Introdução à Geometria Hiperbólica Plana

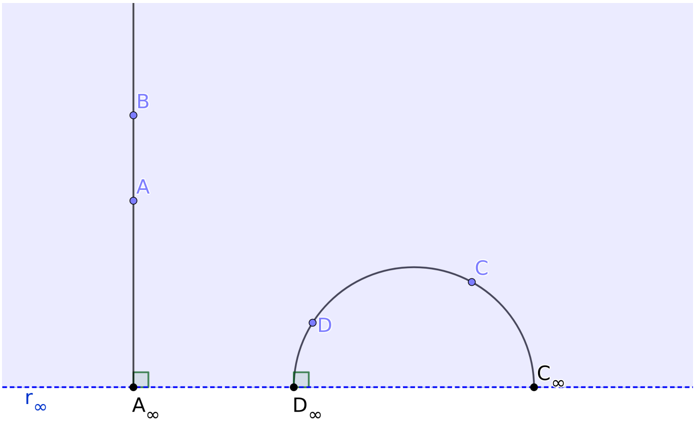
Miriam Telichevesky
miriamt@mat.ufrgs.br

Matemática em Minicursos - UFRGS, abril de 2021

Aula 4

Lembrando do modelo

Lembrando do modelo



Isometrias

Isometrias

As isometrias são as reflexões em torno das retas hiperbólicas.

Isometrias

As isometrias são as reflexões em torno das retas hiperbólicas.

Isometrias

As isometrias são as reflexões em torno das retas hiperbólicas.

- Se r é dada por uma semirreta vertical, a reflexão coincide com a euclidiana.

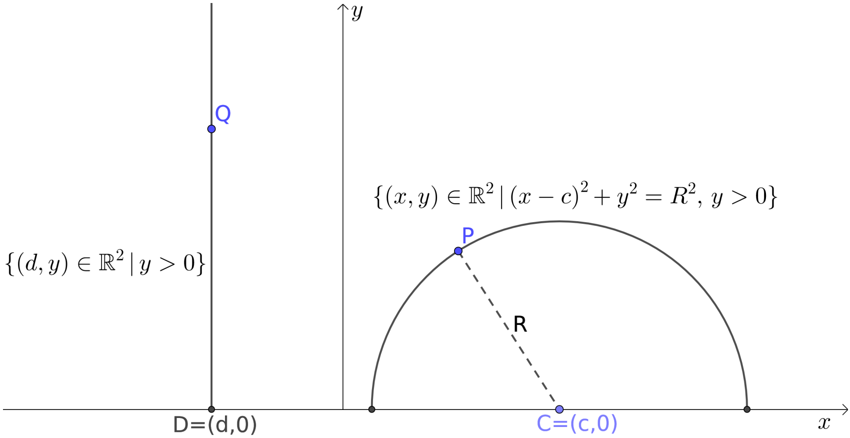
Isometrias

As isometrias são as reflexões em torno das retas hiperbólicas.

- Se r é dada por uma semirreta vertical, a reflexão coincide com a euclidiana.
- Se r é um semicírculo centrado em $O \in r_\infty$, a reflexão é a inversão euclidiana com respeito a este círculo.

Sistema de coordenadas

Sistema de coordenadas



Problemas geométricos

Antes de calcular distâncias (precisamos fixar uma unidade de medida para fazer isso), vamos solucionar alguns problemas geométricos.

Ponto médio

Ponto médio

São dados A e B dois pontos hiperbólicos. Determinar seu ponto médio M, isto é, o ponto na reta que liga A e B e que satisfaz que $AM \equiv MB$.

Ponto médio

São dados A e B dois pontos hiperbólicos. Determinar seu ponto médio M, isto é, o ponto na reta que liga A e B e que satisfaz que $AM \equiv MB$.

Para obter a congruência desejada, deve existir uma isometria $L : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ tal que $L(A) = M$ e $L(M) = B$.

Ponto médio

São dados A e B dois pontos hiperbólicos. Determinar seu ponto médio M, isto é, o ponto na reta que liga A e B e que satisfaz que $AM \equiv MB$.

Para obter a congruência desejada, deve existir uma isometria $L : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ tal que $L(A) = M$ e $L(M) = B$.
Vamos separar em dois casos, conforme o formato da reta hiperbólica.

Ponto médio

Sejam A e B pontos numa reta que é dada por uma semirreta vertical.

Ponto médio

Sejam A e B pontos numa reta que é dada por uma semirreta vertical. Sem perda de generalidade, vamos supor que esta semirreta é a parte positiva do eixo y – se não fosse, bastaria realizar uma translação horizontal, que é isometria.

Ponto médio

Sejam A e B pontos numa reta que é dada por uma semirreta vertical. Sem perda de generalidade, vamos supor que esta semirreta é a parte positiva do eixo y – se não fosse, bastaria realizar uma translação horizontal, que é isometria.

Então $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$, com $a, b > 0$. Sem perda de generalidade suponhamos que $a < b$.

Ponto médio

Sejam A e B pontos numa reta que é dada por uma semirreta vertical. Sem perda de generalidade, vamos supor que esta semirreta é a parte positiva do eixo y – se não fosse, bastaria realizar uma translação horizontal, que é isometria.

Então $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$, com $a, b > 0$. Sem perda de generalidade suponhamos que $a < b$.

O ponto médio M deve ter a cara $M = (0, m)$ para algum $m \in (a, b)$.

Ponto médio

Sejam A e B pontos numa reta que é dada por uma semirreta vertical. Sem perda de generalidade, vamos supor que esta semirreta é a parte positiva do eixo y – se não fosse, bastaria realizar uma translação horizontal, que é isometria.

Então $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$, com $a, b > 0$. Sem perda de generalidade suponhamos que $a < b$.

O ponto médio M deve ter a cara $M = (0, m)$ para algum $m \in (a, b)$.

Vamos apresentar L tal que $L(A) = M$ e $L(M) = B$.

Ponto médio

Ponto médio

Seja L uma homotetia (euclidiana) de centro $O = (0,0)$ e razão k. Então $L(x,y) = (kx, ky)$ para qualquer (x,y).

Ponto médio

Seja L uma homotetia (euclidiana) de centro $O = (0, 0)$ e razão k. Então $L(x, y) = (kx, ky)$ para qualquer (x, y). Observe que esta homotetia preserva o semieixo superior y.

Ponto médio

Seja L uma homotetia (euclidiana) de centro $O = (0, 0)$ e razão k. Então $L(x, y) = (kx, ky)$ para qualquer (x, y). Observe que esta homotetia preserva o semieixo superior y.

Agora: $L(A) = L(0, a) = (0, ka) =$

Ponto médio

Seja L uma homotetia (euclidiana) de centro $O = (0,0)$ e razão k. Então $L(x,y) = (kx, ky)$ para qualquer (x,y). Observe que esta homotetia preserva o semieixo superior y.

Agora: $L(A) = L(0,a) = (0,ka) = (0,m)$ e
$L(M) = L(0,m) = (0,km) =$

Ponto médio

Seja L uma homotetia (euclidiana) de centro $O = (0, 0)$ e razão k. Então $L(x, y) = (kx, ky)$ para qualquer (x, y). Observe que esta homotetia preserva o semieixo superior y.

Agora: $L(A) = L(0, a) = (0, ka) = (0, m)$ e
$L(M) = L(0, m) = (0, km) = (0, b)$.

Ponto médio

Seja L uma homotetia (euclidiana) de centro $O = (0, 0)$ e razão k. Então $L(x, y) = (kx, ky)$ para qualquer (x, y). Observe que esta homotetia preserva o semieixo superior y.

Agora: $L(A) = L(0, a) = (0, ka) = (0, m)$ e
$L(M) = L(0, m) = (0, km) = (0, b)$.
Então $ka = m$ e $km = b$, o que nos dá $k(ka) = b$, ou seja
$k^2 = \dfrac{b}{a}$.

Ponto médio

Seja L uma homotetia (euclidiana) de centro $O = (0, 0)$ e razão k. Então $L(x, y) = (kx, ky)$ para qualquer (x, y). Observe que esta homotetia preserva o semieixo superior y.

Agora: $L(A) = L(0, a) = (0, ka) = (0, m)$ e
$L(M) = L(0, m) = (0, km) = (0, b)$.
Então $ka = m$ e $km = b$, o que nos dá $k(ka) = b$, ou seja
$k^2 = \dfrac{b}{a}$.

Conclusão 1: A razão da homotetia procurada é $k = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Ponto médio

Seja L uma homotetia (euclidiana) de centro $O = (0, 0)$ e razão k. Então $L(x, y) = (kx, ky)$ para qualquer (x, y). Observe que esta homotetia preserva o semieixo superior y.

Agora: $L(A) = L(0, a) = (0, ka) = (0, m)$ e
$L(M) = L(0, m) = (0, km) = (0, b)$.
Então $ka = m$ e $km = b$, o que nos dá $k(ka) = b$, ou seja
$k^2 = \dfrac{b}{a}$.

Conclusão 1: A razão da homotetia procurada é $k = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Conclusão 2: O ponto médio M de $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$ é dado por

$$M =$$

Ponto médio

Seja L uma homotetia (euclidiana) de centro $O = (0, 0)$ e razão k. Então $L(x, y) = (kx, ky)$ para qualquer (x, y). Observe que esta homotetia preserva o semieixo superior y.

Agora: $L(A) = L(0, a) = (0, ka) = (0, m)$ e
$L(M) = L(0, m) = (0, km) = (0, b)$.
Então $ka = m$ e $km = b$, o que nos dá $k(ka) = b$, ou seja
$k^2 = \dfrac{b}{a}$.

Conclusão 1: A razão da homotetia procurada é $k = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Conclusão 2: O ponto médio M de $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$ é dado por

$$M = \left(0, \sqrt{ab}\right).$$

https://www.geogebra.org/classic/rgs5p89h

Ponto médio

Ponto médio

Analisemos agora o caso 2.

Ponto médio

Analisemos agora o caso 2.

Sejam A e B não alinhados verticalmente. Seja s a reta euclidiana que os contém (que não é vertical). Temos dois casos:

- s cruza o eixo x no ponto $C = (c, 0)$.
- s é horizontal.

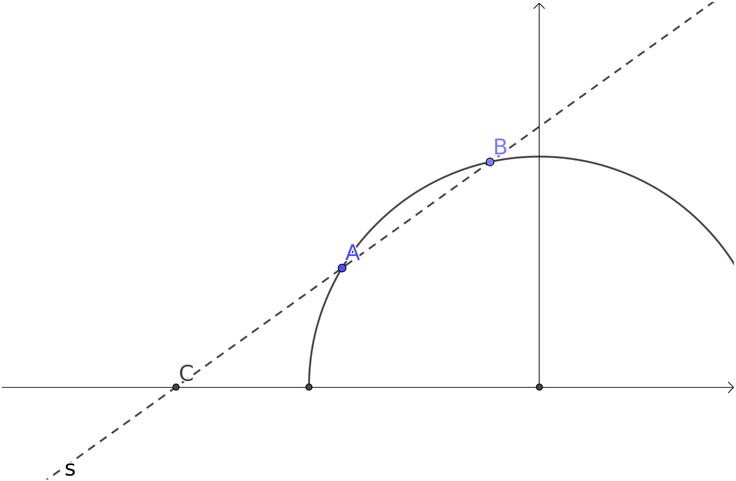
Ponto médio

Analisemos agora o caso 2.

Sejam A e B não alinhados verticalmente. Seja s a reta euclidiana que os contém (que não é vertical). Temos dois casos:

- s cruza o eixo x no ponto $C = (c, 0)$.
- s é horizontal.

Vou fazer só o primeiro, o segundo fica como exercício.


B
A
C
s

Ponto médio

Seja t a reta que passa por C e é tangente ao círculo que contém A e B. Seja M o ponto de intersecção de t com o círculo por A e B. Afirmamos que M é o ponto médio (hiperbólico) de A e B.

Ponto médio

Seja t a reta que passa por C e é tangente ao círculo que contém A e B. Seja M o ponto de intersecção de t com o círculo por A e B. Afirmamos que M é o ponto médio (hiperbólico) de A e B.

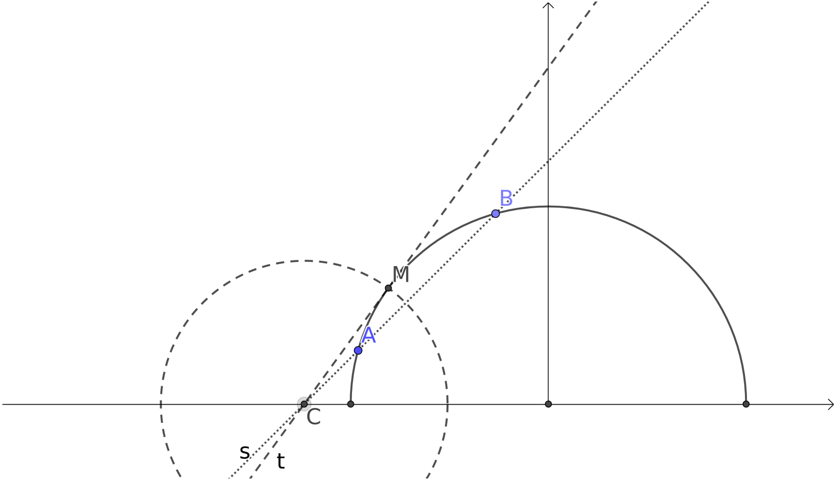
Duas coisas seguem da construção: M está na reta hiperbólica por A e B (como o ponto médio deveria estar!)

Ponto médio

Seja t a reta que passa por C e é tangente ao círculo que contém A e B. Seja M o ponto de intersecção de t com o círculo por A e B. Afirmamos que M é o ponto médio (hiperbólico) de A e B.

Duas coisas seguem da construção: M está na reta hiperbólica por A e B (como o ponto médio deveria estar!) e o círculo passando por M e de centro S é ortogonal à reta hiperbólica por A e B (então fica sendo um candidato para mediatriz).

Ponto médio



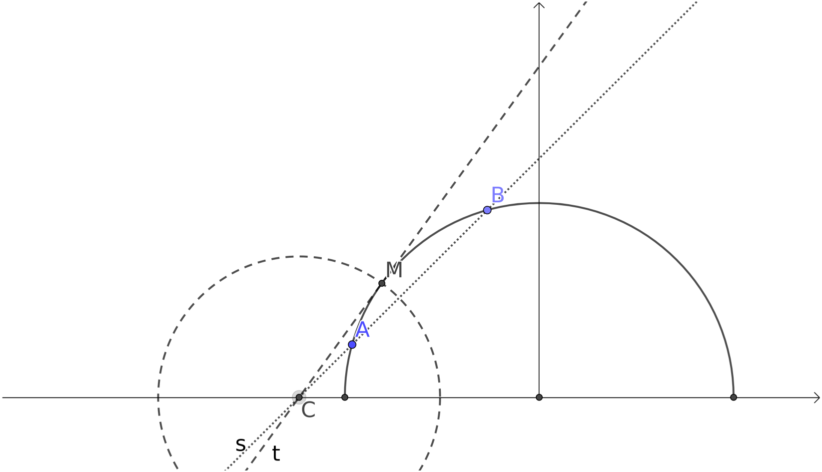
https://www.geogebra.org/classic/jg8kkwq6

Ponto médio

É suficiente então mostrar que o círculo centrado em C e passando por M produz uma inversão que leva A em B.

Ponto médio

É suficiente então mostrar que o círculo centrado em C e passando por M produz uma inversão que leva A em B.

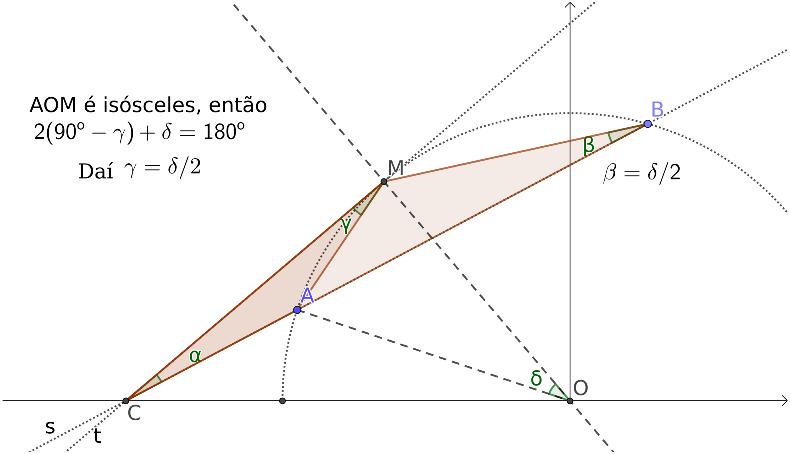


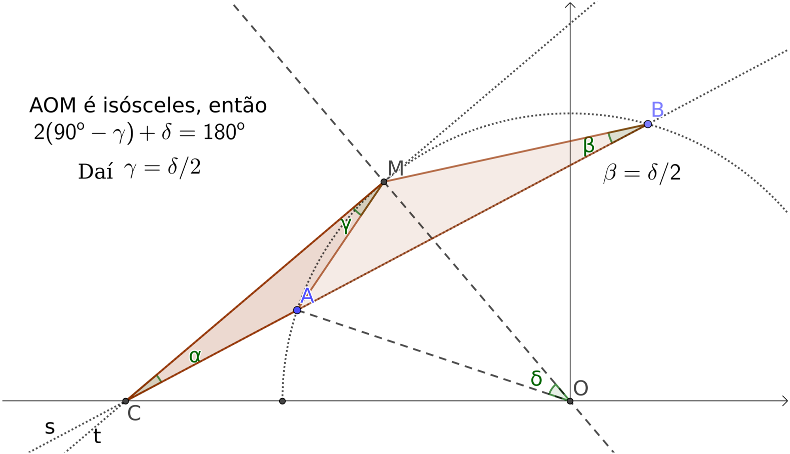
Ou seja: calculando comprimentos euclidianos,
$CA \times CB = CM^2$.

AOM é isósceles, então

$$2(90^\circ - \gamma) + \delta = 180^\circ$$

Daí $\gamma = \delta/2$





Os triângulos CAM e CMB são portanto semelhantes, e daí $CA/CM = CM/CB$, como queríamos.

Ponto médio e mediatriz

Acabamos então de construir o ponto médio e a mediatriz de segmentos!

Sem perda de generalidade...

Dadas duas retas, existem (infinitas) transformações de Lobaschewski que mapeiam uma na outra.

Sem perda de generalidade...

Dadas duas retas, existem (infinitas) transformações de Lobaschewski que mapeiam uma na outra.

Isso é particularmente útil para provar coisas que acontecem ao longo de uma reta, pois sem perda de generalidade podemos supor que são representadas por semirretas verticais.

https://www.geogebra.org/classic/fwdega5s
Exercício: provar que funciona.

Axioma de Arquimedes

Sejam A, B e C pontos na semirreta vertical $x = 0, y > 0$, digamos, $A = (0, a)$, $B = (0, b)$ e $C = (0, c)$, com $a < b < c$

Axioma de Arquimedes

Sejam A, B e C pontos na semirreta vertical $x = 0, y > 0$, digamos, $A = (0, a)$, $B = (0, b)$ e $C = (0, c)$, com $a < b < c$

Vamos mostrar que existe uma sequência de pontos $A_1, A_2, \dots A_n$, nesta ordem, tais que A_iA_{i+1} são todos congruentes a AB e tais que AA_n contém AC.

Axioma de Arquimedes

Sejam A, B e C pontos na semirreta vertical $x = 0, y > 0$, digamos, $A = (0, a)$, $B = (0, b)$ e $C = (0, c)$, com $a < b < c$

Vamos mostrar que existe uma sequência de pontos $A_1, A_2, \ldots A_n$, nesta ordem, tais que $A_i A_{i+1}$ são todos congruentes a AB e tais que AA_n contém AC.
Para isso, observe que a homotetia L de centro $O = (0, 0)$ e razão $k = b/a$ leva A em B. Sejam $A_1 = B$ e $A_2 = L(B)$. Então $A_2 = (b/a)(0, b)$, ou seja, $A_2 = (0, b^2/a)$. Seja $A_3 = L(A_2)$. Então $A_3 = (0, b^3/a^2)$. Prosseguindo indutivamente, temos que $A_i = (0, b^i/a^{i-1})$ para todo $i \geq 1$, isto é, a altura euclidiana de A_i é $a \left(\frac{b}{a}\right)^i$.

Axioma de Arquimedes

Sejam A, B e C pontos na semirreta vertical $x = 0, y > 0$, digamos, $A = (0, a)$, $B = (0, b)$ e $C = (0, c)$, com $a < b < c$

Vamos mostrar que existe uma sequência de pontos $A_1, A_2, \dots A_n$, nesta ordem, tais que $A_i A_{i+1}$ são todos congruentes a AB e tais que AA_n contém AC.
Para isso, observe que a homotetia L de centro $O = (0, 0)$ e razão $k = b/a$ leva A em B. Sejam $A_1 = B$ e $A_2 = L(B)$. Então $A_2 = (b/a)(0, b)$, ou seja, $A_2 = (0, b^2/a)$. Seja $A_3 = L(A_2)$. Então $A_3 = (0, b^3/a^2)$. Prosseguindo indutivamente, temos que $A_i = (0, b^i/a^{i-1})$ para todo $i \geq 1$, isto é, a altura euclidiana de A_i é $a\left(\dfrac{b}{a}\right)^i$.
Como $b/a > 1$, temos que esta quantidade fica tão grande quanto queiramos. Logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que AA_n contém AC.

Cálculo de distâncias

Inspirados em como calculamos distância usando uma "régua", vamos agora calcular a distância entre dois pontos hiperbólicos. Suponhamos que A, B e C sejam como no slide anterior. Vamos convencionar que AB vai funcionar como unidade de medida. Quantas cópias de AB cabem em AC?

Cálculo de distâncias

Tomando n na propriedade arquimediana como o menor possível, temos que

$$a\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} < c$$

mas

$$c \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

. Logo

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} < \frac{c}{a} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{n},$$

o que dá, aplicando $\log_{b/a}$:

$$n-1 < \log_{b/a}\frac{c}{a} < n,$$

e portanto o número de cópias de AB que cabe em AC satisfaz

$$n-1 < \frac{\ln(c/a)}{\ln(b/a)} < n.$$

Distâncias

Da estimativa

$$n - 1 < \frac{\ln(c/a)}{\ln(b/a)} \leq n$$

vemos que vale a pena tomar como segmento unitário aquele que liga $A = (0, 1)$ a $B = (0, e)$.
A partir de agora esta é nossa unidade de medida!
E a estimativa anterior então fica

$$n - 1 < ln(c) < n.$$

Isso quer dizer que a parte inteira da medida de AC é $n - 1$ satisfazendo a desigualdade acima (tem erro menor que 1).

Distâncias

Se no lugar do segmento AB tivéssemos considerado o segmento AM, onde M é o ponto médio de AB, estaríamos comparando AC com metade da unidade. As homotetias usadas teriam razão diferente e os números obtidos seriam uma aproximação com erro menor que $1/2$.

Distâncias

Se no lugar do segmento AB tivéssemos considerado o segmento AM, onde M é o ponto médio de AB, estaríamos comparando AC com metade da unidade. As homotetias usadas teriam razão diferente e os números obtidos seriam uma aproximação com erro menor que $1/2$.

Depois trocando pelo ponto médio de AM teríamos quantos quartos de medida cabem em AC, e assim sucessivamente.

Distâncias

Se no lugar do segmento AB tivéssemos considerado o segmento AM, onde M é o ponto médio de AB, estaríamos comparando AC com metade da unidade. As homotetias usadas teriam razão diferente e os números obtidos seriam uma aproximação com erro menor que $1/2$.

Depois trocando pelo ponto médio de AM teríamos quantos quartos de medida cabem em AC, e assim sucessivamente.

No fim das contas, o que ocorre é que o erro fica tão pequeno quanto queiramos e a quantidade que representa a medida do segmento AC é dada por $\ln(c)$ (lembre que $A = (0, 1)$).

Distância entre pontos alinhados verticalmente

Considerando o caso geral para medir: se $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$ com $a < b$ existe uma homotetia que leva A em $U = (0, 1)$, a saber, a de razão $1/a$. Esta mesma homotetia vai levar B em $C = (0, b/a)$. O comprimento de AB é igual ao comprimento de UC, e pelo que foi discutido acima deve valer $\ln(b/a)$.

Distância entre pontos alinhados verticalmente

Considerando o caso geral para medir: se $A = (0, a)$ e $B = (0, b)$ com $a < b$ existe uma homotetia que leva A em $U = (0, 1)$, a saber, a de razão $1/a$. Esta mesma homotetia vai levar B em $C = (0, b/a)$. O comprimento de AB é igual ao comprimento de UC, e pelo que foi discutido acima deve valer $\ln(b/a)$.

Por outro lado, se $b > a$ então a mesma conta nos dá $\ln(a/b)$ como medida de AB. Mas note que o módulo destas duas quantidades é a mesma, logo para quaisquer A e B alinhados verticalmente vale que

$$d(A, B) = \left| \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right| .$$

Distâncias – caso geral

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ e suponha que $x_A \neq x_B$. Digamos que o centro euclidiano do semicírculo que representa a reta que os contém é o ponto $C = (c, 0)$, e que o raio euclidiano deste círculo é R. Vamos inicialmente supor que R e $c = R$ (caso contrário devemos fazer uma translação horizontal antes de começar).

Distâncias – caso geral

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ e suponha que $x_A \neq x_B$. Digamos que o centro euclidiano do semicírculo que representa a reta que os contém é o ponto $C = (c, 0)$, e que o raio euclidiano deste círculo é R. Vamos inicialmente supor que R e $c = R$ (caso contrário devemos fazer uma translação horizontal antes de começar).

Então a reflexão hiperbólica na reta dada pelo semicírculo de centro $(2R, 0)$ e raio $2R$ leva a reta hiperbólica por A e B na reta vertical $\{x = 0, y > 0\}$.

Distâncias – caso geral

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ e suponha que $x_A \neq x_B$. Digamos que o centro euclidiano do semicírculo que representa a reta que os contém é o ponto $C = (c, 0)$, e que o raio euclidiano deste círculo é R. Vamos inicialmente supor que R e $c = R$ (caso contrário devemos fazer uma translação horizontal antes de começar).

Então a reflexão hiperbólica na reta dada pelo semicírculo de centro $(2R, 0)$ e raio $2R$ leva a reta hiperbólica por A e B na reta vertical $\{x = 0, y > 0\}$.

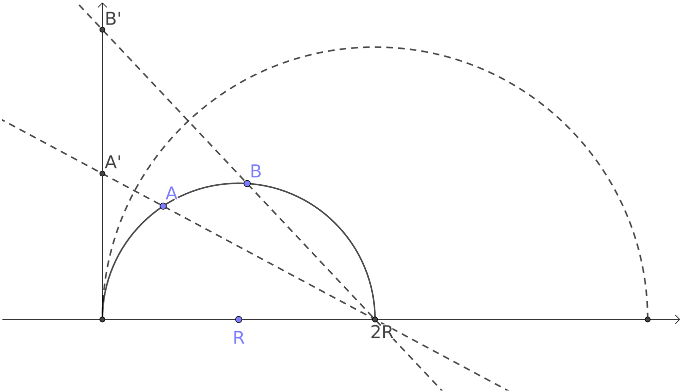
Chamaremos de P' a imagem de um ponto P na reta por A e B com respeito a esta reflexão. Além disso, se $P = (x, y)$ escrevemos $P' = (0, y')$.

Então vale que $\dfrac{y'}{2R} = \dfrac{y}{2R - x}$, ou seja,

$$y' = 2R\frac{y}{2R - x}.$$

Então vale que $\dfrac{y'}{2R} = \dfrac{y}{2R-x}$, ou seja,

$$y' = 2R\frac{y}{2R-x}.$$



Como a distância entre A e B é a mesma que entre A' e B', temos que vale, para quaisquer A e B num semicírculo tal que um dos extremos é a origem:

$$d(A, B) = \left|\ln\left(\frac{y'_B}{y'_A}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{(2R - x_A)y_B}{(2R - x_B)y_A}\right)\right|.$$

Como a distância entre A e B é a mesma que entre A' e B', temos que vale, para quaisquer A e B num semicírculo tal que um dos extremos é a origem:

$$d(A,B) = \left|\ln\left(\frac{y'_B}{y'_A}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{(2R - x_A)y_B}{(2R - x_B)y_A}\right)\right|.$$

Como A e B estão no círculo de centro $(0,R)$ e raio R, podemos escrever R em termos de suas coordenadas.

$$(x_A - R)^2 + y_A^2 = R^2 \Rightarrow 2R = \frac{x_A^2 + y_A^2}{x_A}.$$

(análogo para B), e com isso temos as distâncias em termos das coordenadas euclidianas (miraculosamente várias coisas se cancelam!), para quaisquer A e B num semicírculo tal que um dos extremos é a origem:

$$d(A,B) = \left|\ln\left(\frac{x_A y_B}{x_B y_A}\right)\right|.$$

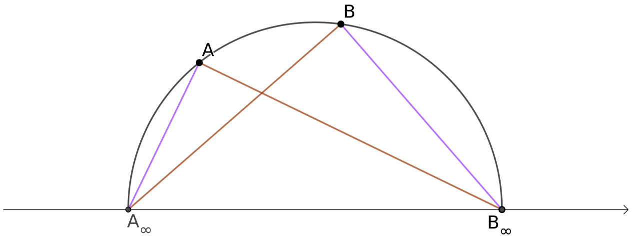
O caso geral é um pouco mais complicado e fica como exercício.

O caso geral é um pouco mais complicado e fica como exercício.

Outra coisa que pode ser demonstrada é que a distância pode ser dada pela *razão cruzada*

$$d(A,B) = \left| \ln \underbrace{\frac{AA_\infty \times BB_\infty}{AB_\infty \times BA_\infty}}_{(A,B;A_\infty,B_\infty)} \right|,$$

onde A_∞ e B_∞ são os pontos ideiais da reta por A e B.

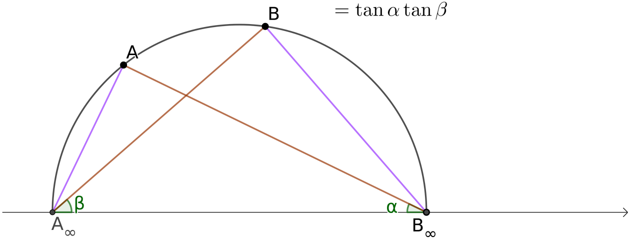


Razão cruzada

$$d(A,B) = \left|\ln\left(\frac{x_A y_B}{x_B y_A}\right)\right|$$

$$(A,B;A_\infty,B_\infty) = \frac{AA_\infty BB_\infty}{AB_\infty BA_\infty}$$

$$= \tan\alpha\tan\beta$$



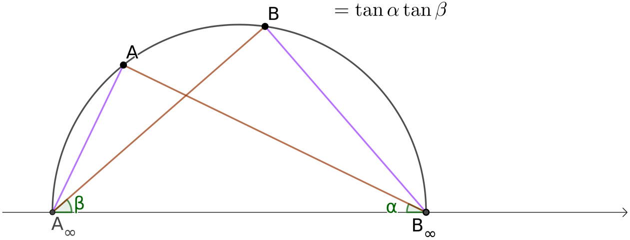
Provando que neste caso particular vale que é a razão cruzada, valerá sempre, pois ela é invariante por translações, uma vez que usa comprimentos euclidianos.

Razão cruzada

$$d(A,B) = \left|\ln\left(\frac{x_A y_B}{x_B y_A}\right)\right|$$

$$(A,B;A_\infty,B_\infty) = \frac{AA_\infty BB_\infty}{AB_\infty BA_\infty}$$

$$= \tan\alpha \tan\beta$$

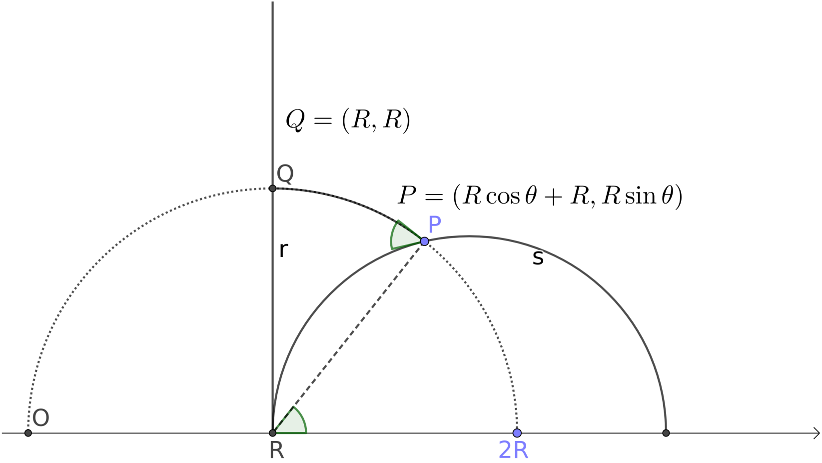


Provando que neste caso particular vale que é a razão cruzada, valerá sempre, pois ela é invariante por translações, uma vez que usa comprimentos euclidianos.

A dica da prova está na figura, comparar ângulos. Suponha que A_∞ é a origem, senão a fórmula em coordenadas não vale.

Ângulo de paralelismo

Ângulo de paralelismo



$$d(P,Q) = \left| \ln \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right|,$$

Quando θ é um ângulo entre 0^o e 90^o temos que $\tan(\theta/2) \leq 1$ e portanto podemos tirar o módulo incluindo um sinal de negativo:

$$d = -\ln(\tan(\theta/2))$$

e portanto

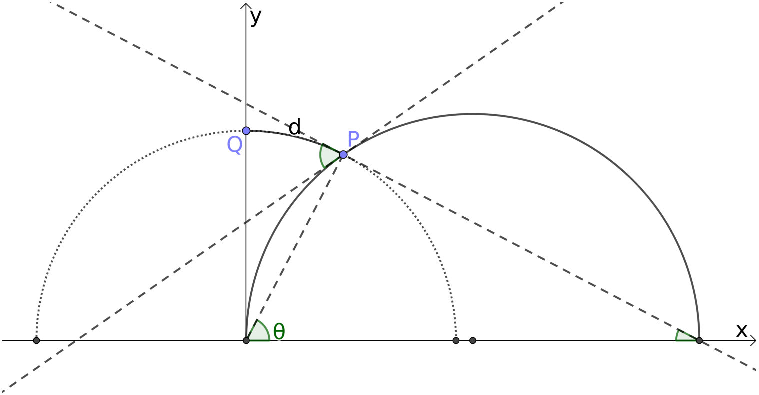
$$e^{-d} = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right),$$

ou seja, a função ângulo de paralelismo Φ satisfaz

$$\Phi(d) = 2 \arctan(e^{-d})$$

Parametrizações

Temos como obter a "parametrização por comprimento de arco" das retas que são dadas por semicírculos.
$P = (R\cos\theta, R\mathsf{sen}\theta)$, na figura: d é a distância percorrida de Q a P para obter o ângulo de parelismo θ.
Logo $e^{-d} = \tan(\theta/2)$.



Parametrizações

Manipulando algebricamente:

$$e^d + e^{-d} = \cot(\theta/2) + \tan(\theta/2) = \frac{\cos^2(\theta/2) + \mathsf{sen}^2(\theta/2)}{\cos(\theta/2)\mathsf{sen}(\theta/2)},$$

ou seja

$$\cosh(d) = \frac{1}{sen(\theta)},$$

e portanto

$$\mathsf{sen}(\theta) = \mathsf{sech}(d).$$

Parametrizações

Manipulando algebricamente:

$$e^d + e^{-d} = \cot(\theta/2) + \tan(\theta/2) = \frac{\cos^2(\theta/2) + \mathsf{sen}^2(\theta/2)}{\cos(\theta/2)\mathsf{sen}(\theta/2)},$$

ou seja

$$\cosh(d) = \frac{1}{sen(\theta)},$$

e portanto

$$\mathsf{sen}(\theta) = \mathsf{sech}(d).$$

Analogamente, $\cos(\theta) = \tanh(d)$.

Parametrizações

Assim, $P = (R\tanh(d), R\mathsf{sech}(d))$. É possível estender tudo para d negativo.

Parametrizações

Assim, $P = (R\tanh(d), R\mathsf{sech}(d))$. É possível estender tudo para d negativo.
A vantagem desta forma de escrever é que a distância entre dois pontos nesta geodésica vai ser a diferença dos valores de d correspondentes.

Parametrizações

Assim, $P = (R\tanh(d), R\mathsf{sech}(d))$. É possível estender tudo para d negativo.
A vantagem desta forma de escrever é que a distância entre dois pontos nesta geodésica vai ser a diferença dos valores de d correspondentes.

Se o círculo não está centrado na origem, basta transladar.

Próxima aula

Próxima aula

Na próxima aula vamos ver mais algumas coisas interessantes no modelo:

Próxima aula

Na próxima aula vamos ver mais algumas coisas interessantes no modelo:

- Curvas equidistantes e horociclos

Próxima aula

Na próxima aula vamos ver mais algumas coisas interessantes no modelo:

- Curvas equidistantes e horociclos
- Medições de curvas suaves, áreas

Próxima aula

Na próxima aula vamos ver mais algumas coisas interessantes no modelo:

- Curvas equidistantes e horociclos
- Medições de curvas suaves, áreas
- Mais Algumas coisas sobre triângulos (e outros tipos de triângulos).