

# Avaliação de Ações e Previbilidade de Retornos

Nelson Seixas dos Santos

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Faculdade de Ciências Econômicas  
Programa de Pós graduação em Economia

May 4, 2019

- 1 Introdução
- 2 Análise Estocástica
- 3 Eficiência do Mercado de Capitais

# Introdução

# Análise Estocástica

Inicia-se com o trabalho seminal de Bachelier [1900]. Neste trabalho, supõe-se que o preço das ações segue um processo estocástico denominado Movimento Browniano, que, basicamente, é uma versão em tempo contínuo do processo estocástico passeio aleatório mostrado na equação (1).

$$p_{t+1} = p_t + \epsilon_{t+1} \quad (1)$$

Onde:

- $p_t$  é o preço na data  $t$
- $\epsilon_t$  é um processo ruído branco com média zero e variância  $\sigma^2$ .

Seja  $\Omega_t$  o conjunto de informação disponível aos agentes econômicos na data  $t$ . Note que:

$$E[p_{t+1}|\Omega_t] = E[(p_t + \epsilon_{t+1})|\Omega_t] \quad (2)$$

$$E[p_{t+1}|\Omega_t] = E[p_t|\Omega_t] + E[\epsilon_{t+1}|\Omega_t] \quad (3)$$

0 (média de um ruído branco)

$$E[p_{t+1}|\Omega_t] = p_t + \overbrace{E[\epsilon_{t+1}|\Omega_t]} \quad (4)$$

$$E[p_{t+1}|\Omega_t] = p_t \quad (5)$$

Ou seja, tendo em vista que a esperança matemática é o o estimador de máxima verossimilhança para  $p_{t+1}$  na data  $t$ , ela se constitui na melhor previsão possível para o preço em  $t + 1$ .

Note também que:

$$\text{var} [p_{t+1}|\Omega_t] = \text{var} [(p_t + \epsilon_{t+1})|\Omega_t] \quad (6)$$

Como  $p_t$  não é uma variável aleatória na data  $t$ , mas, pelo contrário, é um valor conhecido, então:

$$\text{var} [p_{t+1}|\Omega_t] = \text{var} [\epsilon_{t+1}|\Omega_t] = \sigma^2 \quad (7)$$

Em suma, a distribuição de probabilidade de  $p_{t+1}$  é tem média  $p_t$  e variância  $\sigma^2$ .

Em particular, se  $\epsilon_{t+1}$  tem distribuição normal, então  $(p_{t+1}|p_t)$ , que é a distribuição de  $p_{t+1}$  condicional à  $p_t$ , também tem distribuição normal. Vejamos agora quais são os momentos da distribuição de  $p_{t+n}$ , isto é, o preço da ação  $n$  períodos no futuro. Formalmente, temos:

$$p_{t+1} = p_t + \epsilon_{t+1} \quad (8)$$

$$p_{t+2} = p_{t+1} + \epsilon_{t+2} = p_t + \epsilon_{t+1} + \epsilon_{t+2} \quad (9)$$

$$p_{t+3} = p_{t+2} + \epsilon_{t+3} = p_t + \epsilon_{t+1} + \epsilon_{t+2} + \epsilon_{t+3} \quad (10)$$

$$\vdots \quad (11)$$

$$p_{t+n} = p_t + \sum_{j=1}^n \epsilon_{t+j} \quad (12)$$



Continuando a estudar a distribuição de  $p_{t+n}$ , vejamos quais são suas média e variância. Sendo assim, observe que:

$$p_{t+n} = p_t + \sum_{j=1}^n \epsilon_{t+j} \quad (13)$$

$$E[p_{t+n}|\Omega_t] = E\left[\left(p_t + \sum_{j=1}^n \epsilon_{t+j}\right) \middle| \Omega_t\right] \quad (14)$$

Logo:

$$E[p_{t+n}|\Omega_t] = E[p_t|\Omega_t] + E\left[\sum_{j=1}^n \epsilon_{t+j} \middle| \Omega_t\right] \quad (15)$$

Portanto:

$$E[p_{t+n}|\Omega_t] = p_t + \overbrace{E\left[\sum_{j=1}^n \epsilon_{t+j} \middle| \Omega_t\right]}^{0 \text{ (média de um ruído branco)}} \quad (16)$$

Ou seja:

$$E[p_{t+n}|\Omega_t] = p_t \quad (17)$$

Isto significa que a melhor previsão para o preço futuro dado o conjunto de informação disponível no presente é simplesmente o preço no presente.

Já a variância de  $p_{t+n}$  pode ser calculada a partir da equação (13) como segue:

$$p_{t+n} = p_t + \sum_{j=1}^n \epsilon_{t+j} \quad (18)$$

$$\text{var} [p_{t+n} | \Omega_t] = \text{var} \left[ \left( p_t + \sum_{j=1}^n \epsilon_{t+j} \middle| \Omega_t \right) \right] \quad (19)$$

$$\text{var} [p_{t+n} | \Omega_t] = \text{var} \left[ \left( \underbrace{p_t}_{\text{É uma constante!}} + \sum_{j=1}^n \epsilon_{t+j} \middle| \Omega_t \right) \right] \quad (20)$$

Ou seja:

$$\text{var} [p_{t+n}|\Omega_t] = \text{var} \left[ \sum_{j=1}^n \epsilon_{t+j} \middle| \Omega_t \right] \quad (21)$$

Mas, como  $\epsilon_t$  é um processo ruído branco, então  $\text{cov}(\epsilon_{t+k}, \epsilon_{t+j}) = 0, \forall j \neq k$ . Portanto:

$$\text{var} [p_{t+n}|\Omega_t] = \sum_{j=1}^n \text{var} [\epsilon_{t+j}|\Omega_t] = \sigma^2 \cdot n \quad (22)$$

De fato, este resultado significa que a incerteza (medida pela variância) da previsão do preço aumenta quanto mais distante é o futuro.

Uma outra forma de ver a evolução do preço de uma ação é por meio de seu retorno discreto definido como:

$$r_{t+1} \equiv \frac{p_{t+1} - p_t}{p_t} = \frac{\Delta p_{t+1}}{p_t} = \frac{\epsilon_{t+1}}{p_t} \quad (23)$$

A equação (23) implica que os retornos são independentes, mas não identicamente distribuídos. Note também que, de (23), temos que:

$$p_{t+1} - p_t = p_t \cdot r_{t+1} \implies p_{t+1} = p_t + p_t \cdot r_{t+1} \quad (24)$$

$$p_{t+1} = p_t + p_t \cdot r_{t+1} \implies p_{t+1} = p_t (1 + r_{t+1}) \quad (25)$$

$$\frac{p_{t+1}}{p_t} = 1 + r_{t+1} \quad (26)$$

A hipótese de que os preços seguem um passeio aleatório implica que, com probabilidade 1, o preço da ação atingirá o valor nulo em tempo finito. Isto porque a variância mostrada na equação (22) é uma função ilimitada em  $n$ . Para resolver esse problema [Fama, 1965, p.45] opta supor que

$$\log(p_{t+1}) = \log(p_t) + \epsilon_{t+1} \quad (27)$$



Desta forma, Fama [1965] contorna o problema e ao mesmo tempo faz com que  $\epsilon_{t+i}, \forall i \in \mathbb{N}$  seja igual ao retorno contínuo das ações, pois a equação (27) implica que:

$$\epsilon_{t+1} = \log(p_{t+1}) - \log(p_t) \quad (28)$$

$$\epsilon_{t+1} = \ln \left( \frac{p_{t+1}}{p_t} \right) = R_{t+1} \quad (29)$$

Além disso, por (26), temos que:

$$R_{t+1} = \ln(1 + r_{t+1}) \quad (30)$$

E, também, , por (26):

$$p_{t+1} = p_t \cdot \exp(R_{t+1}) \quad (31)$$

# **Eficiência do Mercado de Capitais**

[Fama, 1970, p.383] define que um mercado é eficiente se os preços sempre refletem plenamente toda a informação disponível. Então, [Fama, 1970, p.383] formaliza esta definição heurística como segue:

$$E(p_{j,t+1}|\Omega_t) = p_{j,t} \cdot [1 + E(r_{j,t+1}|\Omega_t)], \forall j \in 1, 2, 3, \dots, N \quad (32)$$

Onde  $N$  é o número de ações disponíveis no mercado.

Observe que a equação (32) decorre diretamente de (25) e que ela implica o que segue:

- Retornos imprevisíveis
- $E(r_{j,t+1}|\Omega_t) = 0$

[Fama, 1970, p.388], então, estabelece três hipóteses a serem testadas que se caracterizam pela dimensão do conjunto de informação  $\omega_t$ , quais sejam:

- eficiência fraca -  $\Omega_t = r_{j,s}, \forall j, s \leq t$ , onde  $t$  é a data atual.
- eficiência semiforte -  $\Omega_t$  contém todas as informações públicas, e
- eficiência forte -  $\Omega_t$  contém todas as informações quer sejam públicas ou privadas.

Utilizando o GNU R, colete dados de preços de duas ações e:

- 1 Para cada ação, teste se a variação de preços tem média zero.
- 2 Para cada ação, teste, usando Ljung-Box, se a variação de preços é não correlacionada
- 3 Para cada ação, calcule os retornos discretos e teste a previsibilidade dos retornos, ajustando um modelo arima. (eficiência fraca)
- 4 Para cada ação, calcule os retornos contínuos e refaça os testes do item anterior.
- 5 calcule a correlação entre os retornos contínuos das ações e teste se ela é estatisticamente nula.

- Louis Bachelier. *Jeu de speculation (The Theory of Speculation)*. PhD thesis, PhD thesis, University of Paris, 1900.
- Eugene F. Fama. The behavior of stock-market prices. *The Journal of Business*, 38(1):34–105, 1965. URL <https://www.jstor.org/stable/2350752>. Acesso em 04-05-2019.
- Eugene F. Fama. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work\*. *The Journal of Finance*, 25(2):383–417, 1970. doi: 10.1111/j.1540-6261.1970.tb00518.x. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1540-6261.1970.tb00518.x>.