Introdução à Geometria Hiperbólica Plana

Miriam Telichevesky
miriamt@mat.ufrgs.br

Matemática em Minicursos - UFRGS, abril de 2021

Aula 3

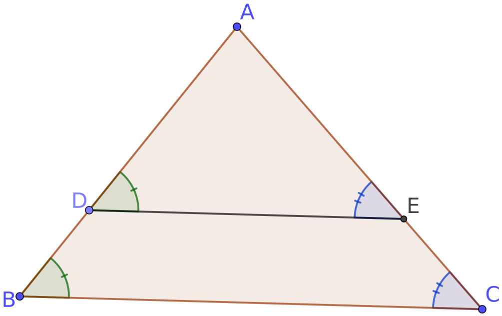
Antes de ir para o modelo

Antes de ir para o modelo

Uma observação que esqueci de fazer: é relativamente simples se convencer que não existem triângulos semelhantes sem que sejam congruentes, dentro da Geometria Hiperbólica.

Antes de ir para o modelo

Uma observação que esqueci de fazer: é relativamente simples se convencer que não existem triângulos semelhantes sem que sejam congruentes, dentro da Geometria Hiperbólica.



Modelos

Modelos

Um modelo para a Geometria Hiperbólica é uma descrição de todos os seus objetos usando ferramentas da geometria euclidiana.

Modelos

Um modelo para a Geometria Hiperbólica é uma descrição de todos os seus objetos usando ferramentas da geometria euclidiana.

Há 3 modelos bastante famosos: de Klein, do disco de Poincaré e do plano de Lobaschewski.

Modelos

Um modelo para a Geometria Hiperbólica é uma descrição de todos os seus objetos usando ferramentas da geometria euclidiana.

Há 3 modelos bastante famosos: de Klein, do disco de Poincaré e do plano de Lobaschewski.

Os dois últimos serão tratados aqui, e eles têm uma relação mais ou menos simples que leva um para o outro.

Modelos

Um modelo para a Geometria Hiperbólica é uma descrição de todos os seus objetos usando ferramentas da geometria euclidiana.

Há 3 modelos bastante famosos: de Klein, do disco de Poincaré e do plano de Lobaschewski.

Os dois últimos serão tratados aqui, e eles têm uma relação mais ou menos simples que leva um para o outro.

Vou me aprofundar aqui no modelo do semiplano superior de Lobaschewski, por isso vou começar com o modelo do disco.

Antes disso...

Para ter certeza que os objetos que vamos apresentar aqui de fato *representam a Geometria Hiperbólica*, precisamos nos convencer que todos os axiomas da Geometria Hiperbólica são satisfeitos por eles.

Antes disso...

Para ter certeza que os objetos que vamos apresentar aqui de fato *representam a Geometria Hiperbólica*, precisamos nos convencer que todos os axiomas da Geometria Hiperbólica são satisfeitos por eles.

Por isso vamos antes de introduzir os modelos dizer quais são os axiomas que vamos considerar, que são aqueles do sistema de Hilbert.

Axiomas de Hilbert

São divididos em 5 grupos:

- Axiomas de incidência
- Axiomas de ordem
- Axiomas de congruência
- Axiomas de continuidade
- Axioma das paralelas

Axiomas de incidência

I1 Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contenha.

I2 Qualquer reta contém pelo menos dois pontos distintos.

I3 Existem pelo menos três pontos não colineares.

Axiomas de ordem

O1 Se um ponto B está entre A e C então A, B e C são pontos distintos e B está entre C e A.

O2 Dados dois pontos distintos B e D, existem A, C, E tais que B está entre A e C, C está entre B e D e D está entre C e E.

O3 Dados três pontos distintos em uma reta, apenas um deles se localiza entre os outros dois.

O4 Sejam r uma reta e A, B e C três pontos distintos não pertencentes a r. Então

- Se A e B estão do mesmo lado de r e B e C estão do mesmo lado de r, então A e C estão do mesmo lado de r.
- Se A e B estão em lados opostos de r, e B e C estão do mesmo lado de r, então A e C estão de lados opostos de r.

Obs: com estes axiomas é possível definir segmentos, semirretas e semiplanos.

Axiomas de congruência

M1 Se A e B são pontos distintos e A' é origem de uma semirreta s, então existe um único ponto $B' \in s$ tal que AB é congruente a $A'B'$.

M2 Se AB é congruente a CD e CD é congruente a EF, então AB é congruente a EF. Todo segmento é congruente a si mesmo.

M3 Sejam A, B e C colineares com B entre A e C, e sejam A', B' e C' também colineares, com B' entre A' e C'. Se AB é congruente a $A'B'$ e BC é congruente a $B'C'$, então AC é congruente a $A'C'$.

M4 Sejam $\hat{A}$ um ângulo, r uma reta e σ um semiplano determinado por r. Dado $B \in r$ e fixada uma semirreta $s \subset r$ a partir de B, existe uma única semirreta t com origem em B tal que s e t formam um ângulo congruente a $\hat{A}$.

M5 Todo ângulo é congruente a si mesmo. Se $\hat{A}$ é congruente a $\hat{B}$ e $\hat{B}$ é congruente a $\hat{C}$, então $\hat{A}$ é congruente a $\hat{C}$.

M6 Vale o critério "lado-ângulo-lado" de congruência de triângulos: se A, B, C e A', B', C' são tais que $AB \equiv A'B'$, $A\hat{B}C \equiv A'\hat{B'}C'$ e $BC \equiv B'C'$, então os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes.

Axiomas de continuidade

C1 **Axioma de Arquimedes** Sejam AB e CD segmentos. Existe um número finito de pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ na reta que passa por A e B tais que $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \ldots A_{n-1}A_n \equiv CD$ e AA_n contém AB.

C2 **Axioma de Dedekind** Seja uma reta r e suponha que existem dois subconjuntos não vazios de r, C_1 e C_2, tais que $r \subset C_1 \cup C_2$. Além disso, suponha que nenhum ponto de C_1 está entre dois pontos de C_2 e nenhum ponto de C_2 está entre dois pontos de C_1. Então existe um único ponto $O \in r$ tal que O está entre P_1 e P_2 se e somente se $P_1 \in C_1$ e $P_2 \in C_2$, com $O \neq P_i$.

Axioma das paralelas

P Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, existem pelo menos duas retas passando por P que não interseccionam r.

Modelo do Disco de Poincaré

Modelo do Disco de Poincaré

No plano euclidiano, fixamos um disco (unitário, por exemplo) com centro em um ponto O. Os pontos da geometria hiperbólica serão os pontos interiores do disco.

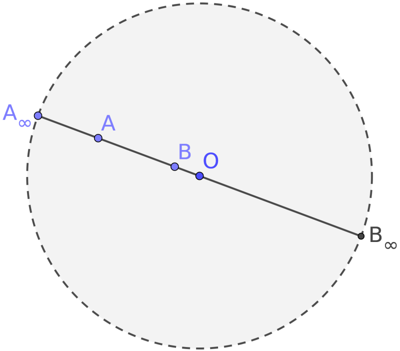
Modelo do Disco de Poincaré

No plano euclidiano, fixamos um disco (unitário, por exemplo) com centro em um ponto O. Os pontos da geometria hiperbólica serão os pontos interiores do disco.

Dados dois pontos A, B distintos no interior do disco, temos duas possibilidades:

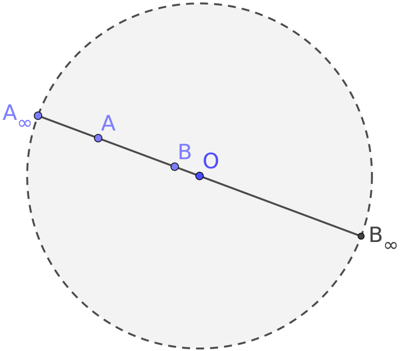
Modelo do Disco de Poincaré

Caso 1: A, B definem um diâmetro do disco (isto é, são colineares com O).



Modelo do Disco de Poincaré

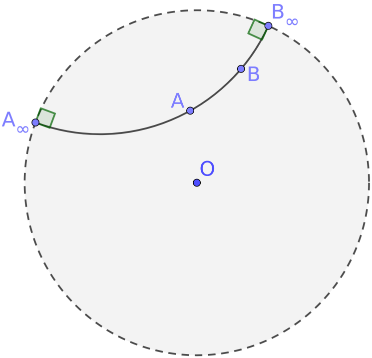
Caso 1: A, B definem um diâmetro do disco (isto é, são colineares com O).



Neste caso, dizemos que a reta por A e B é o diâmetro que os contém.

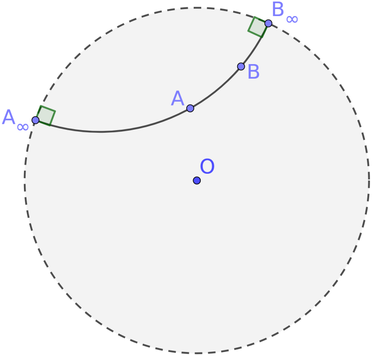
Modelo do Disco de Poincaré

Caso 2: A, B não definem um diâmetro do disco (isto é, não são colineares com O).



Modelo do Disco de Poincaré

Caso 2: A, B não definem um diâmetro do disco (isto é, não são colineares com O).



Neste caso, dizemos que o arco de círculo por A e B e perpendicular à fronteira do disco unitário é a reta por A e B.

Modelo do Disco de Poincaré

Em qualquer um dos casos A e B definem pontos no bordo do disco (os pontos ideais da reta que os liga!) A_∞ e B_∞.

Modelo do Disco de Poincaré

Em qualquer um dos casos A e B definem pontos no bordo do disco (os pontos ideais da reta que os liga!) A_∞ e B_∞. Decretando que a distância entre A e B é dada por

$$d(A, B) = \ln \left| \frac{AB_\infty \cdot BA_\infty}{AA_\infty \cdot BB_\infty} \right|,$$

onde as medições de segmentos que aparecem aqui são euclidianas, podemos ver que as retas são de fato infinitas.

O ângulo entre duas retas fica sendo o ângulo entre as tangentes dos objetos que as definem.

Modelo do Disco de Poincaré

Verificação dos Axiomas:

Modelo do Disco de Poincaré

Verificação dos Axiomas:

E

Modelo do Disco de Poincaré

Verificação dos Axiomas:

EX

Modelo do Disco de Poincaré

Verificação dos Axiomas:

EXE

Modelo do Disco de Poincaré

Verificação dos Axiomas:

EXER

Modelo do Disco de Poincaré

Verificação dos Axiomas:

EXERC

Modelo do Disco de Poincaré

Verificação dos Axiomas:

EXERCÍ

Modelo do Disco de Poincaré

Verificação dos Axiomas:

EXERCÍC

Modelo do Disco de Poincaré

Verificação dos Axiomas:

EXERCÍCI

Modelo do Disco de Poincaré

Verificação dos Axiomas:

EXERCÍCIO

Modelo do Disco de Poincaré

Verificação dos Axiomas:

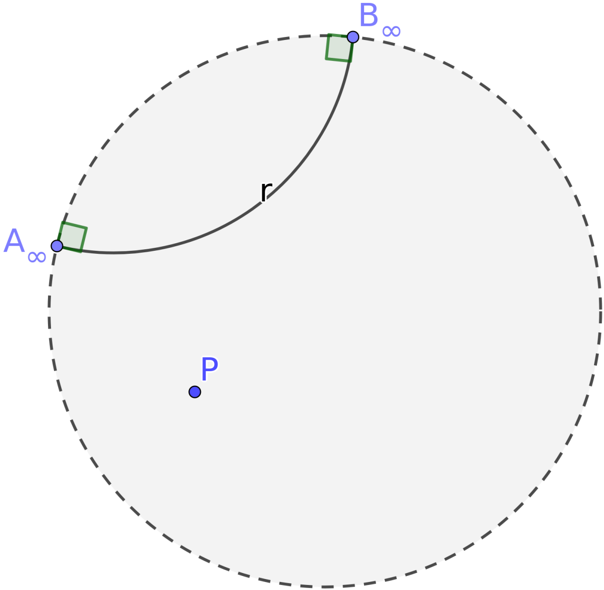
EXERCÍCIO!!!!!

Modelo do Disco de Poincaré

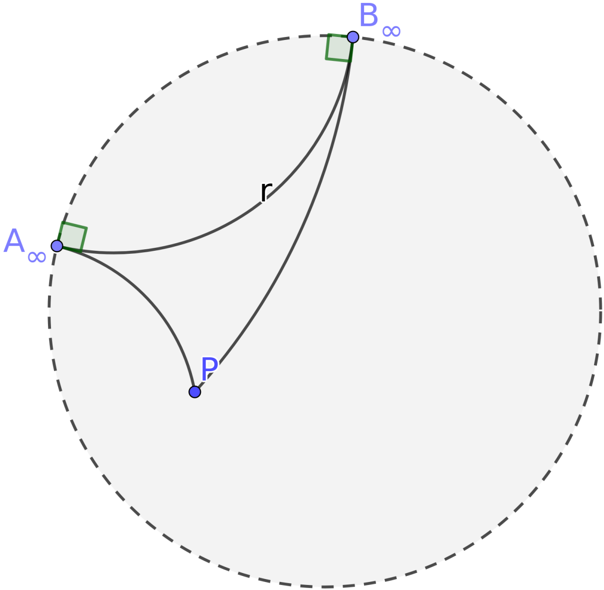
Verificação dos Axiomas:

EXERCÍCIO!!!!!

Disco de Poincaré - Postulado das Paralelas



Disco de Poincaré - Postulado das Paralelas



Disco de Poincaré: alguns triângulos congruentes

Disco de Poincaré: alguns triângulos congruentes

Imagem de Izabella Muraro de Freitas:

Disco de Poincaré: alguns triângulos congruentes

Imagem de Izabella Muraro de Freitas:

Isometrias

O motivo de escolher falar mais sobre o semiplano de Lobaschewski do que sobre o disco de Poincaré: é mais fácil descrever as isometrias (minha opinião!).

Isometrias

O motivo de escolher falar mais sobre o semiplano de Lobaschewski do que sobre o disco de Poincaré: é mais fácil descrever as isometrias (minha opinião!).

Particularmente: se quero entender uma isometria no disco de Poincaré eu vou para o semiplano, faço lá a isometria e depois volto.

Isometrias

O motivo de escolher falar mais sobre o semiplano de Lobaschewski do que sobre o disco de Poincaré: é mais fácil descrever as isometrias (minha opinião!).

Particularmente: se quero entender uma isometria no disco de Poincaré eu vou para o semiplano, faço lá a isometria e depois volto.

Voltaremos a falar das isometrias em breve (assim que tivermos o modelo construído).

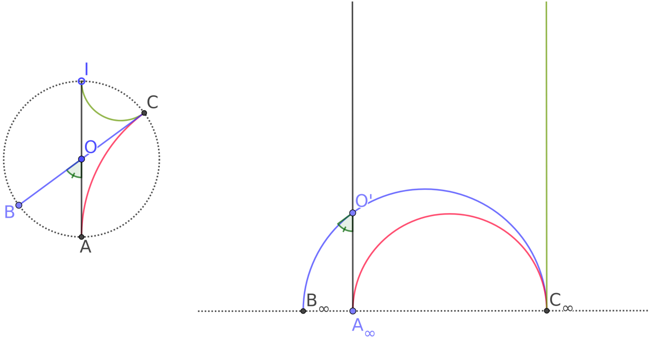
https://www.youtube.com/watch?v=eGEQ_UuQtYs

Modelo do semiplano superior:

Escolhemos um ponto no bordo do disco de Poincaré para "tirar fora" (será o infinito) e esticamos o que sobra do bordo até formar uma reta.

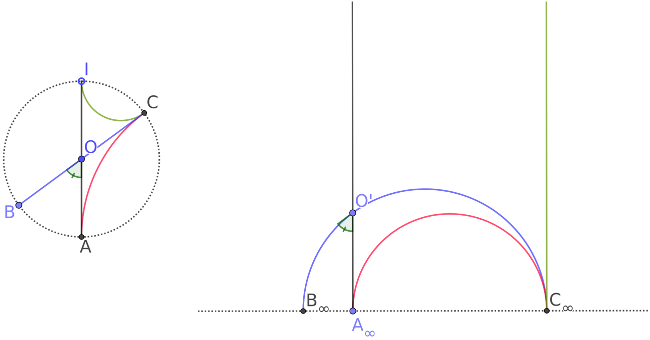
Modelo do semiplano superior:

Escolhemos um ponto no bordo do disco de Poincaré para “tirar fora” (será o infinito) e esticamos o que sobra do bordo até formar uma reta.



Modelo do semiplano superior:

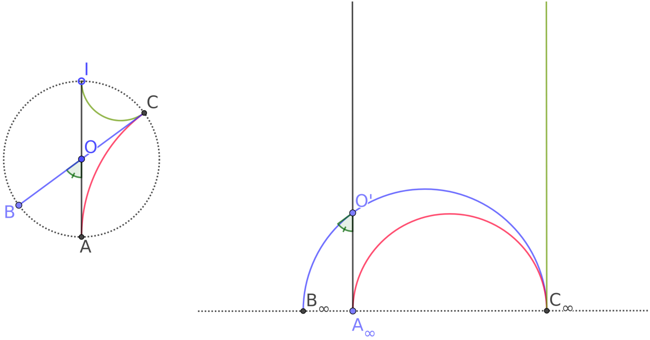
Escolhemos um ponto no bordo do disco de Poincaré para “tirar fora” (será o infinito) e esticamos o que sobra do bordo até formar uma reta.



Este processo preserva ângulos!

Modelo do semiplano superior:

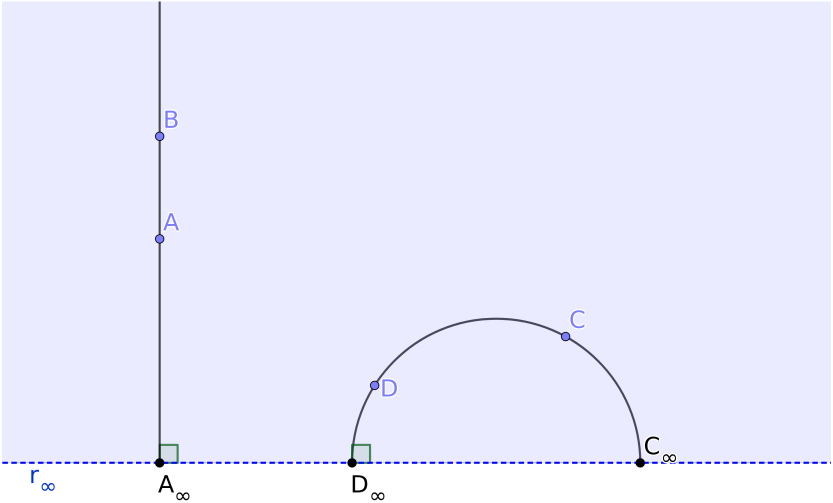
Escolhemos um ponto no bordo do disco de Poincaré para "tirar fora" (será o infinito) e esticamos o que sobra do bordo até formar uma reta.



Este processo preserva ângulos!

As retas que terminavam no ponto retirado passarão a ser retas, as outras serão arcos de círculos. Com a preservação de ângulos, todas serão perpendiculares à fronteira.

Retas no semiplano de Lobaschewski



Os pontos ideias são agora os pontos de r_∞ juntamente com “o infinito” (qualquer coisa que divirja está indo para o infinito), denotado aqui por ∞.

Axiomas

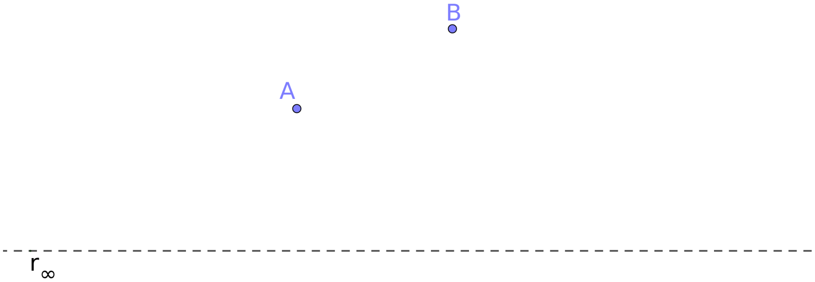
Verificar que os demais axiomas valem: usar o que sabemos de geometria euclidiana.

Axiomas

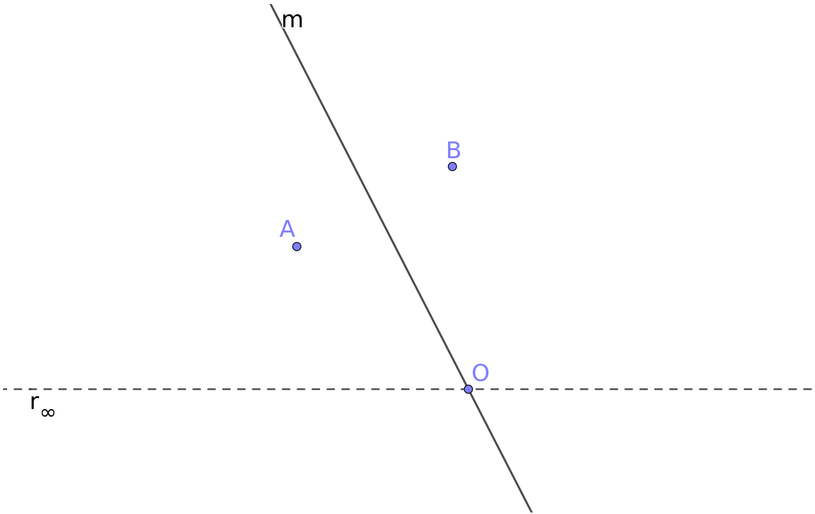
Verificar que os demais axiomas valem: usar o que sabemos de geometria euclidiana.

Axioma (I1): Dados dois pontos A e B distintos, encontrar uma reta que os contenha.

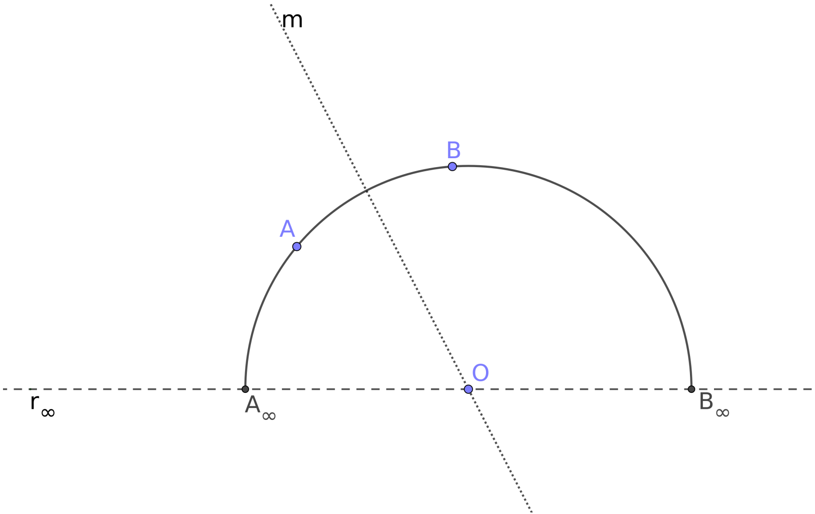
Reta por dois pontos distintos A e B - Caso 1



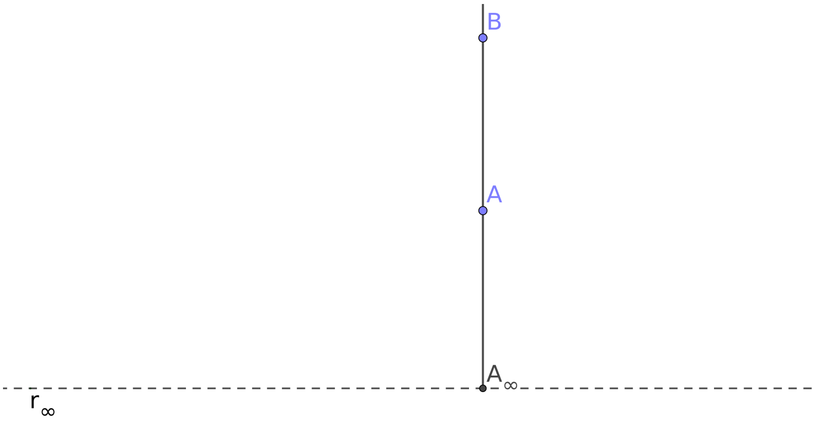
Reta por dois pontos distintos A e B - Caso 1



Reta por dois pontos distintos A e B - Caso 1



Reta por dois pontos distintos A e B - Caso 2



Demais axiomas de incidência

- **I2** Qualquer reta contém pelo menos dois pontos distintos.
- **I3** Existem pelo menos três pontos não colineares.

Axiomas de ordem

O1 Se um ponto B está entre A e C então A, B e C são pontos distintos e B está entre C e A.

Axiomas de ordem

O1 Se um ponto B está entre A e C então A, B e C são pontos distintos e B está entre C e A.

O2 Dados dois pontos distintos B e D, existem A, C, E tais que B está entre A e C, C está entre B e D e D está entre C e E.

Axiomas de ordem

O1 Se um ponto B está entre A e C então A, B e C são pontos distintos e B está entre C e A.

O2 Dados dois pontos distintos B e D, existem A, C, E tais que B está entre A e C, C está entre B e D e D está entre C e E.

O3 Dados três pontos distintos em uma reta, apenas um deles se localiza entre os outros dois.

Axiomas de ordem

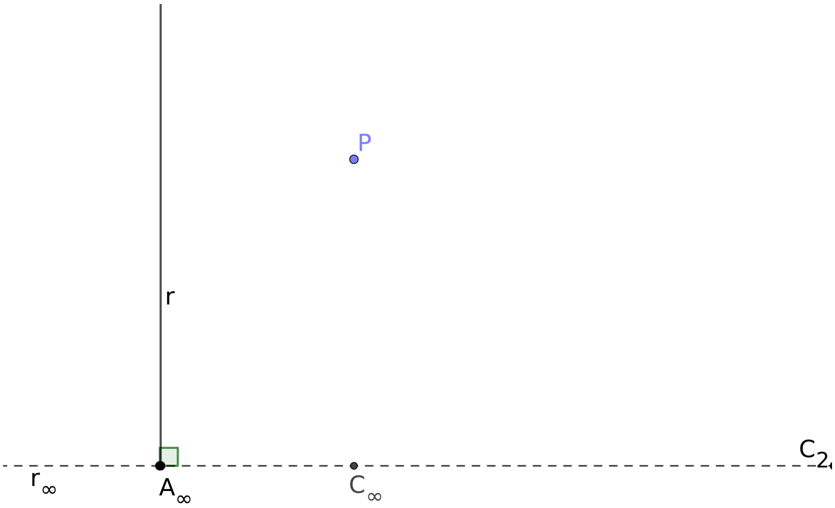
- **O1** Se um ponto B está entre A e C então A, B e C são pontos distintos e B está entre C e A.
- **O2** Dados dois pontos distintos B e D, existem A, C, E tais que B está entre A e C, C está entre B e D e D está entre C e E.
- **O3** Dados três pontos distintos em uma reta, apenas um deles se localiza entre os outros dois.
- **O4** Sejam r uma reta e A, B e C três pontos distintos não pertencentes a r. Então
  - Se A e B estão do mesmo lado de r e B e C estão do mesmo lado de r, então A e C estão do mesmo lado de r.
  - Se A e B estão em lados opostos de r, e B e C estão do mesmo lado de r, então A e C estão de lados opostos de r.

Axioma das paralelas

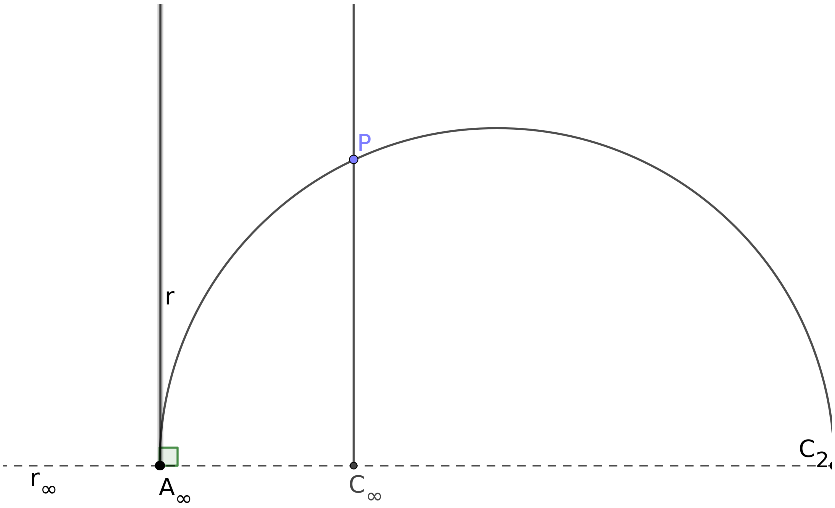
Axioma das paralelas

Duas retas são paralelas quando se encontram num ponto ideal (para se encontrarem em ∞ devem ser semirretas verticais, do ponto de vista euclidiano).

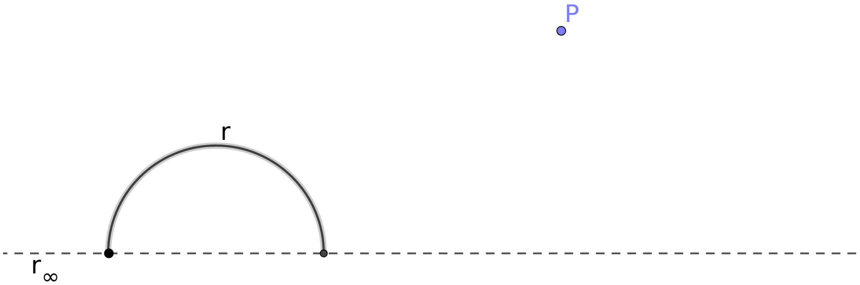
Postulado das paralelas



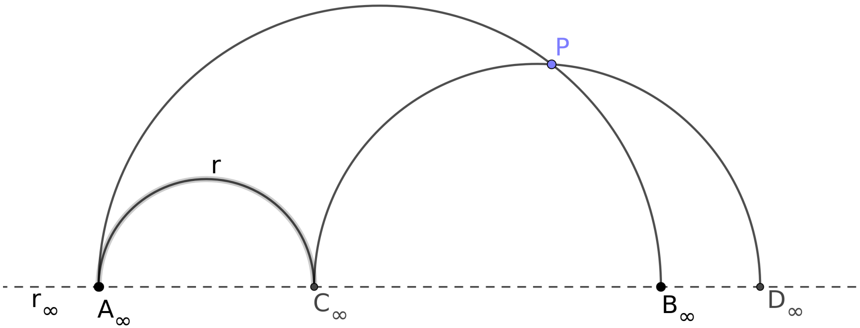
Postulado das paralelas



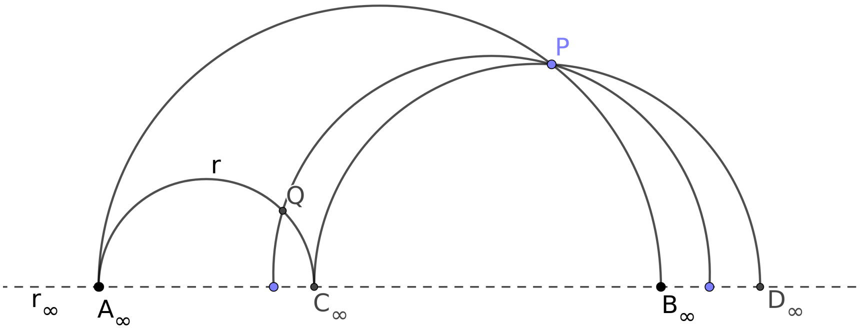
Postulado das paralelas



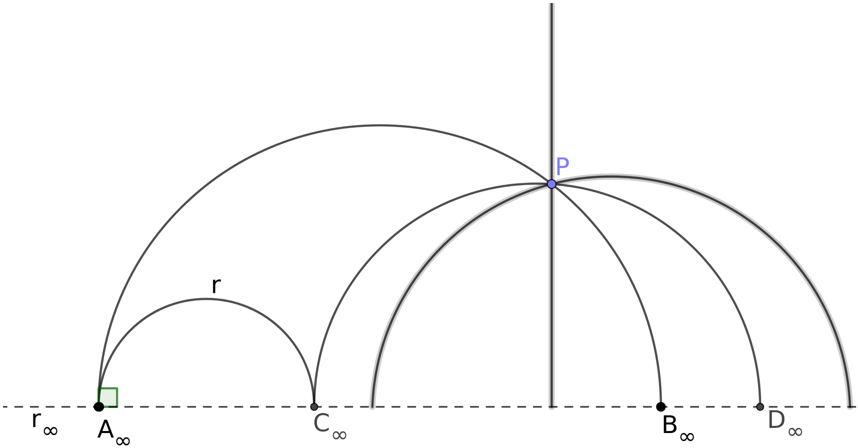
Postulado das paralelas



Retas por P que interseccionam r



Retas por P que não interseccionam r



Axiomas de congruência

Axiomas de congruência

A medida de um ângulo (união de duas semirretas de mesma origem) é definida como sendo a medida do ângulo euclidiano do modelo (tomando tangentes se necessário).

Axiomas de congruência

A medida de um ângulo (união de duas semirretas de mesma origem) é definida como sendo a medida do ângulo euclidiano do modelo (tomando tangentes se necessário).

Com isso ganhamos:

- **M4** Sejam $\hat{A}$ um ângulo, r uma reta e σ um semiplano determinado por r. Dado $B \in r$ e fixada uma semirreta $s \subset r$ a partir de B, existe uma única semirreta t com origem em B tal que s e t formam um ângulo congruente a $\hat{A}$.
- **M5** Todo ângulo é congruente a si mesmo. Se $\hat{A}$ é congruente a $\hat{B}$ e $\hat{B}$ é congruente a $\hat{C}$, então $\hat{A}$ é congruente a $\hat{C}$.

Axiomas de congruência

Axiomas de congruência

Para a congruência de segmentos, temos dois caminhos a seguir: ou decretamos como calcular a distância e verificamos quais transformações do semiplano superior preservam estas distâncias (são as isometrias), ou começamos com transformações que vamos decretar que definirão isometrias e depois calculamos distâncias.

Axiomas de congruência

Para a congruência de segmentos, temos dois caminhos a seguir: ou decretamos como calcular a distância e verificamos quais transformações do semiplano superior preservam estas distâncias (são as isometrias), ou começamos com transformações que vamos decretar que definirão isometrias e depois calculamos distâncias.

Como o segundo caminho me parece mais bonito e natural, é ele que vou seguir aqui.

Axiomas de congruência

Para a congruência de segmentos, temos dois caminhos a seguir: ou decretamos como calcular a distância e verificamos quais transformações do semiplano superior preservam estas distâncias (são as isometrias), ou começamos com transformações que vamos decretar que definirão isometrias e depois calculamos distâncias.

Como o segundo caminho me parece mais bonito e natural, é ele que vou seguir aqui.

Vou começar pensando o que são transformações razoáveis de decretar que sejam "isometrias". Não as chamarei assim porque como o comprimento ainda não está definido, não faz sentido entender se as transformações preservam ou não comprimentos.

Reflexões

https://www.geogebra.org/classic/gqvdzcu6

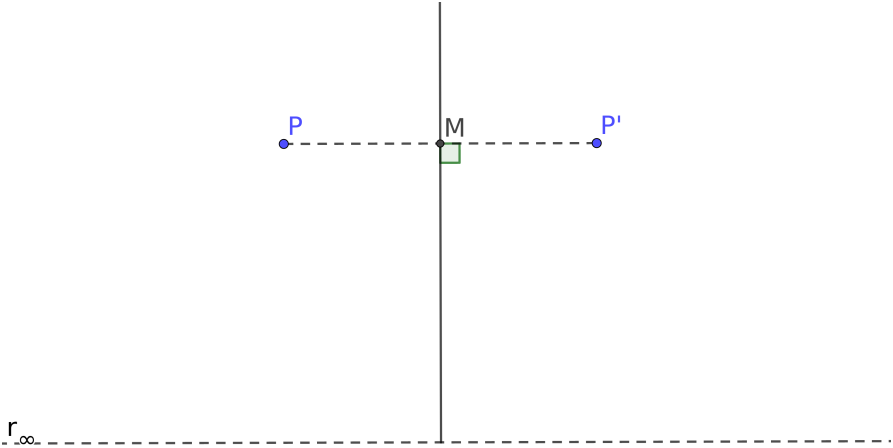
Reflexões

Reflexões

Se a reta hiperbólica for representada por uma semirreta no modelo do semiplano, a reflexão em torno dela coincide com a euclidiana.

Reflexões

Se a reta hiperbólica for representada por uma semirreta no modelo do semiplano, a reflexão em torno dela coincide com a euclidiana.



Inversões

Quando a reta for dada por um semicírculo, vamos pensar nas *inversões* euclidianas:

Inversões

Quando a reta for dada por um semicírculo, vamos pensar nas *inversões* euclidianas:

Se $P \neq O$ é um ponto do plano, então $i(P) = P'$ é tal que P' pertence a semirreta com origem em O e passando por P e tal que $OP' \times OP = R^2$.

Inversões

Quando a reta for dada por um semicírculo, vamos pensar nas *inversões* euclidianas:

Se $P \neq O$ é um ponto do plano, então $i(P) = P'$ é tal que P' pertence a semirreta com origem em O e passando por P e tal que $OP' \times OP = R^2$.

https://www.geogebra.org/classic/bdnp6ucj

Inversões

Quando a reta for dada por um semicírculo, vamos pensar nas *inversões* euclidianas:

Se $P \neq O$ é um ponto do plano, então $i(P) = P'$ é tal que P' pertence a semirreta com origem em O e passando por P e tal que $OP' \times OP = R^2$.

https://www.geogebra.org/classic/bdnp6ucj

Pensando no plano estendido, temos que $i(O) = \infty$ e $i(\infty) = O$.

Inversões

Quando a reta for dada por um semicírculo, vamos pensar nas *inversões* euclidianas:

Se $P \neq O$ é um ponto do plano, então $i(P) = P'$ é tal que P' pertence a semirreta com origem em O e passando por P e tal que $OP' \times OP = R^2$.

https://www.geogebra.org/classic/bdnp6ucj

Pensando no plano estendido, temos que $i(O) = \infty$ e $i(\infty) = O$.

Obs: fixa os pontos do círculo, e troca o interior com o exterior. Transforma círculos e retas em círculos e retas.

Inversões

Quando a reta for dada por um semicírculo, vamos pensar nas *inversões* euclidianas:

Se $P \neq O$ é um ponto do plano, então $i(P) = P'$ é tal que P' pertence a semirreta com origem em O e passando por P e tal que $OP' \times OP = R^2$.

https://www.geogebra.org/classic/bdnp6ucj

Pensando no plano estendido, temos que $i(O) = \infty$ e $i(\infty) = O$.

Obs: fixa os pontos do círculo, e troca o interior com o exterior. Transforma círculos e retas em círculos e retas. Lembrete: faz no Geogebra que vale a pena!

Inversões

Quando a reta for dada por um semicírculo, vamos pensar nas *inversões* euclidianas:

Se $P \neq O$ é um ponto do plano, então $i(P) = P'$ é tal que P' pertence a semirreta com origem em O e passando por P e tal que $OP' \times OP = R^2$.

https://www.geogebra.org/classic/bdnp6ucj

Pensando no plano estendido, temos que $i(O) = \infty$ e $i(\infty) = O$.

Obs: fixa os pontos do círculo, e troca o interior com o exterior. Transforma círculos e retas em círculos e retas. Lembrete: faz no Geogebra que vale a pena!

Inversões

No semiplano superior, inversões com respeito a círculos ortogonais a r_∞ funcionam como reflexões.

Inversões

No semiplano superior, inversões com respeito a círculos ortogonais a r_∞ funcionam como reflexões.

https://www.geogebra.org/classic/djgkgpzg

Inversões

No semiplano superior, inversões com respeito a círculos ortogonais a r_∞ funcionam como reflexões.

https://www.geogebra.org/classic/djgkgpzg

Obs.: É possível provar que a reta hiperbólica por P e P' é ortogonal à reta da reflexão hiperbólica, cruzando num ponto M que depois por definição será o ponto médio de P e P'.

Inversões

No semiplano superior, inversões com respeito a círculos ortogonais a r_∞ funcionam como reflexões.

https://www.geogebra.org/classic/djgkgpzg

Obs.: É possível provar que a reta hiperbólica por P e P' é ortogonal à reta da reflexão hiperbólica, cruzando num ponto M que depois por definição será o ponto médio de P e P'.

Spoiler: Para calcular o ponto médio de dois pontos hiperbólicos traçaremos sua mediatriz hiperbólica (a reta de reflexão) como induz o arquivo do Geogebra! nó na cabeça: a reta euclidiana por P e P' dá (o centro da) a mediatriz hiperbólica; a mediatriz de P e P' dá (o centro da) a reta hiperbólica por eles.

Transformações de Lobaschewski

Transformações de Lobaschewski

Dizemos que $L : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ é uma *transformação de Lobaschewski* se ela puder ser escrita como uma composta de (uma quantidade finita de) reflexões hiperbólicas.

Transformações de Lobaschewski

Dizemos que $L : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ é uma *transformação de Lobaschewski* se ela puder ser escrita como uma composta de (uma quantidade finita de) reflexões hiperbólicas.

São exemplos destas transformações:

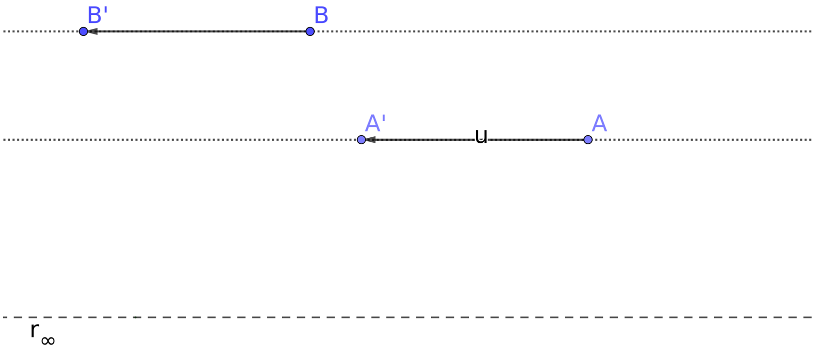
- Translações euclidianas paralelas à reta r_∞.
- Homotetias euclidianas com centro em r_∞.

“Translações”

As translações euclidianas numa direção que seja paralela a r_∞ podem ser escritas como compostas de duas reflexões em torno de retas representadas por semirretas verticais

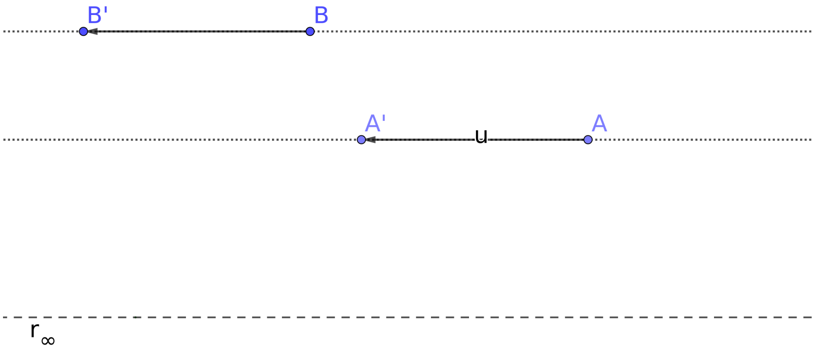
“Translações”

As translações euclidianas numa direção que seja paralela a r_∞ podem ser escritas como compostas de duas reflexões em torno de retas representadas por semirretas verticais (reflita!).



“Translações”

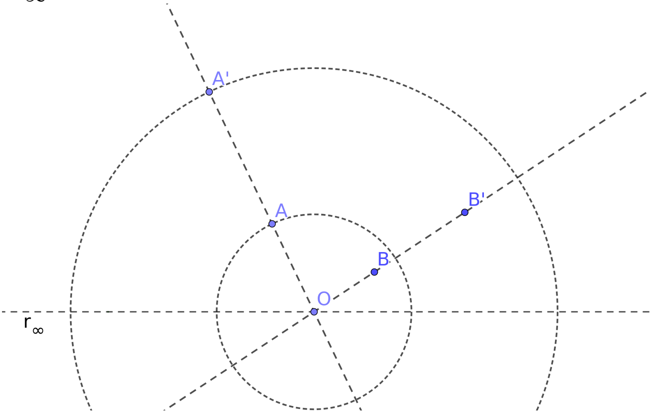
As translações euclidianas numa direção que seja paralela a r_∞ podem ser escritas como compostas de duas reflexões em torno de retas representadas por semirretas verticais (reflita!).



Deixam fixo o ∞.

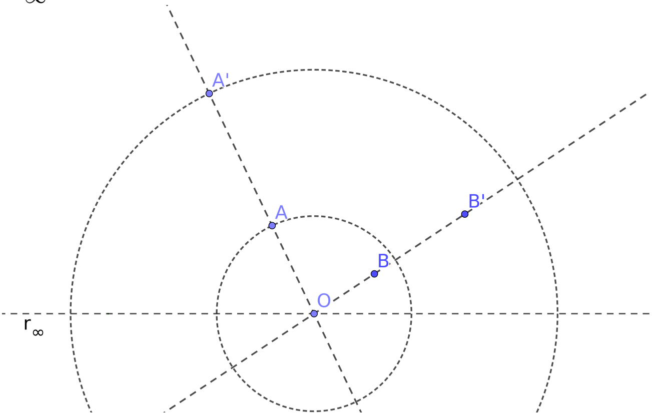
"Homotetias"

Uma homotetia euclidiana centrada em um ponto $O_\infty \in r_\infty$ pode ser escrita como composta de duas reflexões em torno de retas hiperbólicas representadas por semicírculos centrados em O_∞.



“Homotetias”

Uma homotetia euclidiana centrada em um ponto $O_\infty \in r_\infty$ pode ser escrita como composta de duas reflexões em torno de retas hiperbólicas representadas por semicírculos centrados em O_∞.



Deixam fixos tanto o centro O da homotetia quanto o ∞.

Definição de congruência

Definição de congruência

Diremos que dois segmentos AB e $A'B'$ são *congruentes* se existir uma transformação de Lobaschewski L tal que $L(A) = A'$ e $L(B) = B'$.

Definição de congruência

Diremos que dois segmentos AB e $A'B'$ são *congruentes* se existir uma transformação de Lobaschewski L tal que $L(A) = A'$ e $L(B) = B'$.

É possível mostrar que com esta definição todos os axiomas de congruência de segmentos são satisfeitos.

Definição de congruência

Diremos que dois segmentos AB e $A'B'$ são *congruentes* se existir uma transformação de Lobaschewski L tal que $L(A) = A'$ e $L(B) = B'$.

É possível mostrar que com esta definição todos os axiomas de congruência de segmentos são satisfeitos. Alguns são imediatos, outros necessitam de algumas propriedades especiais das transformações de Lobaschewski, que não entraremos em muitos detalhes (acreditem em mim!).

Definição de congruência

Diremos que dois segmentos AB e $A'B'$ são *congruentes* se existir uma transformação de Lobaschewski L tal que $L(A) = A'$ e $L(B) = B'$.

É possível mostrar que com esta definição todos os axiomas de congruência de segmentos são satisfeitos. Alguns são imediatos, outros necessitam de algumas propriedades especiais das transformações de Lobaschewski, que não entraremos em muitos detalhes (acreditem em mim!).

E agora sim, do jeito que definimos congruência temos que toda transformação de Lobaschewski é isometria. É possível provar que a recíproca é verdadeira: qualquer transformação de $\mathbb{H}^2$ que leve cada segmento em outro congruente a ele é uma transformação de Lobaschewski. Então a partir de agora vamos chamá-las de **isometrias**!

Próxima aula

Próxima aula

Usando estas isometrias vamos definir uma unidade de medida e calcular distâncias.