

Modelo de Apreçamento de Ativos Baseado em Consumo

Nelson S. dos Santos

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Faculdade de Ciências Econômicas
Departamento de Economia e Relações Internacionais

May 17, 2019

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Ambiente Informacional e Tempo
- 3 Ativos financeiros e Carteiras
- 4 Indivíduos e suas Preferências
- 5 Equilíbrio e Equação Fundamental de Apreçamento
- 6 Equação do Excesso de Retorno
- 7 Considerações finais
- 8 Referências

- **Problema:** como apreçar ativos em ambientes dinâmicos e aleatórios?
- **Importância do problema:** os modelos de apreçamento existentes são estáticos ou não geram uma fórmula fechada de apreçamento.
- **Método de solução:** construir uma economia estocástica e determinar o equilíbrio geral da mesma.
- **Resultados:** equação fundamental de apreçamento.
- **Considerações finais**

- Existem diferentes estados da natureza podem ocorrer. Em cada um deles, um indivíduo obtém um nível de satisfação distinto. O conjunto de todos os estados da natureza é denotado por ω .
- Um evento é um subconjunto $A \subset \Omega$. O conjunto de todos os eventos é denotado por Σ .
- A chance de ocorrência de um evento é medida pela função $P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ denominada probabilidade tal que:
 - 1 $P(\emptyset) = 0$;
 - 2 se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- Há infinitos períodos de tempo discreto na economia representados pelo conjunto $\mathbb{Z}_+$.
- A passagem do tempo é representada pela sequência de eventos conhecidos em cada instante t e denotada por $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$

- Ativos financeiros são processos estocásticos, isto é, sequências de variáveis aleatórias $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ onde X_t denota o valor pago pelo ativo na data t .
- Uma carteira C é uma combinação linear de ativos, isto é:
$$C = \alpha_1.X_1 + \alpha_2.X_2 + \alpha_3.X_3 + \dots \alpha_{N-1}.X_{N-1} + \alpha_N.X_N$$
- O preço de um ativo é um processo estocástico $(p_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$

- Existe um indivíduo representativo da economia cuja função de utilidade intertemporal é dada por:

$$U(c_t) = E_t \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \cdot u(c_t) \right] \quad (1)$$

- A renda do indivíduo é um processo estocástico $(\omega_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$.
- Há N ativos na economia denotados por X^i com $i = 1, 2, 3, \dots, N$.
- Em cada período, os indivíduos escolhem entre consumir ou aplicar sua renda em um ativo.

Indivíduos e restrição orçamentária (cont.)

- Se, na data t , um indivíduo aplica no ativo X^i , adquirindo α unidades, então:

$$c_t + \alpha.p_t^i = \omega_t \quad (2)$$



$$c_{t+1} = \omega_{t+1} + \alpha.X_{t+1}^i \quad (3)$$

- Onde p_t^i é o preço do ativo X^i na data t e X_{t+1}^i é o pagamento de X^i em $t+1$.

Equilíbrio da Economia e Equação Fundamental de Apreçamento

- O equilíbrio se dá com o indivíduo maximizando utilidade sujeito às restrições 2 e 3.
- A solução deste problema é dada pela equação fundamental de apreçamento:

$$p_t^i = E_t \left[\beta \cdot \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \cdot X_{t+1}^i \right] \quad (4)$$

- A equação vale para todo $i=1,2,3,\dots,N$

Equação de Apreçamento do Ativo Livre de Risco

- Se existe um ativo de renda fixa F livre de risco com preço inicial igual a 1 e pagamento R_f , vale que:

$$1 = E_t \left[\beta \cdot \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \cdot (1 + R_f) \right] \quad (5)$$

Equação do Excesso de Retorno

- Dividindo a equação 4 por p_t^i , temos:

$$1 = E_t \left[\beta \cdot \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \cdot \frac{X_{t+1}^i}{p_t^i} \right] \quad (6)$$

- A equação acima é equivalente a:

$$1 = E_t \left[\beta \cdot \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \cdot (1 + R_{t+1}^i) \right] \quad (7)$$

Equação do Excesso de Retorno (cont.)

Subtraindo a equação 7 da equação 5, temos:

$$0 = E_t \left[\beta \cdot \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \cdot (R_{t+1}^i - R_F) \right] \quad (8)$$

Equação do Excesso de Retorno (cont.II)

- Fazendo:

$$m_{t+1} = \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \quad (9)$$

- Obtemos que:

$$E_t [\beta \cdot m_{t+1} \cdot (R_{t+1}^i - R_F)] = 0 \quad (10)$$

Equação do Excesso de Retorno (cont.III)

Se supusermos que $u(c_t) = \ln(c_t)$, após mais algumas manipulações algébricas, chega-se a :

$$E_t [(R_{t+1}^i - R_F)] = \beta^c \cdot E_t [(R_{c,t+1}^i - R_F)] \quad (11)$$

Ou, o que é o mesmo:

$$R_{t+1}^i - R_F = \beta^c \cdot [(R_{c,t+1}^i - R_F)] + \epsilon_{t+1} \quad (12)$$

Esta é a equação do CCAPM para estimar por mínimos quadrados.

- Note que β^c é um parâmetro distinto de β , sendo apenas o parâmetro da regressão linear do excesso de retorno do ativo em relação ao ativo livre de risco contra o excesso de retorno da taxa de crescimento do consumo agregado da economia.
- O modelo pode estimado por mínimos quadrados ordinários no R.
- O modelo liga o desempenho da macroeconomia medido em termos da taxa de crescimento do consumo agregado ao preço dos ativos financeiros, criando um novo campo de pesquisa denominado Macrofinanças.

O Modelo CCAPM é um avanço em relação ao tradicional modelo CAPM pelas seguintes razões:

- É dinâmico.
- É estocástico.
- Gera conclusões diretamente testáveis pelos dados sem exigir que restrições econométricas ad hoc sejam incluídas.

- COCHRANE, J.H. Asset Pricing. New Jersey: Princeton University Press, 2005, cap. 1. Disponível em Professor Cochrane Web Page.
- ELTON, E.J.; GRUBER, M.J; BROWN, S.J.; GOETZMANN, W.N. Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos. São Paulo: Atlas, 2004, p. 287.
- MANKIW, N; SHAPIRO, M. Risk and Return: Consumption Beta Versus Market Beta. The Review of Economics and Statistics, Vol. 68, No. 3. (Aug., 1986), pp. 452-459. Disponível em Mankiw e Shapiro (1986)