Mais sobre espaços e subespaços vetoriais

Capítulo 4

MAT01355
Porto Alegre, outubro de 2019.

Exercícios do Capítulo

Seção 4.1: 10,11,13,15,17,31 e 32

Seção 4.2: 1,3,5,15,24,25,28; exercícios adicionais: 33,35,36.

Seção 4.3: 1,3,5,9,13,15,16,21,22,23.

Seção 4.4: 4,5,7,17.; exercícios adicionais: 23 a 26.

Seção 4.5: 1,5,7,9,13,19,20; exercícios adicionais: 31 e 32.

Seção 4.6: 1,3,5,7,9,15,17,18,28,29,30.

Relembrando fatos

Sobre espaços e subespaços vetoriais

1. $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial, formado pelas matrizes coluna que têm n linhas.
2. O *espaço gerado* por k vetores $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}$ é o conjunto de todas as combinações lineares destes k vetores, simbolizado por $Span\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}\}$.

Sobre transformações lineares e matrizes

1. Se V e W são espaços vetoriais, uma transformação linear $T : V \to W$ é uma aplicação que satisfaz $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ e $T(c\vec{v}) = cT(\vec{v})$, para quaisquer que sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores de V e para qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.
2. Cada matriz $A_{m\times n}$ está associada a uma transformação linear que tem domínio $\mathbb{R}^n$ e contradomínio $\mathbb{R}^m$, da seguinte forma:

se

$$A = [\vec{a_1}\ \vec{a_2}\ \cdots\ \vec{a_n}]$$

é a representação de A por colunas (aqui $\vec{a_i}$ é vetor do $\mathbb{R}^m$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$), e se

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

então

$$A\vec{x} = x_1\vec{a_1} + x_2\vec{a_2} + \cdots x_n\vec{a_n},$$

ou seja, $A\vec{x}$ é o vetor obtido fazendo a combinação linear das colunas de A onde os coeficientes são as entradas de $\vec{x}$.

3. Segue então que dado $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ a equação

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

tem solução se e somente se $\vec{b} \in Span\{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}\}$.

Sobre sistemas homogêneos e dependência linear

1. O sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ é dito sistema homogêneo.

2. Um sistema homogêneo tem solução não trivial se e somente se existem constantes não simultaneamente nulas $x_1, \dots, x_n$ tais que

$$x_1\vec{a_1} + \cdots x_n\vec{a_n} = \vec{0},$$

ou seja, se e somente se as colunas da matriz A são linearmente dependentes.

3. Como consequência do item acima, as colunas de uma matriz A são LI se e somente se o sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ admitir apenas a solução trivial $\vec{x} = \vec{0}$.

Dando continuidade...

No que segue, daremos continuidade ao que foi feito acima, apresentando novas (ou não tão novas assim...) definições.

1 Subespaços vetoriais – contexto geral

Definição 1. *Dado um espaço vetorial V, um subconjunto H de V é dito* subespaço vetorial de V *se H for "fechado" para combinações lineares de seus elementos, ou seja, se para quaisquer que sejam $\vec{u}, \vec{v} \in H$, e quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valer que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ também é um elemento de H.*

Exercício 1. *Da definição acima segue que o vetor nulo $\vec{0}$ de V é também elemento de H, e além disso H satisfaz todas as propriedades de espaço vetorial.*

2 Conjuntos geradores e bases

Definição 2. *Dado um espaço vetorial V, dizemos que $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}$ formam um* conjunto gerador *para um subespaço vetorial H se $H = Span\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_k}\}$.*

Existem dois tipos de conjuntos geradores: os "redundantes" e os que não têm redundância - sendo que este segundo tipo recebe um nome especial, como veremos a seguir.

Exemplo 1. *Sejam*

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

É possível mostrar que $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$, e portanto $\vec{w} \in Span\{\vec{u}, \vec{v}\}$. Assim, segue que $Span\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = Span\{\vec{u}, \vec{v}\}$, ou seja, em termos de conjunto gerador, o que contém os três vetores é "redundante". No entanto, é impossível retirar mais um dos vetores $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ e ainda manter o mesmo subespaço gerado.

Como no exemplo acima, um conjunto de geradores será "redundante" quando algum(ns) de seus vetores for(em) combinação linear dos demais. Desta forma, para evitar a redundância é natural considerar conjuntos L.I.

Definição 3. *Seja H subespaço vetorial do espaço vetorial V. Uma* base *de H é um conjunto L.I. constituído por geradores de H.*

Com um pouco de trabalho, é possível mostrar que todas as bases de H têm a mesma quantidade de elementos. Esta quantidade é chamada *dimensão de H*. Exploraremos mais as ideias de base e dimensão em exemplos importante de subespaços vetoriais, como segue.

3 Espaço das Colunas; Imagem de uma transformação linear

O exemplo clássico de subespaço vetorial do $\mathbb{R}^m$ é espaço $Span\{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\}$ gerado pelas colunas da matriz A. Este é tão importante que ganha uma definição especial: é chamado **espaço coluna de** A, e é denotado por $Col(A)$.

Proposição 1. *O espaço das colunas de uma matriz A é a imagem da transformação linear a ela associada. Simbolicamente, $Col(A) = Im(A)$, onde aqui estamos usando um abuso de notação (razoável) de denotar a matriz e sua transformação linear pela mesma letra A.*

Proof. Mostremos que $Col(A) \subset Im(A)$ e a continência $\supset$ fica a cargo do leitor. Seja, para isso, $\vec{b} \in Col(A)$. Então $\vec{b} \in Span\{\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}$. Logo existem $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{b} = c_1\vec{a_1} + \cdots + c_n\vec{a_n}$. Assim, escrevendo

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

temos que $A\vec{c} = \vec{b}$. Desta forma, a equação $A\vec{x} = \vec{b}$ tem solução, e portanto $\vec{b} \in Im(A)$. $\square$

4 Espaço nulo, Núcleo de uma transformação linear

Definição 4. *Seja A uma matriz. O seu* espaço nulo *é o conjunto de todas as soluções do sistema homogêneo $A\vec{x} = \vec{0}$ a ela associado. Notação: $Nul(A)$.*

Proposição 2. *Para qualquer que seja a matriz $A_{m\times n}$, temos que $Nul(A)$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.*

Proof. Precisamos mostrar que se $\vec{u}, \vec{v} \in Nul(A)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in Nul(A)$. De fato:

$$A(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha A(\vec{u}) + \beta A(\vec{v}),$$

uma vez que A tem as propriedades de transformação linear. Além disso, sabemos que $A(\vec{u}) = \vec{0} = A(\vec{v})$, pois $\vec{u}, \vec{v}$ são elementos do espaço nulo de A. Então segue que $A(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \vec{0}$, o que queríamos. $\square$

Definição 5. *Dada uma transformação linear $T : U \to V$, chamamos de* núcleo de T, *representado por $kerT$, o conjunto dos vetores $\vec{x} \in U$ tais que $T\vec{x} = \vec{0}$.*

Proposição 3. *Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear representada pela matriz A, então $kerT = Nul(A)$.*

A demonstração fica a cargo do leitor.

$Nul(A)$ e eliminação gaussiana

Uma descrição de $Nul(A)$ como espaço gerado por determinado conjunto de vetores é obtido "naturalmente" quando fazemos o processo de eliminação gaussiana, especialmente até a forma escalonada reduzida. O exemplo a seguir mostra como isso acontece, e pode ser "repetido" em outras situações:

Exemplo 2. *Determine um conjunto gerador para o espaço $Nul(A)$, onde*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

Solução: *Escalonando a matriz até a forma reduzida, temos que ela é linha-equivalente a*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e desta forma $A\vec{x} = \vec{0}$ se e somente se $B\vec{x} = 0$, e portanto o $Nul(A) = Nul(B)$. Agora note, por outro lado, que escrevendo $\vec{x}$ como vetor coluna cujas linhas são $x_1, \ldots, x_5$, temos que $B\vec{x} = \vec{0}$ se e somente se

$$x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5 = 0,\ x_3 = -2x_4 + 2x_5,\ x_2, x_4, x_5 \textit{ livres }.$$

Assim, qualquer vetor $\vec{x}$ que satisfaça $B\vec{x} = \vec{0}$ deve ter a "cara"

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_3 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$Nul(A) = Span \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Note que a quantidade de vetores que apareceu acima coincide com o número de variáveis livres. De fato, ainda mais forte que isso: aqueles três vetores são L.I.; desta forma a dimensão de $Nul(A)$ é o número de variáveis livres. Isto não é coincidência, como veremos mais adiante.