Modelo de Apreçamento de Ativos Baseado em Consumo

Nelson S. dos Santos

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Faculdade de Ciências Econômicas
Departamento de Economia e Relações Internacionais

June 15, 2017

Sumário

Introdução

- **Problema:** como apreçar ativos em ambientes dinâmicos e aleatórios?
- **Importância do problema:** os modelos de apreçamento existentes são estáticos ou não geram uma fórmula fechada de apreçamento.
- **Método de solução:** construir uma economia estocástica e determinar o equilíbrio geral da mesma.
- **Resultados:** equação fundamental de apreçamento.
- **Considerações finais**

Ambiente Informacional

- Existem diferentes estados da natureza podem ocorrer. Em cada um deles, um indivíduo obtém um nível de satisfação distinto. O conjunto de todos os estados da natureza é denotado por ω.
- Um evento é um subconjunto $A \subset \Omega$. O conjunto de todos os eventos é denotado por Σ.
- A chance de ocorrência de um evento é medida pela função $P : \Sigma \to [0, 1]$ denominada probabilidade tal que:
  1. $P(\emptyset) = 0$;
  2. se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

.

Tempo

- Há infinitos períodos de tempo discreto na economia representados pelo conjunto $\mathbb{Z}_+$.
- A passagem do tempo é representada pela sequência de eventos conhecidos em cada instante t e denotada por $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$

Ativos e Carteiras

- Ativos financeiros são processos estocásticos, isto é, sequências de variáveis aleatórias $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ onde X_t denota o valor pago pelo ativo na data t.
- Uma carteira C é uma combinação linear de ativos, isto é: $C = \alpha_1.X_1 + \alpha_2.X_2 + \alpha_3.X_3 + ...\alpha_1.X_{N-1} + \alpha_1.X_N$
- O preço de um ativo é um processo estocástico $(p_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$

Indivíduos e suas Preferências

- Existe um indivíduo representativo da economia cuja função de utilidade intertemporal é dada por:

$$U(c_t) = E_t\left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t . u(c_t)\right] \tag{1}$$

Indivíduos e restrição orçamentária

- A renda do indivíduo é um processo estocástico $(\omega_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$.
- Há N ativos na economia denotados por X^i com i = 1, 2, 3, ..., N.
- Em cada período, os indivíduos escolhem entre consumir ou aplicar sua renda em um ativo.

Indivíduos e restrição orçamentária (cont.)

- Se, na data t, um individuo aplica no ativo X^i, adquirindo α unidades, então:

$$c_t + \alpha.p_t^i = \omega_t \tag{2}$$

-

$$c_{t+1} = \omega_{t+1} + \alpha.X_{t+1}^i \tag{3}$$

- Onde p_t^i é o preço do ativo X^i na data t e X_{t+1}^i é o pagamento de X^i em t+1.

Equilíbrio da Economia e Equação Fundamental de Apreçamento

- O equilíbrio se dá com o indivíduo maximizando utilidade sujeito às restrições 2 e 3.
- A solução deste problema é dada pela equação fundamental de apreçamento:

$$p_t^i = E_t\left[\beta.\frac{u'\left(c_{t+1}\right)}{u'\left(c_t\right)}.X_{t+1}^i\right] \tag{4}$$

- A equação vale para todo i=1,2,3,...N

Equação de Apreçamento do Ativo Livre de Risco

- Se existe um ativo de renda fixa F livre de risco com preço inicial igual a 1 e pagamento R_f, vale que:

$$1 = E_t \left[\beta . \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} . (1 + R_f) \right] \tag{5}$$

Equação do Excesso de Retorno

- Dividindo a equação 4 por p_t^i, temos:

$$1 = E_t \left[\beta . \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} . \frac{X_{t+1}^i}{p_t^i} \right] \tag{6}$$

- A equação acima é equivalente a:

$$1 = E_t \left[\beta . \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} . (1 + R_{t+1}^i) \right] \tag{7}$$

Equação do Excesso de Retorno (cont.)

Subtraindo a equação 7 da equação 5, temos:

$$0 = E_t \left[\beta . \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} . (R^i_{t+1} - R_F) \right] \tag{8}$$

Equação do Excesso de Retorno (cont.II)

- Fazendo:

$$m_{t+1} = \frac{u'\left(c_{t+1}\right)}{u'\left(c_t\right)} \tag{9}$$

- Obtemos que:

$$E_t\left[\beta.m_{t+1}.(R^i_{t+1} - R_F)\right] = 0 \tag{10}$$

Equação do Excesso de Retorno (cont.III)

Se supusermos que $u(c_t) = ln(c_t)$, após mais algumas manipulações algébricas, chega-se a :

$$E_t\left[(R^i_{t+1} - R_F)\right] = \beta^c . E_t\left[(R^i_{c,t+1} - R_F)\right] \tag{11}$$

Ou, o que é o mesmo:

$$R^i_{t+1} - R_F = \beta^c . \left[(R^i_{c,t+1} - R_F)\right] + \epsilon_{t+1} \tag{12}$$

Esta é a equação do CCAPM para estimar por mínimos quadrados.

Observações

- Note que β^c é um parâmetro distinto de β, sendo apenas o parâmetro da regressão linear do excesso de retorno do ativo em relação ao ativo livre de risco contra o excesso de retorno da taxa de crescimento do consumo agregado da economia.
- O modelo pode estimado por mínimos quadrados ordinários no R.
- O modelo liga o desempenho da macroeconomia medido em termos da taxa de crescimento do consumo agregado ao preço dos ativos financeiros, criando um novo campo de pesquisa denominado Macrofinanças.

Considerações finais

O Modelo CCAPM é um avanço em relação ao tradicional modelo CAPM pelas seguintes razões:

- É dinâmico.
- É estocástico.
- Gera conclusões diretamente testáveis pelos dados sem exigir que restrições econométricas ad hoc sejam incluídas.

Referências

- MANKIW, N; SHAPIRO, M. Risk and Return: Consumption Beta Versus Market Beta. The Review of Economics and Statistics, Vol. 68, No. 3. (Aug., 1986), pp. 452-459. Disponível em Mankiw e Shapiro (1986)
- ELTON, E.J.; GRUBER, M.J; BROWN, S.J.; GOETZMANN, W.N. Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos. São Paulo: Atlas, 2004, p. 287.