Introdução à Geometria Hiperbólica Plana

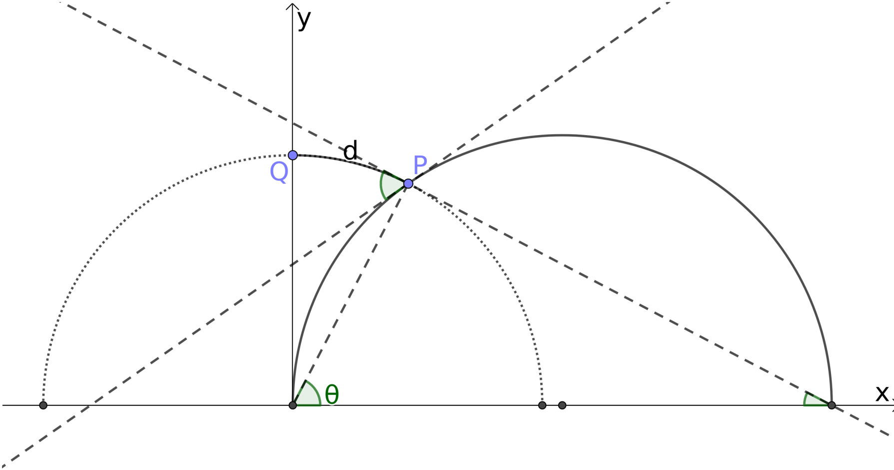
Miriam Telichevesky
miriamt@mat.ufrgs.br

Matemática em Minicursos - UFRGS, abril de 2021

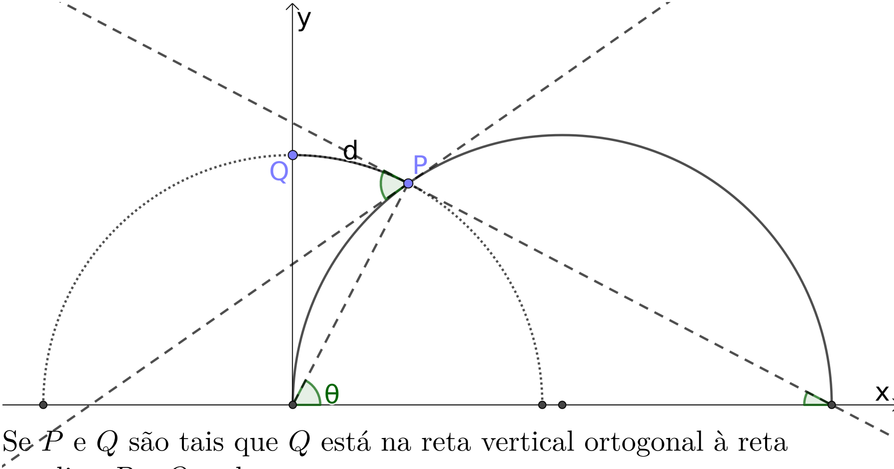
Aula 5

Final da aula passada...

Final da aula passada...



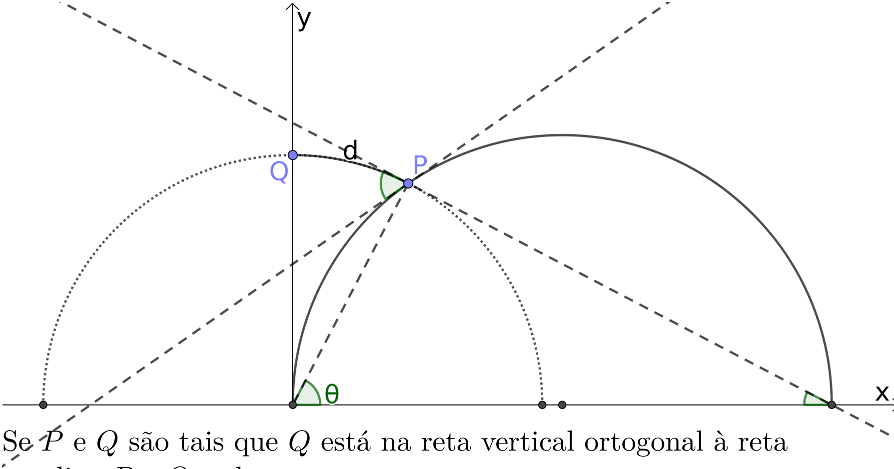
Final da aula passada...



Se P e Q são tais que Q está na reta vertical ortogonal à reta que liga P e Q, vale:

$d = d(P, Q) = \ln(\cot(\theta/2))$

Final da aula passada...



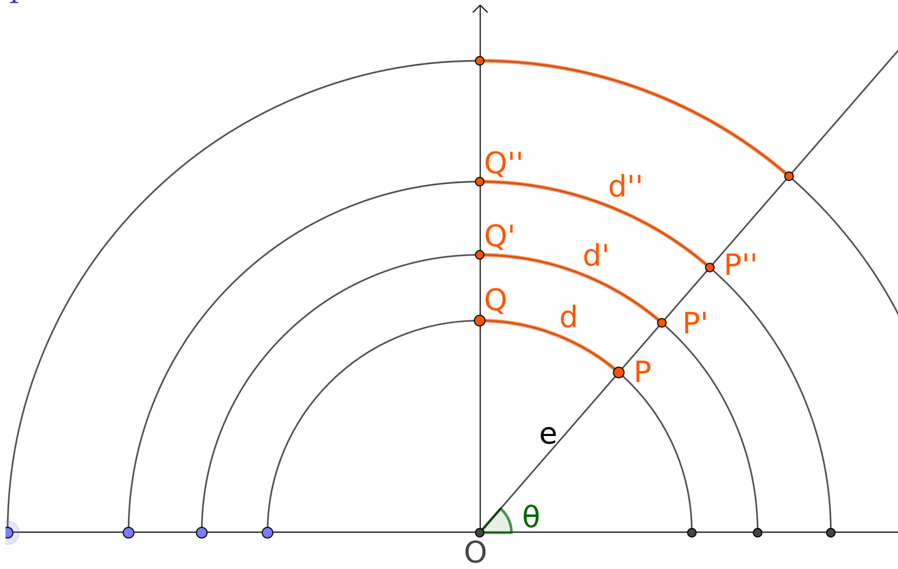
Se P e Q são tais que Q está na reta vertical ortogonal à reta que liga P e Q, vale:
$d = d(P, Q) = \ln(\cot(\theta/2))$
onde θ é o ângulo como na figura.

Vamos olhar com mais cuidado...

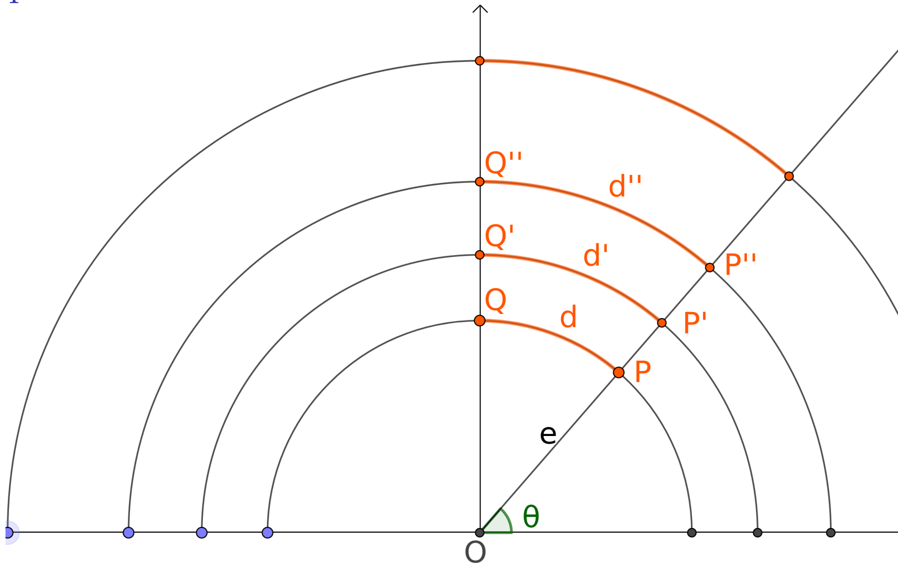
Vamos olhar com mais cuidado...
$d(P, Q) = \ln(\cot(\theta/2))$

Vamos olhar com mais cuidado...
$d(P, Q) = \ln(\cot(\theta/2))$
Cadê o raio do círculo que contém P e Q?

Surpresa!



Surpresa!



A semirreta euclidiana e com origem em $O = (0, 0)$ fazendo ângulo θ com o eixo x é tal que qualquer ponto dela está a uma distância $d = \ln \cot(\theta/2)$ da reta hiperbólica representada pelo semieixo positivo y.

A semirreta euclidiana e com origem em $O = (0, 0)$ fazendo ângulo θ com o eixo x é tal que qualquer ponto dela está a uma distância $d = \ln \cot(\theta/2)$ da reta hiperbólica representada pelo semieixo positivo y.

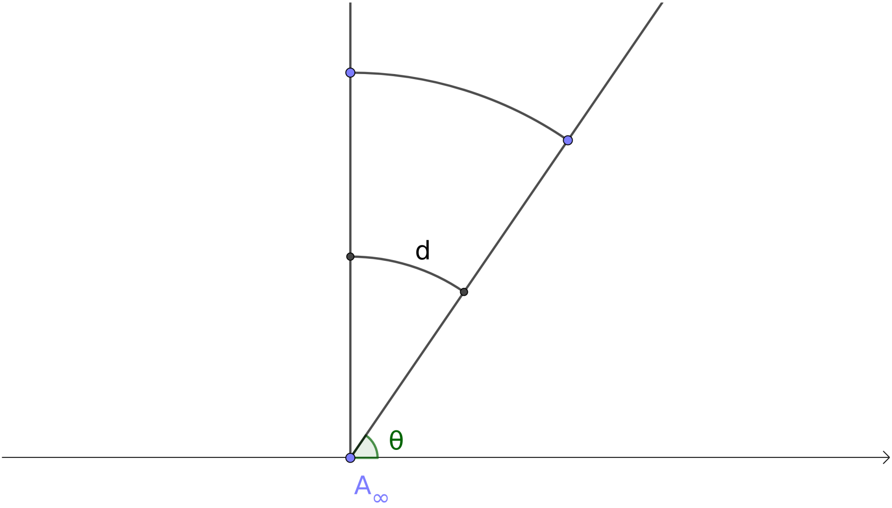
Note que e não é uma reta hiperbólica (mas é uma curva no plano hiperbólico), e é chamada de *curva equidistante* ou *hiperciclo*.

A semirreta euclidiana e com origem em $O = (0, 0)$ fazendo ângulo θ com o eixo x é tal que qualquer ponto dela está a uma distância $d = \ln \cot(\theta/2)$ da reta hiperbólica representada pelo semieixo positivo y.

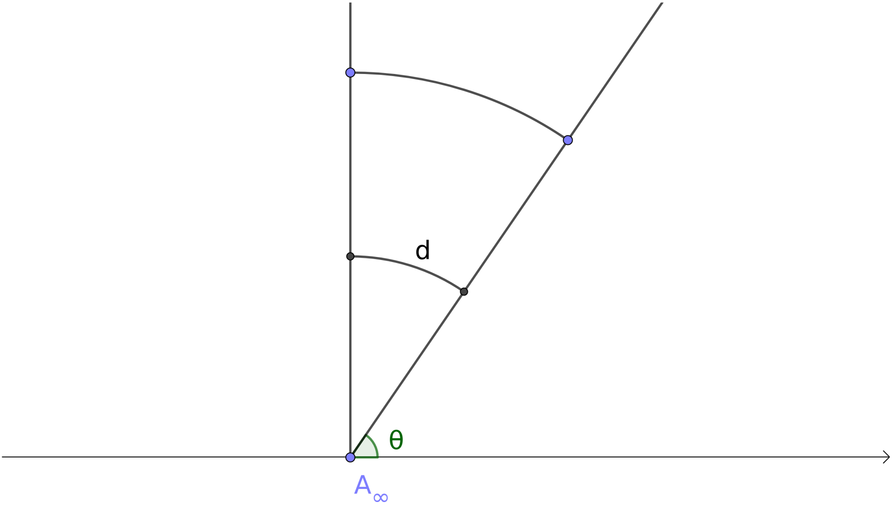
Note que e não é uma reta hiperbólica (mas é uma curva no plano hiperbólico), e é chamada de *curva equidistante* ou *hiperciclo*.

Em geral, qualquer semirreta euclidiana não vertical e com origem no eixo x é uma curva equidistante à reta dada pela semirreta vertical de mesma origem.

Curvas equidistantes



Curvas equidistantes



Observação: todas as curvas equidistantes desta forma terminam também em ∞. Então elas são outras curvas, que não a reta, que ligam os pontos ideais A_∞ e ∞.

Pergunta natural

Pergunta natural

Como é uma curva equidistante a uma reta que é dada por um semicírculo?

Pergunta natural

Como é uma curva equidistante a uma reta que é dada por um semicírculo?

https://www.geogebra.org/classic/fqvh3gmx

Lembrete inicial

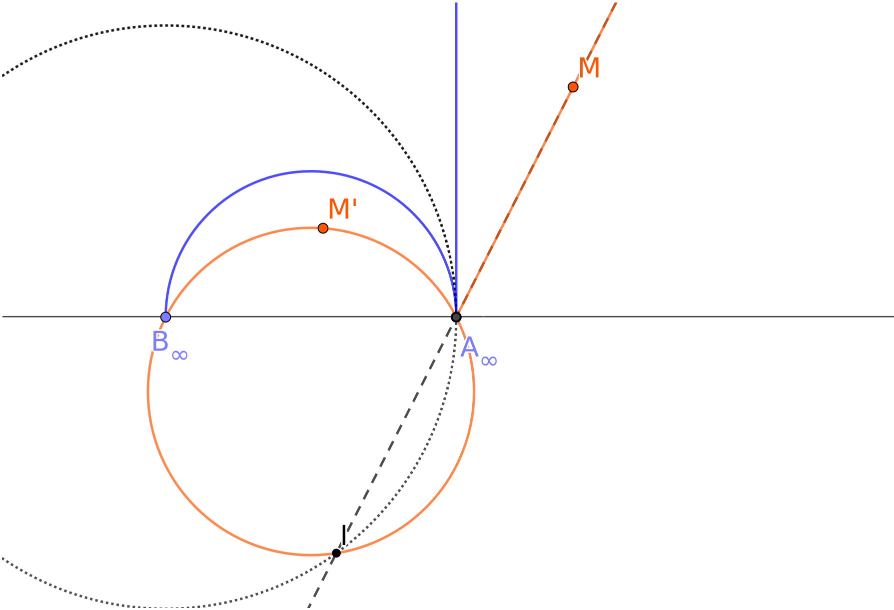
Lembrete inicial

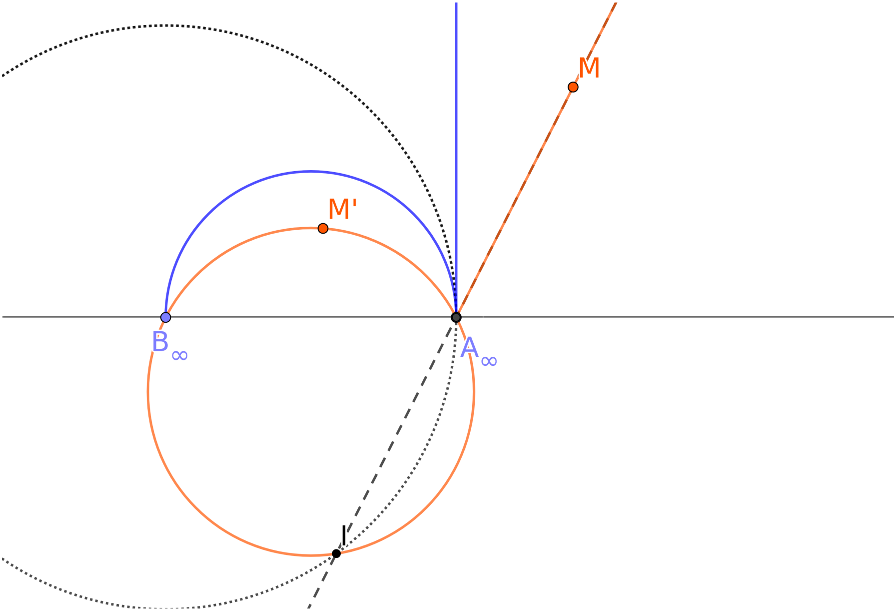
A inversão euclidiana com respeito a um círculo leva sempre retas em retas ou círculos e círculos em retas ou círculos.

Lembrete inicial

A inversão euclidiana com respeito a um círculo leva sempre retas em retas ou círculos e círculos em retas ou círculos.

Então dada qualquer reta, se quisermos saber sua imagem pela inversão, basta conhecer a imagem de três de seus pontos e traçar o círculo (ou reta) por eles.


M
M'
B_∞
A_∞
I



Como $\infty \mapsto B_\infty$ e $A_\infty \mapsto A_\infty$, tudo que está entre estes dois fica num dos arcos. Tem que ser o certo porque o ponto I fica fixo pela inversão também, mas está abaixo.

A equidistante para o outro lado se comporta de um jeito mais fácil!
https://www.geogebra.org/classic/kupzcyvs

Equidistantes

https://www.geogebra.org/classic/mfgawfam

Equidistantes

https://www.geogebra.org/classic/g2cr4zwy

Todas as retas euclidianas...

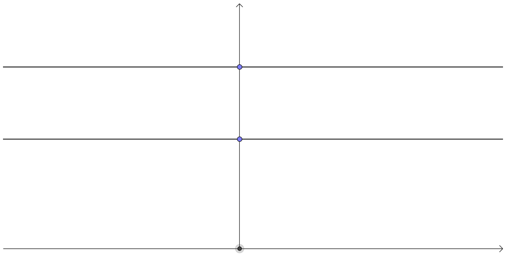
Todas as retas euclidianas...

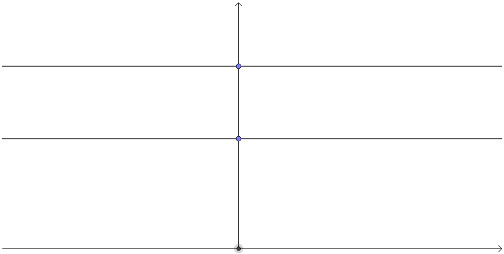
Já vimos o que acontece com as retas euclidianas verticais e com as que formam um ângulo positivo com o eixo x.

Todas as retas euclidianas...

Já vimos o que acontece com as retas euclidianas verticais e com as que formam um ângulo positivo com o eixo x.

Pergunta natural: No modelo do semiplano superior, o que as retas horizontais representam? Que propriedades interessantes elas tem?





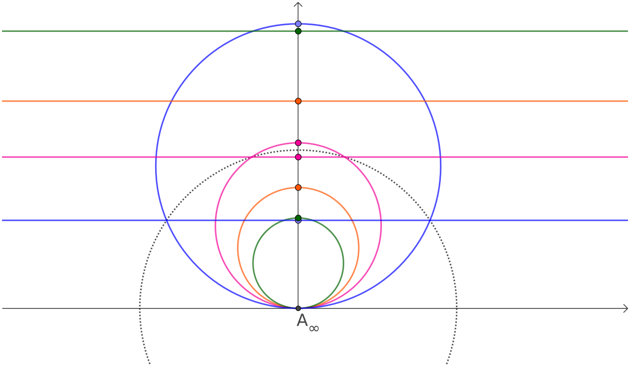
A distância entre elas não varia com o ponto. São curvas que equidistam uma da outra. E “mantém uma distância constante (infinita) até o infinito” (????????????).

Ao percorrê-las “do começo ao fim” começamos em ∞ e terminamos em ∞, como se fosse um círculo de raio infinito. Para entendê-las melhor é interessante trazer este ∞ para um ponto A_∞ do eixo x, por meio de uma inversão.

Horociclos

https://www.geogebra.org/classic/uanrknam

Horociclos



Família de círculos por um ponto...

https://www.geogebra.org/classic/u8yqwgkg
https://www.geogebra.org/classic/adwbfdza

Círculo por três pontos não colineares?

Círculo por três pontos não colineares?

Conforme discutimos na parte axiomática, dados três pontos não colineares, nem sempre existe círculo hiperbólico que os contém.

Círculo por três pontos não colineares?

Conforme discutimos na parte axiomática, dados três pontos não colineares, nem sempre existe círculo hiperbólico que os contém.

Isso está de acordo com o que falamos há pouco: já que os círculos hiperbólicos são círculos euclidianos neste modelo, então o círculo hiperbólico por três pontos tem que ser o círculo euclidiano, apenas o centro e o raio não coincidem.

Círculo por três pontos não colineares?

Conforme discutimos na parte axiomática, dados três pontos não colineares, nem sempre existe círculo hiperbólico que os contém.

Isso está de acordo com o que falamos há pouco: já que os círculos hiperbólicos são círculos euclidianos neste modelo, então o círculo hiperbólico por três pontos tem que ser o círculo euclidiano, apenas o centro e o raio não coincidem.

Mas se o círculo euclidiano pelos três pontos não estiver no semiplano superior...

Círculo por três pontos não colineares?

Conforme discutimos na parte axiomática, dados três pontos não colineares, nem sempre existe círculo hiperbólico que os contém.

Isso está de acordo com o que falamos há pouco: já que os círculos hiperbólicos são círculos euclidianos neste modelo, então o círculo hiperbólico por três pontos tem que ser o círculo euclidiano, apenas o centro e o raio não coincidem.

Mas se o círculo euclidiano pelos três pontos não estiver no semiplano superior... já era.

Círculo por três pontos não colineares?

Conforme discutimos na parte axiomática, dados três pontos não colineares, nem sempre existe círculo hiperbólico que os contém.

Isso está de acordo com o que falamos há pouco: já que os círculos hiperbólicos são círculos euclidianos neste modelo, então o círculo hiperbólico por três pontos tem que ser o círculo euclidiano, apenas o centro e o raio não coincidem.

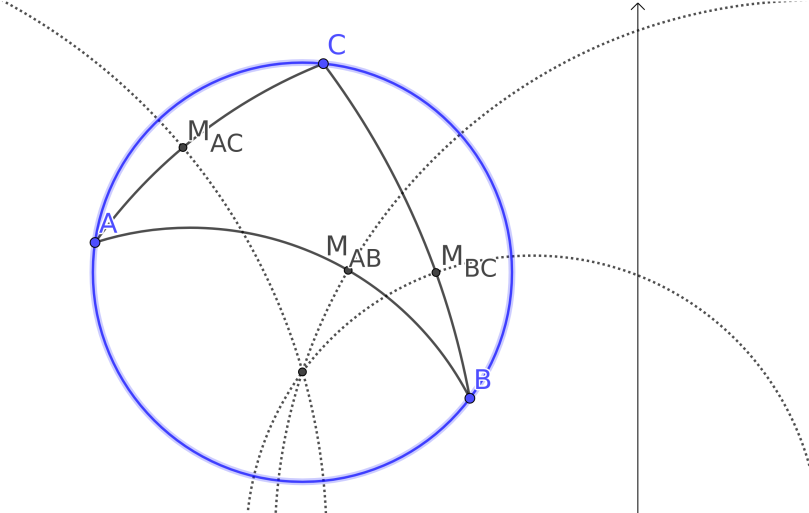
Mas se o círculo euclidiano pelos três pontos não estiver no semiplano superior... já era.

Porém veremos que neste caso coisas bonitas acontecem!

Caso 1

Caso 1

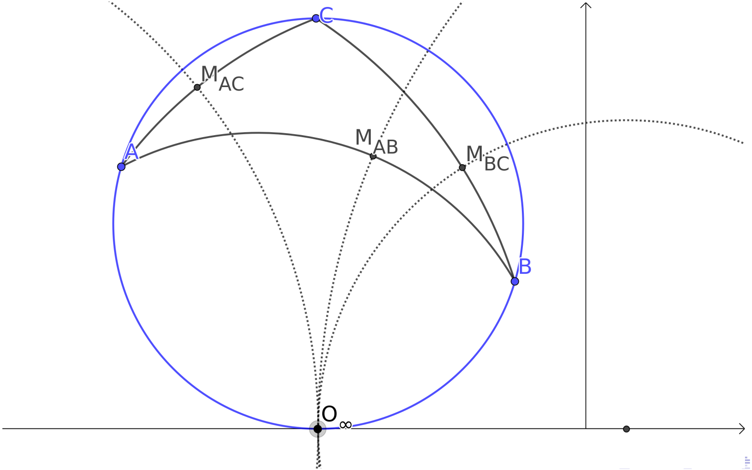
Teorema: É dado um triângulo hiperbólico ABC. Se duas das mediatrizes são concorrentes, a terceira mediatriz concorre com elas no mesmo ponto, que é o centro do círculo hiperbólico que contém A, B e C.



https://www.geogebra.org/classic/k4duhba3

Caso 2

Teorema: Dado um triângulo ABC, se duas mediatrizes são paralelas, se encontrando num ponto ideal O_∞, então a terceira mediatriz é paralela no mesmo sentido, e portanto também tem O_∞ como ponto ideal. Neste caso, os três pontos pertencem a um horociclo que tem O_∞ como ponto ideal.



Caso 3

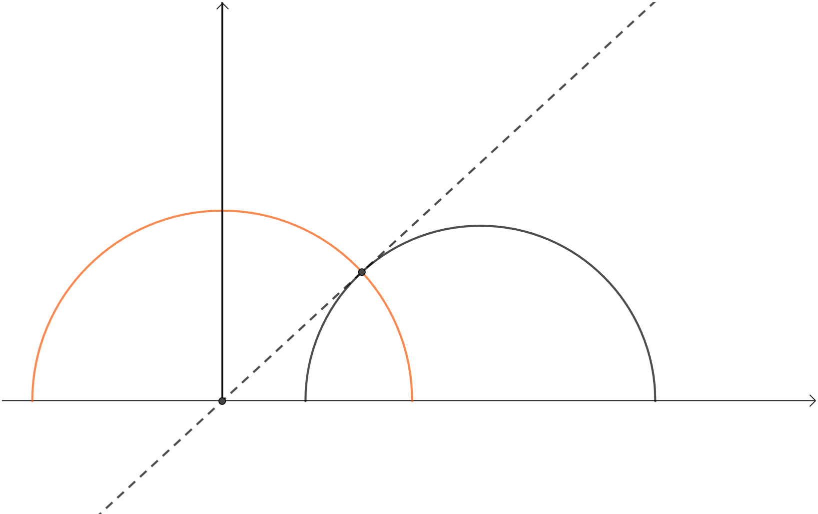
Caso 3

Lema: Dadas duas retas hiperparalelas, existe apenas uma reta simultaneamente perpendicular às duas.

Caso 3

Lema: Dadas duas retas hiperparalelas, existe apenas uma reta simultaneamente perpendicular às duas.

Demonstração:



Caso 3

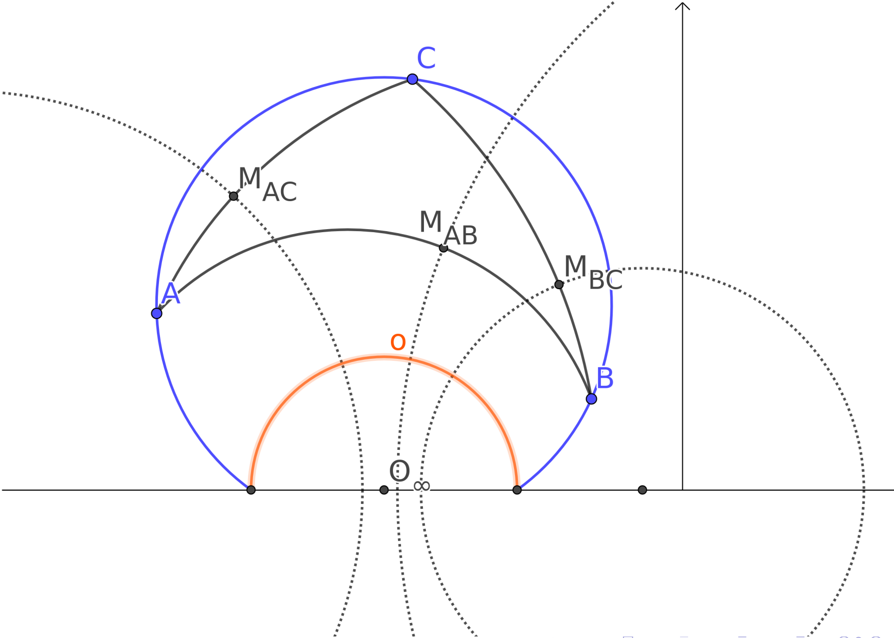
Teorema Seja ABC um triângulo hiperbólico. Se duas mediatrizes são hiperparalelas e têm como única perpendicular comum uma reta o, então a terceira mediatriz é paralela a elas e tem também como perpendicular com as outras duas a reta o.

Caso 3

Teorema Seja ABC um triângulo hiperbólico. Se duas mediatrizes são hiperparalelas e têm como única perpendicular comum uma reta o, então a terceira mediatriz é paralela a elas e tem também como perpendicular com as outras duas a reta o.

Além disso, os pontos A, B e C situam-se à mesma distância de o. Isto é, o círculo euclidiano que os contém representa a única curva equidistante a o que os contém.

Caso 3



Conclusão

Conclusão

Não sei quanto a vocês...

Conclusão

Não sei quanto a vocês... mas eu fico ARREPIADA!

Isso quer dizer que se a gente extrapola e diz que:

Isso quer dizer que se a gente extrapola e diz que:

- As retas concorrentes se encontram num ponto ordinário O.
- As retas paralelas se encontram num ponto ideal O_∞.
- As retas hiperparalelas “se encontram” numa reta o (no sentido que esta é a única perpendicular comum a elas), chamada de *ponto ultraideal*;

então:

Isso quer dizer que se a gente extrapola e diz que:

- As retas concorrentes se encontram num ponto ordinário O.
- As retas paralelas se encontram num ponto ideal O_∞.
- As retas hiperparalelas "se encontram" numa reta o (no sentido que esta é a única perpendicular comum a elas), chamada de *ponto ultraideal*;

então:

> *As três mediatrizes de um triângulo são sempre concorrentes em um ponto ordinário, ideal ou ultraideal, e este "ponto" é o único que "equidista" dos vértices do triângulo.*

Uaaaaaaaaaaaaaaaaaauuuuu

Pausa para um suspiro.

Outros triângulos surgem...

Outros triângulos surgem...

Já tínhamos os triângulos ordinários, com três vértices ordinários.

Outros triângulos surgem...

Já tínhamos os triângulos ordinários, com três vértices ordinários.

Depois passamos a falar dos triângulos generalizados, onde alguns vértices devem ser pontos ideais.

Outros triângulos surgem...

Já tínhamos os triângulos ordinários, com três vértices ordinários.

Depois passamos a falar dos triângulos generalizados, onde alguns vértices devem ser pontos ideais.

Interpretando pontos ultraideiais como pontos, temos um terceiro tipo de triângulo (não sei o nome, vou chamar de "ultrageneralizado"): aqueles que podem conter como vértices pontos ultraideiais!

Hora de mostrar a camiseta.

Surpreendentemente, quando fazemos contas de trigonometria nos triângulos, os “vértices” dados por pontos ultraideiais (então são segmentos de reta) se comportam como ângulos (tipo alguma lei dos senos...)

Surpreendentemente, quando fazemos contas de trigonometria nos triângulos, os "vértices" dados por pontos ultraideiais (então são segmentos de reta) se comportam como ângulos (tipo alguma lei dos senos...)

Isso não faz parte mais de um curso introdutório, então vou deixar para a continuação...

Mudando de assunto...

Medidas de curvas (métrica)

Medidas de curvas (métrica)

Num contexto geral: se c é uma curva “razoável” com $c(0) = P$ e $c(1) = Q$, então temos que o comprimento da curva de P até Q é dado por

$$l(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt.$$

Medidas de curvas (métrica)

Num contexto geral: se c é uma curva "razoável" com $c(0) = P$ e $c(1) = Q$, então temos que o comprimento da curva de P até Q é dado por

$$l(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt.$$

Isso continua sendo verdade no plano hiperbólico **desde que a gente dê um sentido adequado para o que são vetores e o que é medir vetores**.

Medidas de curvas (métrica)

Num contexto geral: se c é uma curva "razoável" com $c(0) = P$ e $c(1) = Q$, então temos que o comprimento da curva de P até Q é dado por

$$l(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt.$$

Isso continua sendo verdade no plano hiperbólico **desde que a gente dê um sentido adequado para o que são vetores e o que é medir vetores**.

A noção de vetores fica na imaginação (como se fossem objetos morando "fora do hiperbólico", tipo o que acontece com uma esfera).

Medidas de curvas (métrica)

Num contexto geral: se c é uma curva "razoável" com $c(0) = P$ e $c(1) = Q$, então temos que o comprimento da curva de P até Q é dado por

$$l(c) = \int_0^1 |c'(t)|dt.$$

Isso continua sendo verdade no plano hiperbólico **desde que a gente dê um sentido adequado para o que são vetores e o que é medir vetores**.

A noção de vetores fica na imaginação (como se fossem objetos morando "fora do hiperbólico", tipo o que acontece com uma esfera).

Quanto ao comprimento, vamos nos inspirar no seguinte...

A curva $c : [a, b] \to \mathbb{H}^2$ dada por

$$c(t) = (0, e^t)$$

é tal que a distância entre $c(t_1)$ e $c(t_2)$ é precisamente $|t_1 - t_2|$ para quaisquer que sejam t_1 e t_2 em $[a, b]$.

A curva $c : [a, b] \to \mathbb{H}^2$ dada por $c(t) = (\tanh(t), \mathsf{sech}(t))$ tem a mesma propriedade.

A curva $c : [a,b] \to \mathbb{H}^2$ dada por

$$c(t) = (0, e^t)$$

é tal que a distância entre $c(t_1)$ e $c(t_2)$ é precisamente $|t_1 - t_2|$ para quaisquer que sejam t_1 e t_2 em $[a,b]$.

A curva $c : [a,b] \to \mathbb{H}^2$ dada por $c(t) = (\tanh(t), \mathsf{sech}(t))$ tem a mesma propriedade.

Então, pensando que $t_1 < t_2$, temos que em ambos os casos vale

$$\int_{t_1}^{t_2} |c'(t)| dt = t_2 - t_1.$$

Em particular,

$$\int_a^t |c'(s)| ds = t - a \overbrace{\Rightarrow}^{T.F.C.} |c'(t)| = 1 \, \forall t \in (a,b).$$

Mas por outro lado (fazendo de conta que sabemos o que são vetores tangentes):

$$c(t) = (0, e^t) \Rightarrow c'(t) = (0, e^t) = e^t(0, 1)$$

e

$$c(t) = (\tanh(t), \mathsf{sech}(t)) \Rightarrow c'(t) = (\mathsf{sech}^2(t), \mathsf{sech}(t)\tanh(t)) = \mathsf{sech}(t)(\mathsf{s}$$

Mas por outro lado (fazendo de conta que sabemos o que são vetores tangentes):

$$c(t) = (0, e^t) \Rightarrow c'(t) = (0, e^t) = e^t(0, 1)$$

e

$$c(t) = (\tanh(t), \mathsf{sech}(t)) \Rightarrow c'(t) = (\mathsf{sech}^2(t), \mathsf{sech}(t)\tanh(t)) = \mathsf{sech}(t)(\mathsf{s}$$

Obs: neste momento é importante avisar que $\mathsf{sech}^2(t) + \tanh^2(t) = 1$.

Mas por outro lado (fazendo de conta que sabemos o que são vetores tangentes):

$$c(t) = (0, e^t) \Rightarrow c'(t) = (0, e^t) = e^t(0,1)$$

e

$$c(t) = (\tanh(t), \mathsf{sech}(t)) \Rightarrow c'(t) = (\mathsf{sech}^2(t), \mathsf{sech}(t)\tanh(t)) = \mathsf{sech}(t)(\mathsf{s}$$

Obs: neste momento é importante avisar que
$\mathsf{sech}^2(t) + \tanh^2(t) = 1$.
Então em ambos os casos temos que $c'(t)$ é o produto de um vetor unitário (do ponto de vista euclidiano) pela segunda coordenada da curva.

$$c(t) = (x(t), y(t)) \Rightarrow c'(t) = y(t)\vec{u}(t),$$

onde $\vec{u}(t)$ é euclidianamente unitário.

Mas queríamos que $c'(t)$ fosse unitário... então definimos:

Mas queríamos que $c'(t)$ fosse unitário... então definimos:

No plano hiperbólico, a maneira correta de medir o vetor $\vec{v}$ situado no ponto (x, y) é

$$|\vec{v}|_{(x,y)} = \frac{|\vec{v}|_{euc}}{y}.$$

Mas queríamos que $c'(t)$ fosse unitário... então definimos:

No plano hiperbólico, a maneira correta de medir o vetor $\vec{v}$ situado no ponto (x, y) é

$$|\vec{v}|_{(x,y)} = \frac{|\vec{v}|_{euc}}{y}.$$

Como consequência,

$$c(t) = (0, e^t) \Rightarrow |c'(t)|_{c(t)} = 1$$

e

$$c(t) = (\tanh(t), \mathsf{sech}(t)) \Rightarrow |c'(t)|_{c(t)} = 1.$$

Mas queríamos que $c'(t)$ fosse unitário... então definimos:

> *No plano hiperbólico, a maneira correta de medir o vetor $\vec{v}$ situado no ponto (x, y) é*
>
> $$|\vec{v}|_{(x,y)} = \frac{|\vec{v}|_{euc}}{y}.$$

Como consequência,

$$c(t) = (0, e^t) \Rightarrow |c'(t)|_{c(t)} = 1$$

e

$$c(t) = (\tanh(t), \mathsf{sech}(t)) \Rightarrow |c'(t)|_{c(t)} = 1.$$

Essa justificativa foi mais heurística do que correta, mas ela serve para um pouco justificar porque a *métrica* do plano hiperbólico no semiplano superior é dada por dividir a métrica euclidiana por $1/y^2$.

Com esta métrica é possível calcular comprimento de curvas quaisquer, se conhecermos suas parametrizações:

$$l(c) = \int_a^b \frac{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}{y(t)} dt.$$

Com esta métrica é possível calcular comprimento de curvas quaisquer, se conhecermos suas parametrizações:

$$l(c) = \int_a^b \frac{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}{y(t)} dt.$$

Agora podemos pensar em como calcular a área de uma região...

Com esta métrica é possível calcular comprimento de curvas quaisquer, se conhecermos suas parametrizações:

$$l(c) = \int_a^b \frac{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}{y(t)} dt.$$

Agora podemos pensar em como calcular a área de uma região...

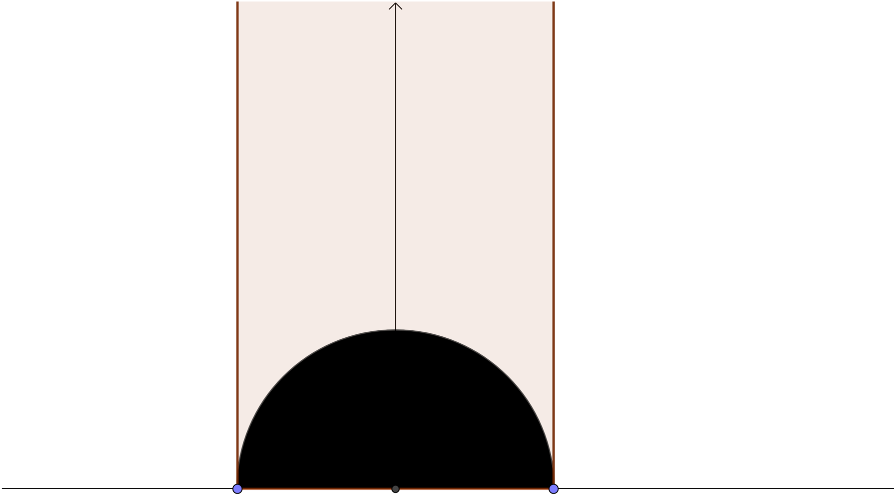
De forma totalmente análoga, a área de uma região fica sendo calculada da seguinte forma:

$$A(R) = \int\int_R \frac{1}{y^2} dS.$$

Aqui dS denota o elemento de área euclidiano.

Exemplo

Calcular a área da região da figura:



$$A(\Delta) = \int\int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dS =$$

$$A(\Delta) = \int\int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dS =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx =$$

$$A(\Delta) = \int\int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dS =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} -\frac{1}{y}\Big|_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} dx =$$

$$A(\Delta) = \int\int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dS =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} -\frac{1}{y}\Big|_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-0 - \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right) dx =$$

$$A(\Delta) = \int\int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dS =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} -\frac{1}{y}\bigg|_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-0 - \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \underbrace{=}_{x=\mathsf{sen}\theta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\mathsf{sen}^2\theta}} d\theta$$

$$A(\Delta) = \int\int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dS =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} -\frac{1}{y}\bigg|_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-0 - \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \underbrace{=}_{x = \mathsf{sen}\theta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\mathsf{sen}^2\theta}} d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 d\theta = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi.$$

$$A(\Delta) = \int\int_{\Delta} \frac{1}{y^2} dS =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} -\frac{1}{y}\Big|_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-0 - \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \underbrace{=}_{x=\mathsf{sen}\theta} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\mathsf{sen}^2\theta}} d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 d\theta = \pi/2 - (-\pi/2) = \pi.$$

UAUUUUUUUUUUUUUUUUUUUUU

Área do triângulo retângulo generalizado

Área do triângulo retângulo generalizado

Metade da figura anterior é um triângulo retângulo generalizado.

Área do triângulo retângulo generalizado

Metade da figura anterior é um triângulo retângulo generalizado.

Logo... ele tem área $\pi/2$.

Teorema

Definição: Chamamos o *defeito* de um triângulo hiperbólico de ângulos α, β e γ a quantidade

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

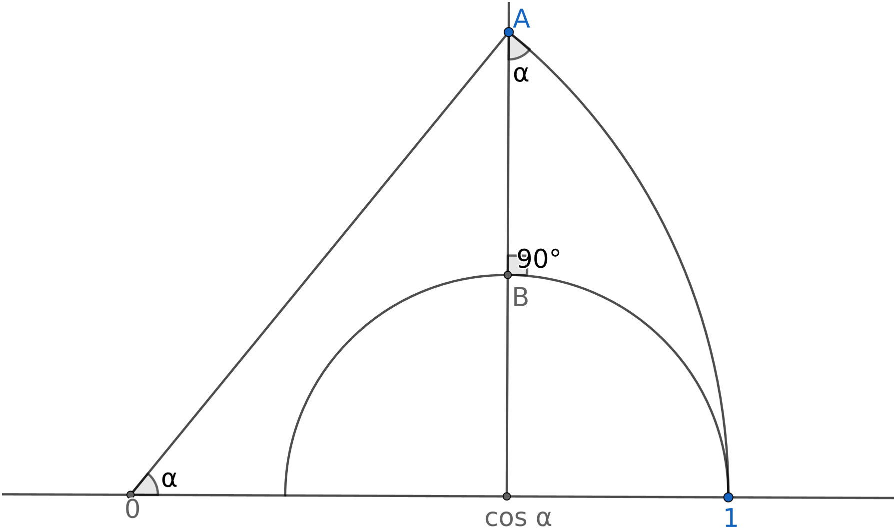
Teorema

Definição: Chamamos o *defeito* de um triângulo hiperbólico de ângulos α, β e γ a quantidade

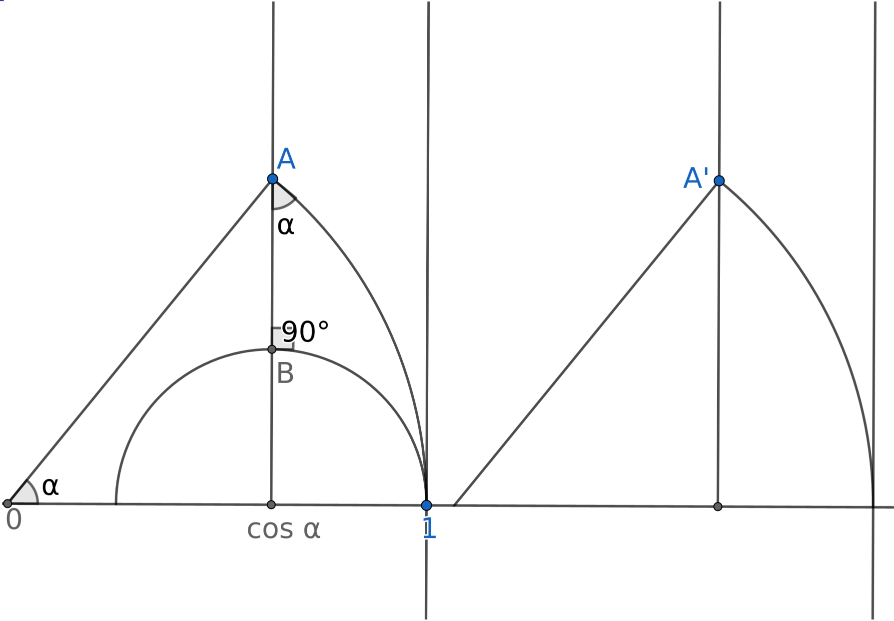
$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Teorema: A área de um triângulo hiperbólico é igual ao seu defeito. Em particular, todo triângulo hiperbólico tem área menor ou igual a π.

Algumas ideias da prova



Explicitamente:



A área é a área do triângulo retângulo ideal menos a área do

Esta segunda é dada por

$$\int_{\cos\alpha}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}\frac{1}{y^2}dydx=\int_{\cos\alpha}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arccos(1)-\arccos(\cos(\alpha))=$$

Então a área é

$$\frac{\pi}{2}-\alpha=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

Escólio: A área do triângulo com dois vértices ideais e o outro correspondendo a um ângulo $\pi-\alpha$ é α.

Com mais um ângulo...

O raciocínio é análogo, basta subtrair outra parte conveniente. Fica como exercício (boa diversão!).

Por onde seguir...

Por onde seguir...

Fazendo mais algumas contas, pode-se provar

Teorema (versão do Teorema de Pitágoras): Se ABC é triângulo hiperbólico ordinário retângulo em A, com $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ e $c = d(A, B)$, então

$$\cosh(a) = \cosh(b)\cosh(c).$$

Teorema de Pitágoras hiperbólico

Teorema de Pitágoras hiperbólico

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Teorema de Pitágoras hiperbólico

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

então fazendo a expansão de Taylor

$$1 + \frac{a^2}{2} + o(a^4) = \left(1 + \frac{b^2}{2} + o(b^4)\right)\left(1 + \frac{c^2}{2} + o(c^4)\right) \Rightarrow$$

$$a^2 \approx b^2 + c^2$$

sempre que a, b, c forem números bem pequenininhos.

Curvaturas

Curvaturas

Outra coisa a calcular é a curvatura do hiperbólico, que é negativa (em contraste à curvatura da esfera); há também muitos caminhos a trilhar por aí...

É isso aí...

É isso aí...

Muito obrigada pela atenção!

miriamt@mat.ufrgs.br