Y *um processo estocástico em tempo contínuo definido por* $Y(t) = f(X,t)$*. Nestas condições, temos que:*

$$\begin{aligned} Y =& f(X(0,0)) + \frac{\partial f}{\partial X}.a(t).dt + \\ & \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}.\theta^2(t)dt + \\ & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}.\theta(t)dW \end{aligned} \tag{19}$$