MAT 01026 – Tópicos de Matemática Elementar – Professora Miriam Telichevesky
Lista de Exercícios 9

1. Uma função racional
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$
onde p, q são funções polinomiais, é dita *própria* se $\partial p < \partial q$ e *imprópria* caso contrário. Esta denominação é análoga às das frações próprias e impróprias ordinárias, exemplos: $8/3$ é imprópria porque $8 \geq 3$ e $2/5$ é própria porque $2 < 5$.

a) Justifique por que toda função racional pode ser expressa como soma de um polinômio com uma função racional própria. Este resultado é análogo ao fato que $8/3$ pode ser expresso como soma de um inteiro (2) com uma fração própria ($2/3$), a prova também é análoga.

b) Escreva as seguintes funções racionais como soma de polinômio com função racional própria:
$$f(x) = \frac{x^3 - 7x}{x^2 - 2}, \quad g(x) = \frac{x^6 - 5x^4 + 2x^2}{4x^3 + 16x}, \quad h(x) = \frac{3x^5 + x^4 - 2x^3 - 8x}{x^5 - 2x^4 + x^3}.$$

2) Lembramos que uma função homográfica, ou simplesmente homografia, é uma função escrita na forma
$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{onde } a, b, c, d \text{ são constantes reais com } ad - bc \neq 0.$$
Se $c \neq 0$, o domínio desta função é $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$, caso contrário, é $\mathbb{R}$.

O objetivo deste exercício é mostrar que o conjunto das funções homográficas carrega uma estrutura de *grupo* com a composição de funções, ou seja, a composta de homografias é homografia, existe elemento neutro para composição e ainda toda homografia admite inversa que ainda é homografia.

a) Mostre que se f, g são homografias, então sua composta $f \circ g$ é ainda homografia.

b) Mostre que existe homografia $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $i \circ f = f = f \circ i$ para toda f homografia. Tal i é o elemento neutro do grupo.

c) Mostre para toda f homografia, existe g homografia tal que $f \circ g = i = g \circ f$, onde i é a identidade do item anterior.

d) Justifique por que a hipótese $ad - bc \neq 0$ é fundamental na resolução do item **c)**.

3) Encontre a função inversa de cada uma das homografias a seguir:

a) $f(x) = \dfrac{4 - 3x}{7 + 5x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{2 + x}{3 - x}$ **c)** $h(x) = \dfrac{\pi + 4x}{\pi - ex}$ **d)** $j(x) = \dfrac{2 - 4x}{8x - 4}$.

4) Determine uma condição necessária e suficiente para as constantes $a, b, c, d, a', b', c', d'$ de modo que as homografias $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$ e $g(x) = (a'x + b')/(c'x + d')$ sejam iguais. *Dica: dois polinômios são iguais se e somente se têm mesmo grau e os coeficientes são todos iguais.*

5) Uma *involução* é uma função f tal que $f \circ f$ é a função identidade. Determine uma condição necessária e suficiente para os coeficientes a, b, c, d da homografia $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$ para que esta seja uma involução.

6) Mostre que para que $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$ seja homografia, não é possível que a e c sejam simultaneamente nulos. Com isso, é possível sempre supor que $a = 1$ ou $c = 1$, sem perda de generalidade? Justifique sua resposta.

7) *Outra maneira de deduzir a definição do número e.* Para começar este exercício, esboce o gráfico da função $f(x) = 1/x$, $x > 0$. Fixe $a > 0$ e marque os pontos $(1, 0)$ e $(1 + a, 0)$ no eixo das abscissas.

a) Compare áreas de retângulos apropriados e a área sob o gráfico de $y = 1/x$ com $x \in [1, 1 + a]$ para concluir que

$$\frac{a}{1+a} < \ln(1 + a) < a.$$

b) Tomando $a = 1/n$ mostre que

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1.$$

c) Heuristicamente, conclua que pondo

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

tem-se que $\ln e = 1$, e portanto $\ln e^x = x \ln e = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

8) *Ainda outra maneira de deduzir a definição do número e.* Para começar este exercício, esboce o gráfico da função $f(x) = 1/x$, $x > 0$.

a) Suponhamos que a base b seja tal que $\ln b^h = h$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isso nos diz que, em particular, se $h > 0$, a área sob o gráfico de $y = 1/x$ com $x \in [1, b^h]$ é sempre h. Marque os pontos $(1, 0)$ e $(b^h, 0)$ e, comparando áreas, mostre que

$$\frac{b^h - 1}{b^h} < h < b^h - 1.$$

b) Manipule algebricamente a desigualdade obtida no item anterior para concluir que

$$\frac{1}{b^h} < \frac{h}{b^h - 1} < 1$$

para todo $h > 0$.

c) Obtenha desigualdade análoga para $h < 0$.

d) Utilize o Teorema do Sanduíche para concluir que b deve satisfazer

$$\lim_{h\to 0}\frac{b^h - 1}{h} = 1,$$

e portanto b é tal que a derivada de $g(x) = b^x$ é $g(x)$.