Escolha Intertemporal

Nelson S. dos Santos

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Faculdade de Ciências Econômicas
Departamento de Economia e Relações Internacionais

March 20, 2015

Introdução

- Modelo de Fisher
- Taxa de juros
- Curva de juros
- Aplicações: mercado financeiro

O Tempo

- Existem T+1 datas
- As datas são elementos do conjunto $\Upsilon = \{0, 1, 2, 3, ..., T-1, T\}$
  Existem T períodos de tempo.

Bem

- Em cada período, existe um único bem - chamado consumo - denotado por C_t onde t é o período em que o bem é consumido.
- O consumo atende a todas as necessidades dos indivíduos.
- O consumo pode ser entendido como sendo a cesta composta por todos os bens da economia em um dado instante nas quantidades necessárias para atender a todas as necessidades de cada um dos indivíduos.
- Exemplo: cesta básica ou uma cesta básica estendida.

Cesta de Consumo Intertemporal

Cesta de Consumo Intertemporal

- Os indivíduos escolhem entre diferentes alternativas de trajetórias de consumo ao longo do tempo.
- Cada trajetória é uma cesta de consumo intertemporal tal como mostrado abaixo.

$$(C_1, C_2, C_3, ..., C_{T-1}, C_T)$$

Preferências

- Os indivíduos tem preferências entre diferentes alternativas de trajetórias de consumo ao longo do tempo.
- Estas preferências podem ser sintetizadas por uma função de utilidade como a mostrada abaixo.

$$U : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$$

definida por

$$V = U\left(C_1, C_2, C_3, ..., C_{T-1}, C_T\right)$$

Impaciência

- As pessoas preferem consumir no presente a consumir no futuro. (Hipótese da impaciência)
- Economicamente, isto significa que a taxa marginal de substituição entre dois períodos $s < v$ é sempre menor do que -1. Matematicamente:

$$TMS_{s,v} = \frac{\Delta C_v}{\Delta C_s} = -\frac{\frac{\Delta U}{\Delta c_s}}{\frac{\Delta U}{\Delta c_v}} < -1$$

Renda dos Indivíduos

Fluxo Intertemporal de Renda

- Os indivíduos recebem rendas no início de cada período de sua vida.
- A renda do início do período t é denotada por y_t.
- O fluxo intertemporal de renda pode ser representado por:

$$(y_1, y_2, y_3, ..., y_{T-1}, y_T)$$

Contratos

Tipos de contratos

- Contratos a vista - Compra-se um bem e se paga por ele imediatamente.
- Contratos a termo - Acerta-se hoje a compra de uma determinada quantidade de um bem por um preço determinado também hoje, mas cujo pagamento e entrega do bem se dará em um período futuro.

Preços dos Contratos

Preços dos Contratos a Vista

- Cada bem C_t tem um preço a vista p_t.
- Os preços dos bens podem ser representados por:

$$(p_1, p_2, p_3, ..., p_{T-1}, p_T)$$

- Os mercados abrem para negociação no início do período e permanecem abertos até que todos os indivíduos tenham realizado suas transações.
- Completadas as transações os mercados fecham e só voltam a abrir no início do próximo período.
-

Preços dos Contratos a Termo

- O preço dos contratos a termos será determinado pelo equilíbrio do mercado.

Restrição Orçamentária

- Fluxo intertemporal de despesa de consumo:

$$C = \sum_{t=1}^{T} p_t.C_t = p_1.C_1 + p_2.C_2 + p_3.C_3 + ... + p_{T-1}.C_{T-1} + p_T.C_T$$

- Fluxo intertemporal de Renda:

$$Y = \sum_{t=1}^{T} p_t.y_t = p_1.y_1 + p_2.y_2 + p_3.y_3 + ... + p_{T-1}.y_{T-1} + p_T.y_T$$

- Restrição orçamentária: C = Y

Problema de Escolha do Consumidor

$$\text{Max } U\left(C_1, C_2, C_3, ..., C_{T-1}, C_T\right)$$

Sujeito à restrição

$$C = \sum_{t=1}^{T} p_t . C_t = \sum_{t=1}^{T} p_t . y_t = Y$$

Solução do Problema de Escolha do Consumidor

Sabe-se da teoria microeconômica que a solução do problema do consumidor é dada $\forall s < v \in \Upsilon$, pela equação

$$TMS_{s,v} = -\frac{p_s}{p_v} < -1 \tag{1}$$

Solução do Problema de Escolha do Consumidor (Cont.)

$$\forall s < v \quad \frac{p_s}{p_v} > 1$$

$$\forall s < v, \quad p_s > p_v$$

$$\forall s < v, \quad \exists r_{s,v}, \quad p_s = p_v.(1 + r_{s,v})$$

Logo:

$$\forall s < v, \quad \exists r_{s,v}, \quad \frac{p_v}{p_s} = \frac{1}{1 + r_{s,v}} v \tag{2}$$

Restrição Orçamentária

Dividindo por p_1 a restrição orçamentária, obtemos:

$$C_1 + \frac{p_2}{p_1}.C_2 + \frac{p_3}{p_1}.C_3 + ... + \frac{p_{T-1}}{p_1}.C_{T-1} + \frac{p_T}{p_1}.C_T = \frac{Y}{p_1} \tag{3}$$

Ou ainda:

$$C_1 + \frac{1}{1+r_{1,2}}.C_2 + \frac{1}{1+r_{1,3}}.C_3 + ... + \frac{1}{1+r_{1,T}}.C_T = \frac{Y}{p_1} \tag{4}$$

Estrutura a Termo das Taxas de Juros (ETTJ)

Definição

A estrutura a termo da taxa de juros é a curva que liga os pontos $(T - t, r_{t,T})$ no plano tempo-taxa.

$$(r_{1,2}, r_{1,3}, r_{1,4}, ..., r_{1,T-1}, r_{1,T}) \quad (5)$$

Observação

- Esta curva de juros é chamada de curva zero cupom.
- A teoria de Fisher foi construída na supondo não haver riscos de crédito, liquidez, ficando o risco de mercado relegado à estática comparativa. Estes resultados são equivalentes, porém, ao caso de indiferença ao risco.
- Na realidade, esta curva de juros precisa ser construída com títulos sem risco de crédito ou liquidez, sendo o risco de mercado medido pela volatilidade das taxas. Normalmente, títulos públicos federais prefixados ou com o DI futuro.

Determinação da ETTJ: interpolação polinomial

Problema

Determinar o polinômio que que liga os pontos $(t - t, r_{t,T})$ no plano tempo-taxa.

Solução: interpolação polinomial

Para determinar o polinômio que passa pelos n+1 pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$, basta lembrar que um polinômio de n grau $y = P(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + ... + a_{n-1}.x^{n-1} + a_n.x^n$ tem n+1 coeficientes.

Determinação da ETTJ: interpolação polinomial II

Formalmente, basta resolver o sistema:

1. $y_0 = P(x_0)$
2. $y_1 = P(x_1)$
3. ...
4. $y_{n-1} = P(x_{n-1})$
5. $y_n = P(x_n)$

Exemplo

Encontre o polinômio que passa pelos pontos abaixo:

1. $(x_0, y_0) = (1, 2)$
2. $(x_1, y_1) = (3, 4)$
3. $(x_2, y_2) = (5, 6)$

Solução

- $y = a.x^2 + b.x + c$
- Logo
- $a + b + c = 2$
- $9 + 3b + c = 4$
- $25a + 5b + c = 6$

Desafio

- Resolva em Python!!!
- Dica: ver Eliminação gaussiana

Arbitragem e preços dos contratos a termo

- A otimização dos agentes econômicos se dá pela compra de contratos a vista cujo fluxo de caixa é do tipo (P_1, P_t) que pagam taxas de juros determinadas como segue:

$$r_{1,t} = \frac{P_t - P_1}{P_1}$$

.

- Um operação com contratos a vista ou a termo que proporcionem ganhos líquidos (isto é, ganhos financeiros obtidos sem sacrifício de consumo em algum período é chamada de **arbitragem**.

Arbitragem e preços dos contratos a termo II

- Os preços dos contratos a vista são determinados pelo equilíbrio de mercado.
- Em equilíbrio, todos os agentes estão maximizando utilidade,
- Se fosse possível, operando contratos a vista ou a termo no mercado, fazer arbitragens, isto significaria que os agentes não estariam maximizando utilidade.
- Então, **os preços dos contratos a termo tem de ser tais que impeçam arbitragens.**

Determinação dos Preços dos Contratos a Termo: exemplos

Exemplo 1

$$1 + r_{1,3} = (1 + f_{2,3}) \, . \, (1 + r_{1,2})$$

Exemplo 2

$$1 + r_{1,4} = (1 + r_{1,3}) \, . \, (1 + f_{3,4})$$

Exemplo 3

$$1 + f_{4,7} = (1 + f_{4,6}) \, . \, (1 + f_{6,7})$$

Exemplo 4

$$1 + r_{1,7} = (1 + r_{1,4}) \, . \, (1 + f_{4,5}) \, . \, (1 + f_{5,7})$$

Taxas Constantes

Se $\forall t = 2, 3, ..., T-1, T$, tem que $r_{1,2} = f_{t,t+1} = r$, então, $\forall t > 3$, vale que:

$$(1 + r_{1,t}) = (1 + r)^t \tag{6}$$

Preços de contratos e Taxa interna de retorno (TIR)

Preços de contratos

Considere um contrato cujo fluxo de caixa seja $(-P, C_2, C_3, ..., C_{T-1}, C_T)$. Então, pela impossibilidade de arbitragem, sabemos que o preço P é dado por:

$$P = \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{1 + r_{1,t}} \tag{7}$$

TIR

A TIR é a taxa constante que traz a valor presente os pagamentos C_t de um título de modo a tornar o somatório destes valores igual ao preço do título. Isto é:

$$P = \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1 + r)^t} \tag{8}$$

Curva de Juros Revisitada

Os preços dos títulos que pagam cupons como na equação 7 podem ser obtidos, por arbitragem, a partir das taxas dos títulos sem cupon e dos contratos a termo.

Determinação da curva de juros no Brasil: modelo de Svenson

- Curva de Juros
- Metodologia ETTJ ANBIMA
- Curva de Juros ANBIMA
- Interpolação da ETTJ

Preço unitário e rentabilidade de contratos de renda fixa

- Metodologia de cálculo de rentabilidade
- Precificação de Títulos Públicos Federaistext

Duration

- Mede o tempo médio necessário para o retorno do investimento.
- Diferencia-se do prazo médio por considerar os fluxos a valor presente.
- A fórmula de cálculo é dada por:

$$D = \sum_{t=2}^{T} t.w_t \tag{9}$$

Onde:

$$w_t = \frac{\frac{C_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}} = \frac{1}{P} \cdot \frac{C_t}{(1+r)^t} \tag{10}$$

Duration II

- Serve também como medida de risco de variação da curva de juros
- Para verificar o observado no item anterior, determine a derivada do preço do título em relação a TIR.
- No cálculo da duration, pressupõe-se que a curva de juros é plana (dada pela TIR).

Convexidade (C)

- Mede a sensibilidade da duration a variações na TIR.
- Como consequência do item anterior, também mede a sensibilidade de segunda ordem da variação do preço do título à sua TIR.
- Formalmente, fazendo $D^* = \frac{D}{1+r}$, temos que:

$$C = -\frac{dD^*}{dr} \tag{11}$$