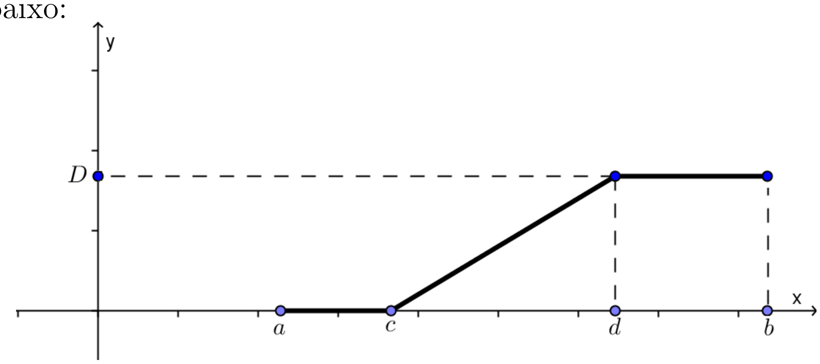
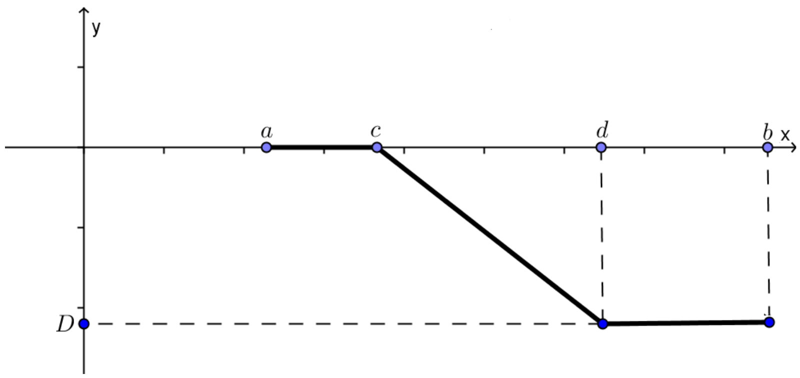
**MAT 01026 – Tópicos de Matemática Elementar – Professora Miriam Telichevesky**
**Lista de Exercícios 8**

**1.** Chama-se *função rampa* a uma função poligonal $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é uma das formas abaixo:



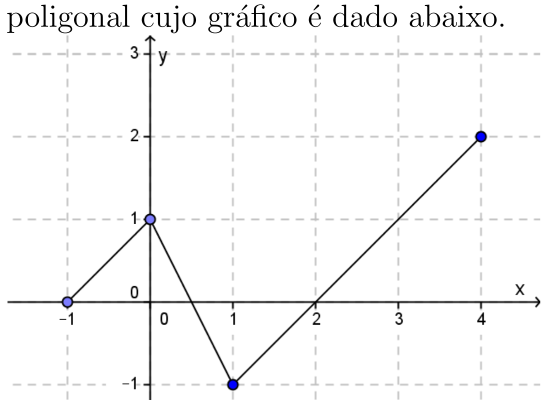

Isto é, $f$ tem dois patamares em $[a, c]$ e $[d, b]$, onde assume, respectivamente, os valores 0 e $D$, ligados por uma "rampa".

**a)** Mostre que toda função rampa pode ser escrita, para todo $x \in [a, b]$, da forma

$$f(x) = \frac{\alpha}{2}[(d - c) + |x - c| - |x - d|], \text{ onde } \alpha := \frac{d}{d - c} \text{ é a inclinação da rampa.}$$

**b)** Mostre que toda função poligonal definida em um intervalo $[a, b]$ pode ser expressa como soma de uma função constante com um número finito de funções rampa.

Escreva nesta forma função poligonal cujo gráfico é dado abaixo.



**c)** Conclua que toda função poligonal definida em um intervalo $[a, b]$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = A + \alpha_1|x - a_1| + \alpha_2|x - a_2| + \cdots + \alpha_n|x - a_n|$$

onde $a_1, \ldots, a_n$ são as abscissas dos vértices da poligonal. Escreva nesta forma a função dada no item **b)**.

**2)** Prove que se $a, b, c$ são inteiros ímpares, então as raízes de $y = ax^2 + bx + c$ não são racionais.

**3)** Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$.
**a)** Mostre que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

**b)** Mais geralmente, mostre que se $0 < \alpha < 1$, então $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$. Interprete geometricamente esta propriedade.

**4)** Se $x$ e $y$ são reais tais que $3x + 4y = 12$, determine o valor mínimo de $z = x^2 + y^2$. Interprete geometricamente este resultado.

**5)** Resolva o seguinte problema isoperimétrico: dentre todos os retângulos de mesma área $A$, mostre que o que tem menor perímetro é o quadrado. Existe algum retângulo cujo perímetro seja maior dentre todos de mesma área?

**6)** *(Interpolação de Lagrange)* O objetivo deste exercício é obter a fórmula de interpolação de Lagrange.
**a)** Mostre que se $p$ é polinômio de grau $\leq 1$ tal que $p(x_0) = y_0$ e $p(x_1) = y_1$, com $x_0 \neq x_1$, então

$$p(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

**b)** Se $p$ tem grau $\leq 2$ com $p(x_i) = y_i$, $i \in \{0, 1, 2\}$, então

$$p(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

**c)** Se $p$ tem grau $\leq n$ com $p(x_i) = y_i$, $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, então

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k \neq i} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k}\right).$$

**7)** Sejam $p$ um polinômio e $p'$ sua derivada. Mostre que $\alpha$ é uma raiz de multiplicidade 1 se, e somente se, $p(\alpha) = 0$ e $p'(\alpha) \neq 0$. Prove também que $\alpha$ é raiz de multiplicidade 2 se, e somente se, $p(\alpha) = 0 = p'(\alpha)$ e $p''(\alpha) \neq 0$. Generalize para multiplicidade $k$.

**8)** Seja $p(x)$ um polinômio de grau ímpar. Mostre que existem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $p(x_1) > 0$ e $p(x_2) < 0$. Conclua que todo polinômio de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real.

**9** Utilize o fato que $x^{n+1} - 1 = (x - 1)(1 + x + \cdots + x^n)$ e as raízes complexas da unidade para mostrar que se $n$ é par, então $1 + x + \cdots + x^n$ não possui raízes reais. A recíproca é verdadeira?