

MAT01191 – Vetores e Geometria Analítica – Professora Miriam Telichevesky
Lista de Exercícios 12

1. Suponha que um novo sistema $\tilde{\Sigma}$ de eixos \tilde{x} e \tilde{y} foi obtido a partir do sistema Σ de eixos x e y através de uma translação para a nova origem $\tilde{O} = (h, k)_{\Sigma}$ (ou seja, as coordenadas no sistema original da nova origem são h e k , nesta ordem). Em cada item, faça o que se pede:

(i) Escreva \tilde{x} e \tilde{y} em função de x e y .

(ii) Faça um esboço da situação.

(iii) Esboce a cônica muito bem posicionada no sistema $\tilde{\Sigma}$

(iv) Apresente uma equação em x e y para a cônica do item (iii).

(a) $\tilde{O} = (8, -5)_{\Sigma}$, $\frac{\tilde{x}^2}{4} - \frac{\tilde{y}^2}{36} = 1$

(b) $\tilde{O} = (-3, 4)_{\Sigma}$, $\frac{\tilde{x}^2}{36} + \frac{\tilde{y}^2}{9} = 1$.

(c) $\tilde{O} = (0, 7)_{\Sigma}$, $\tilde{x}^2 = \tilde{y}$.

2. Completando quadrados, defina um novo sistema de coordenadas $\tilde{\Sigma}$ onde cada uma das equações abaixo represente uma cônica muito bem posicionada.

(a) $-5x^2 + 4y^2 + 40x + 12y + 29 = 0$

(b) $x^2 - 6x - 5y + 14 = 0$.

(c) $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$

3. Suponha que um novo sistema Σ' de eixos x' e y' foi obtido a partir do sistema Σ de eixos x e y através de uma rotação de um ângulo θ . Em cada item, faça o que se pede:

(i) Escreva x' e y' em função de x e y .

(ii) Faça um esboço da situação.

(a) $\theta = \pi/3$.

(b) $\theta = \pi/4$.

(c) $\theta = 5\pi/6$.

4. Suponha que um novo sistema Σ' de eixos x' e y' foi obtido a partir do sistema Σ de eixos x e y através de uma rotação de um ângulo θ . Cada uma das equações a seguir está expressa em termos de x' e y' . Transforme-a em uma equação na forma geral $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, nas variáveis x e y .

(a) $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{2} = 1$, $\theta = \pi/6$.

(b) $\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{25} = 1$, $\theta = 3\pi/4$.

(c) $x'^2 = -16y'$, $\theta = \pi/2$.

5. Para cada um dos itens do exercício anterior, faça o que se pede:

(i) Esboce os sistemas de eixos x e y .

(ii) Identifique a cônica que está muito bem posicionada no sistema x' e y' e esboce-a.

6. Monte um resumo que contenha o procedimento para eliminar termo misto da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ através de uma rotação de ângulo θ , obtendo uma equação da forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0.$$

Aproveite este resumo para chamar atenção que existem sempre dois possíveis ângulos de rotação entre 0 e π que eliminam o termo misto, sendo que um deles está no primeiro quadrante e outro no segundo quadrante.

7. Seja θ_1 o menor ângulo entre 0 e π tal que a rotação de θ_1 do sistema de eixos xy para $x'y'$ elimina o termo misto das equações a seguir. Em cada item, faça o que se pede:

(i) Calcule as constantes A' e C' (seguindo a notação vista em aula e também no exercício anterior).

(ii) Obtenha $\tan(2\theta_1)$ e $\cos(2\theta_1)$ em termos das constantes A, B, C, A', C' .

(iii) Usando as expressões

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}, \quad \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

calcule $\cos \theta_1$ e $\sin \theta_1$. Lembre que θ_1 está no primeiro quadrante.

(iv) Escreva a mudança de coordenadas de xy para $x'y'$ que elimina o termo misto.

(v) Obtenha a equação em x', y' , sem termos mistos.

(a) $x^2 + 18\sqrt{3}xy + 19y^2 - 56 = 0$

(b) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 12 = 0$

(c) $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 5 = 0$

(d) $25x^2 + 120xy + 144y^2 + 12x - 5y = 0$

8. Repita o exercício anterior para o ângulo θ_2 no segundo quadrante, que também elimine termo misto. Compare os resultados com os do Exercício 7. Você consegue interpretar geometricamente esta comparação?

9. Esboce as cônicas do Exercício 7. Para isso, encontre a equação em x' e y' que a torne “muito bem posicionada”.

10. Suponha que um novo sistema Σ' de eixos x' e y' foi obtido a partir do sistema Σ de eixos x e y através de uma rotação de um ângulo θ , e que o sistema $\tilde{\Sigma}$ foi obtido a partir de Σ' através de uma translação para o ponto $\tilde{O} = (h, k)_{\Sigma'}$ (salientamos que h e k são as coordenadas de \tilde{O} no sistema Σ' , e não Σ). Faça um esboço dos três sistemas de eixos em cada um dos casos:

(a) $\theta = \pi/4, \quad \tilde{O} = (8, -5)_{\Sigma'}$.

(b) $\theta = \pi/3, \quad \tilde{O} = (-3, 4)_{\Sigma'}$.

(c) $\theta = 5\pi/6, \quad \tilde{O} = (0, 7)_{\Sigma'}$.

11. * Encontre um novo sistema $\tilde{\Sigma}$ de eixos, via rotação e translação conforme visto em aula, que torne cada uma das equações abaixo o mais simples possível. Faça um esboço da situação e da cônica correspondente.

(a) $21x^2 + 6xy + 13x^2 - 114x + 34y + 73 = 0$

(b) $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$.