

# Física Matemática e Geral: Tópicos Avançados em Física Teórica

Prof. Fernando Haas  
UFRGS – 2019/2

- Um curso sobre equações diferenciais ordinárias (EDOs) e parciais (EDPs) e aplicações na Física
- Teoria de perturbação para EDOs
- Sistemas integráveis (sólitons) em EDPs

# 1. Teorias de perturbação singulares e regulares aplicadas a equações diferenciais ordinárias

- (Kevorkian and Cole, cap. 2)
- Exemplos físicos
- Dependência da solução em função de um parâmetro pequeno  $\varepsilon$
- Expectativa: reproduzir o comportamento esperado fisicamente
- Exemplos ilustrativos

## Oscilador linear: teoria de perturbação regular

- Sistema massa-mola amortecido com força impulsiva:

$$M \frac{d^2 Y}{dT^2} + B \frac{dY}{dT} + KY = I_0 \delta(T)$$

$$Y(0^-) = \frac{dY(0^-)}{dT} = 0,$$

- Ou integrando de  $T = 0^-$  até  $T = 0^+$

$$M \frac{d^2 Y}{dT^2} + B \frac{dY}{dT} + KY = 0, \quad T > 0$$

$$Y(0^+) = 0$$

$$\frac{dY(0^+)}{dT} = \frac{I_0}{M}.$$

(fazer, p. 1 das notas manuscritas)

- Perturbação regular:  $B$  pequeno (coeficiente de amortecimento)  $\rightarrow$  solução semelhante ao oscilador não dissipativo
- Sendo  $A$  = amplitude:

$$t^* = \frac{T}{(M/K)^{1/2}}, \quad y = \frac{Y}{A}$$

Identificando o parâmetro pequeno após re-escalonar

$$\frac{d^2y}{dt^{*2}} + 2\varepsilon^* \frac{dy}{dt^*} + y = 0,$$

$$\varepsilon^* = \frac{B}{2(MK)^{1/2}}. \quad (\text{fazer})$$

$y(0^+) = 0, dy(0^+)/dt^* = 1$  if we set  $A = I_0/(MK)^{1/2}$ .

- Expansão em série:

$$y(t^*, \varepsilon^*) = g_0(t^*) + \varepsilon^* g_1(t^*) + \dots$$

Daí segue (fazer):

$$\frac{d^2 g_0}{dt^{*2}} + g_0 = 0; \quad g_0(0) = 0, \quad \frac{dg_0(0)}{dt^*} = 1$$

$$\frac{d^2 g_1}{dt^{*2}} + g_1 = -2 \frac{dg_0}{dt^*}; \quad g_1(0) = \frac{dg_1(0)}{dt^*} = 0$$

$$\frac{d^2 g_i}{dt^{*2}} + g_i = -2 \frac{dg_{i-1}}{dt^*}; \quad g_i(0) = \frac{dg_i(0)}{dt^*} = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$



- Resolvendo:

$$g_0 = \sin t^*,$$
$$g_1 = -t^* \sin t^*,$$

- Ou seja:

$$y = \sin t^* - \varepsilon t^* \sin t^* + O(\varepsilon^2 t^{*2}).$$

- Solução exata:

$$\begin{aligned} y(t^*, \varepsilon^*) &= \frac{e^{-\varepsilon^* t^*}}{\sqrt{1 - \varepsilon^{*2}}} \sin(\sqrt{1 - \varepsilon^{*2}} t^*) \\ &= (1 - \varepsilon^* t^*) \sin t^* + \mathcal{O}(\varepsilon^{*2} t^{*2}) \end{aligned}$$

Expansão coincide para tempo fixo e finito (vide p. 9)

Se  $t^* \rightarrow \infty$ , não faz sentido tomar  $\varepsilon^* t^* \ll 1$

# Oscilador linear: problema singular

Massa  $M \rightarrow 0$

A EDO que era de segunda ordem fica de primeira ordem

As condições iniciais (p. 5) ficam arruinadas (não podem ser simultaneamente válidas)

Surgimento de uma camada limite (boundary layer) tal como na hidrodinâmica (parâmetro pequeno: viscosidade)

Próximo à fronteira (ex: tubo): viscosidade importante

Longe: fluido invíscido (ideal)

Problema: ligar as soluções longe e perto da fronteira (matching)

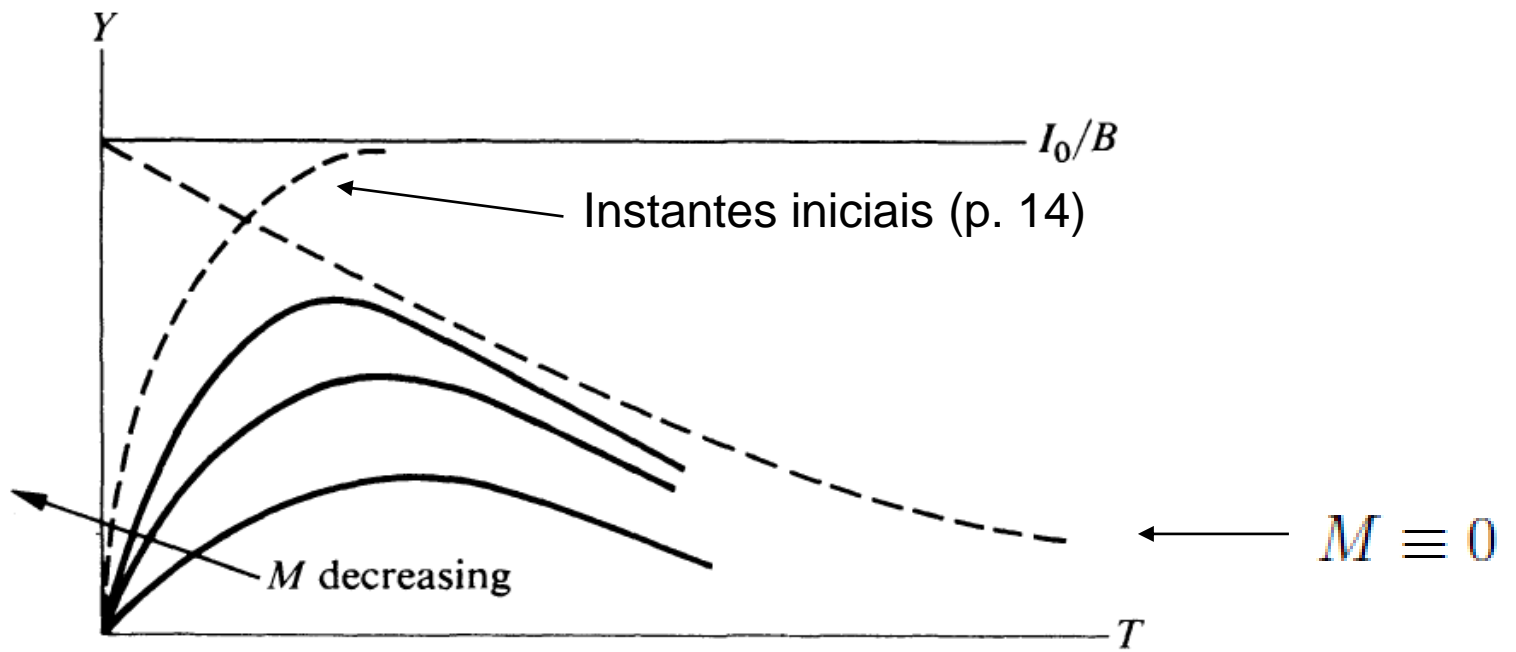


Figure 2.2.1 Solution Curves, Varying  $M$

- Tomando  $M \equiv 0$  :

$$B \frac{dY}{dT} + KY = I_0 \delta(T).$$

- Integrando como antes (p. 5):

$$Y(0+) = \frac{I_0}{B}.$$

$$T > 0 \quad \Rightarrow \quad B \frac{dY}{dT} + KY = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{I_0}{B} e^{-KT/B}.$$

- O que dizer dos instantes iniciais?

$$M \frac{d^2 Y}{dT^2} + B \frac{dY}{dT} = I_0 \delta(t), \quad Y(0-) = 0, \quad \frac{dY}{dT}(0-) = 0$$

with the solution

$$Y(T) = \frac{I_0}{B} \{1 - e^{-BT/M}\}.$$

“salto”

(solução na p. 2 das notas anexas)

Desprezou-se a mola porque não chegou a haver deslocamento

Já a inércia e o atrito são relevantes

O resultado explica uma das curvas na p. 12

- Seja

$$t = \frac{K}{B} T, \quad y = B \frac{Y}{I_0}$$

Verificar:  $t$ ,  $y$  e  $\epsilon$  adimensionais

- Então

$$\epsilon \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0,$$

where  $\epsilon = MK/B^2$ , with initial conditions

$$y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = \frac{1}{\epsilon}.$$

- Isso funciona bem, se for longe do ponto inicial (expansão externa – outer expansion)

- Problema: juntar os comportamentos longe e próximo do instante inicial (outer and inner expansions)
- Expansão externa

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad t \text{ fixed (outer limit)}$$

$$y(t, \varepsilon) = v_1(\varepsilon)h_1(t) + v_2(\varepsilon)h_2(t) + \dots$$

Isso não é necessariamente uma série de potências.

Apenas  $v_2$  é de ordem mais alta que  $v_1$



- Subs. p. 15

$$\varepsilon \left( \nu_1 \ddot{h}_1 + \nu_2 \ddot{h}_2 \right) + \nu_1 \dot{h}_1 + \nu_2 \dot{h}_2 + \nu_1 h_1 + \nu_2 h_2 = 0$$

- Os termos de ordem mais baixa dão (por quê?)

$$\frac{dh_1}{dt} + h_1 = 0$$

- O termo  $\varepsilon \nu_2 \ddot{h}_2$  certamente é de ordem mais alta

- Resta:

$$\frac{dh_2}{dt} + h_2 = \begin{cases} -\frac{d^2h_1}{dt^2} & \text{if } \frac{\nu_1 \varepsilon}{\nu_2} = 1, \\ 0 & \text{if } \frac{\nu_1 \varepsilon}{\nu_2} \rightarrow 0. \end{cases}$$

- Solução:

$$h_1 = A_1 e^{-t}$$

Não tem este termo  
caso  $\nu_1 \varepsilon / \nu_2 \rightarrow 0$

$$h_2 = A_2 e^{-t} - A_1 t e^{-t}.$$

Por enquanto não se discute as condições iniciais (p. 15)

- Vejamos (expansão interna):

$$t_\eta = \frac{t}{\eta(\varepsilon)}, \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

- Qual a razão? Para  $t$  pequeno,  $t_\eta$  pode ser grande.
- Da p. 15:

$$\frac{\varepsilon}{\eta^2} \frac{d^2 y}{dt_\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dy}{dt_\eta} + y = 0.$$

- Seguem 3 casos.

*Case I*

Inner-inner limit  $\eta \ll \varepsilon$  or  $\varepsilon/\eta \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{d^2 y}{dt_\eta^2} = 0.$$

*Case II*

Initial-layer (boundary-layer) limit,  $\eta = \varepsilon$

$$\frac{d^2 y}{dt_\eta^2} + \frac{dy}{dt_\eta} = 0.$$

### *Case III*

Intermediate limit,  $\varepsilon \ll \eta(\varepsilon) \ll 1$ , or  $\varepsilon/\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ ,

$$\frac{dy}{dt_\eta} = 0.$$

O caso III está contido no caso II

O caso I está contido no caso II quando

$$t_\eta \rightarrow 0$$

O caso II é o menos degenerado e chamado “distinguished”

- Vejamos então o caso II (camada limite) com

$$y(t; \varepsilon) = \mu_1(\varepsilon)g_1(t^*) + \mu_2(\varepsilon)g_2(t^*) + \dots$$

$$t^* = t/\varepsilon$$

- Daí vem (fazer)

$$\frac{d^2 g_1}{dt^{*2}} + \frac{dg_1}{dt^*} = 0$$
$$\frac{d^2 g_2}{dt^{*2}} + \frac{dg_2}{dt^*} = \begin{cases} -g_1 & \text{if } \frac{\varepsilon\mu_1}{\mu_2} \rightarrow 1, \\ 0 & \text{if } \frac{\varepsilon\mu_1}{\mu_2} \rightarrow 0. \end{cases}$$

The initial conditions fix  $\mu_1(\varepsilon)$  since

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\mu_1}{\varepsilon} \frac{dg_1}{dt^*} + \frac{\mu_2}{\varepsilon} \frac{dg_2}{dt^*} + \dots = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{as } t^* \rightarrow 0.$$

Isso vem da p. 15. Usando  $y(0)=0$  da p. 15, obtemos:

$$\mu_1 = 1$$

$$g_1(0) = 0, \quad \frac{dg_1(0)}{dt^*} = 1,$$

$$g_2(0) = 0, \quad \frac{dg_2(0)}{dt^*} = 0.$$

- Resolvendo:

$$g_1 = 1 - e^{-t^*}.$$

- Usando a segunda possibilidade na p. 22, teríamos  $g_2 \equiv 0$   
Então

$$\mu_2 = \varepsilon$$

$$\frac{d^2 g_2}{dt^{*2}} + \frac{dg_2}{dt^*} = -(1 - e^{-t^*})$$

- Sempre se quer a primeira correção não nula



- Resolvendo com as condições iniciais e usando

$$\int dt t e^{-t} = -(1+t)e^{-t}$$

obtém-se

$$g_2 = (2 - t^*) - (2 + t^*)e^{-t^*}$$

(expansão interna)

- Rememorando (p. 24 e 25):

$$y(t; \varepsilon) = [1 - e^{-t^*}] + \varepsilon[(2 - t^*) - (2 + t^*)e^{-t^*}] + \dots, t^* = \frac{t}{\varepsilon} \text{ (inner).}$$

- O método “matching asymptotics” conforme mostrado pelo KC parece um tanto complicado daqui em diante...
- É melhor mudar um pouco para o Nayfeh (Perturbation Methods, Wiley, 1973)

- Matching principle:
- O limite interno (do limite externo) iguala o limite externo (do limite interno)
- A expansão interna (da expansão externa) iguala a expansão externa (da expansão interna)

- Revendo:
- Inner:

$$y = 1 - e^{-t^*} + \varepsilon \left( 2 - t^* - (2 + t^*) e^{-t^*} \right), \quad t^* = \frac{t}{\varepsilon}$$

- Outer:

$$y = A_1 e^{-t} + \varepsilon (A_2 e^{-t} - A_1 t e^{-t})$$

$$= A_1 e^{-\varepsilon t^*} + \varepsilon (A_2 e^{-\varepsilon t^*} - A_1 \varepsilon t^* e^{-\varepsilon t^*})$$

De ordem mais alta



• Limite (inner,  $t^* \rightarrow \infty$ ) =

Limite (outer,  $t^* \rightarrow 0$ )

$$1 + \varepsilon(2 - t^*) = A_1(1 - \varepsilon t^*) + \varepsilon A_2$$

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 2$$

- A parte comum (cp = common part):

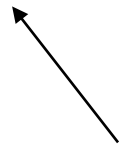
$$cp = 1 + \varepsilon(2 - t^*)$$

Vide página anterior

- O ideal seria somar o inner e o outer, mas sem adicionar a parte comum duas vezes

$$y(in) = a + cp, \quad y(out) = b + cp$$

$$y_c = a + b + cp = y(in) + y(out) - cp$$



solução composta

- No problema:

$$y(in) = 1 - e^{-t^*} + \varepsilon \left( 2 - t^* - (2 + t^*) e^{-t^*} \right), \quad t^* = \frac{t}{\varepsilon}$$

$$y(out) = e^{-t} + \varepsilon(2 - t)e^{-t}$$

$$cp = 1 + \varepsilon(2 - t^*)$$



- Com isto,

$$y_c = y(in) + y(out) - cp$$

$$= e^{-t} - e^{-t^*} + \varepsilon \left( (2 - t)e^{-t} - (2 + t^*)e^{-t^*} \right)$$

$$= e^{-t} - e^{-t/\varepsilon} + \varepsilon \left( (2 - t)e^{-t} - \left(2 + \frac{t}{\varepsilon}\right)e^{-t/\varepsilon} \right)$$

- Isto verifica as condições iniciais e a EDO, em primeira ordem (p. 15):

$$y(0) = 0,$$

$$y'(0) \approx \frac{1}{\varepsilon} - 3\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(1 - 3\varepsilon^2)$$

Omitindo o “c”

- Substituindo na EDO:

$$\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} + y = e^{-t/\varepsilon}(t + 2\varepsilon) - \varepsilon^2(t - 4)e^{-t}$$

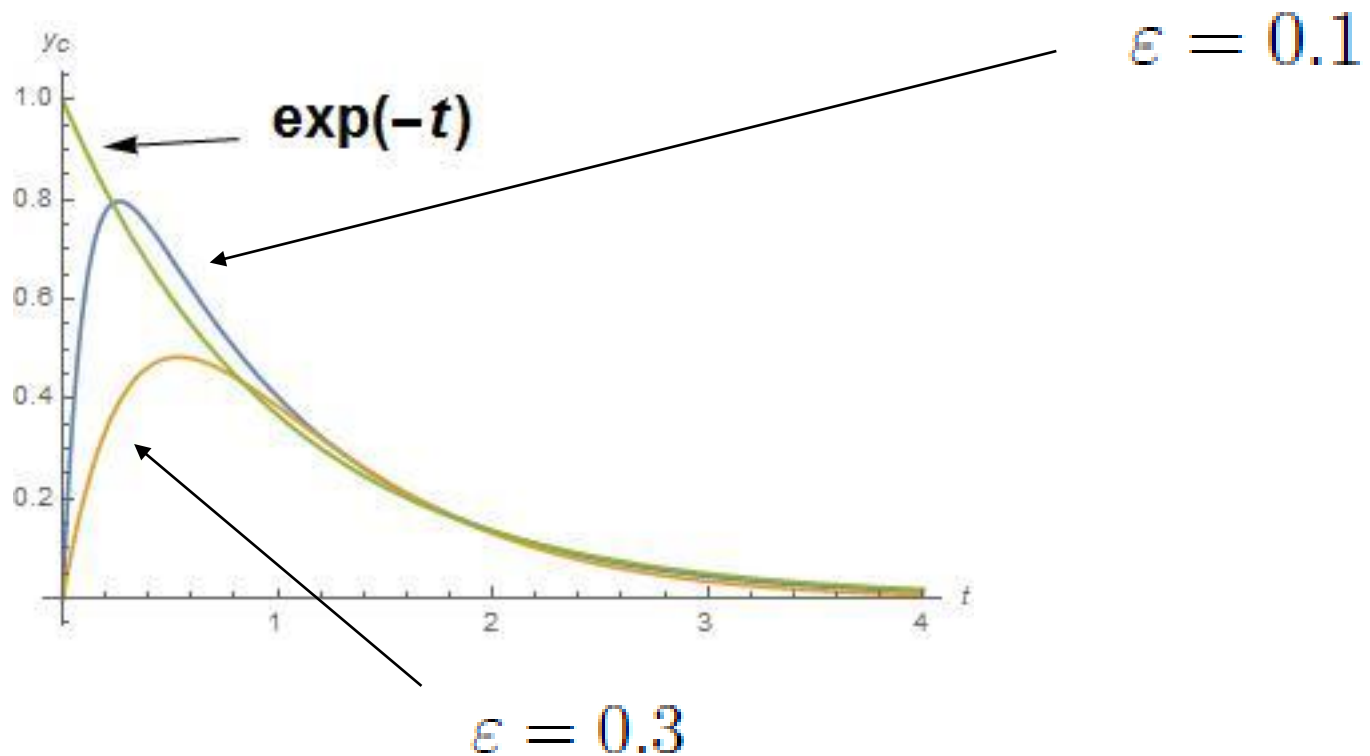
Some para

$$t > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

- Por fim:

$$\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} + y = \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = \frac{1}{\varepsilon}(1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2))$$



Em parte o exemplo da perturbação singular veio  
Do Nayfeh, cap. 4

## Expansões diretas e não-uniformidade (Nayfeh, cap. 2)

- Equação de Duffing:

$$\ddot{u} + u + \epsilon u^3 = 0, \quad u(0) = a, \quad \dot{u}(0) = 0$$

- Constante de movimento:

$$\dot{u}^2 + u^2 + \epsilon \frac{u^4}{2} = \left(1 + \frac{\epsilon a^2}{2}\right) a^2$$

- Para  $\epsilon > 0$ , a integral mostra que  $u$  é limitado para todo o tempo (bounded)
- Expansão do tipo Poincaré:

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon^m u_m(t)$$

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad u_0(0) = a, \quad \dot{u}_0(0) = 0$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -u_0^3, \quad u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0$$

- Obtém-se

$$u_0 = a \cos t$$

Usando

$$\cos 3t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$$

vem

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -a^3 \frac{\cos 3t + 3 \cos t}{4}$$



- Resolvendo com as condições iniciais:

$$u_1 = -\frac{3a^3}{8} t \sin t + \frac{a^3}{32} (\cos 3t - \cos t)$$

Cresce sem limites (termo secular)

$$u = a \cos t + \epsilon a^3 \left[ -\frac{3}{8} t \sin t + \frac{1}{32} (\cos 3t - \cos t) \right] + O(\epsilon^2)$$

A série é lentamente convergente; problema não linear;  
só funciona para  $\epsilon t \ll 1$  (não uniformidade)

Um modelo para instabilidade não linear fraca  
(Nayfeh)

$$u_{tt} - u_{xx} - u = u^3$$

$$u(x, 0) = \epsilon \cos kx, \quad u_t(x, 0) = 0$$

$$u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + \dots$$

A expansão é sugerida pela condição inicial.

**Order  $\epsilon$**

$$u_{1tt} - u_{1xx} - u_1 = 0$$

$$u_1(x, 0) = \cos kx, \quad u_{1t}(x, 0) = 0$$

**Order  $\epsilon^2$**

$$u_{2tt} - u_{2xx} - u_2 = 0$$

$$u_2(x, 0) = u_{2t}(x, 0) = 0$$

**Order  $\epsilon^3$**

$$u_{3tt} - u_{3xx} - u_3 = u_1^3$$

$$u_3(x, 0) = u_{3t}(x, 0) = 0$$

$$u_1 = \cos \sigma_1 t \cos kx, \quad \sigma_1^2 = k^2 - 1$$

Estável para

$$k^2 > 1$$

$k^2 = 1$  é marginalmente estável.

Resolvendo a ordem 2 vem  $u_2 = 0$

$$u_3 = \frac{3}{128\sigma_1^2} [12\sigma_1 t \sin \sigma_1 t + \cos \sigma_1 t - \cos 3\sigma_1 t] \cos kx \\ + \frac{1}{128k^2} [3(\cos \sigma_1 t - \cos \mu t) + k^2(\cos 3\sigma_1 t - \cos \mu t)] \cos 3kx$$

Obtido após inserir a solução até ordem 2.

$$\mu^2 = 9k^2 - 1$$

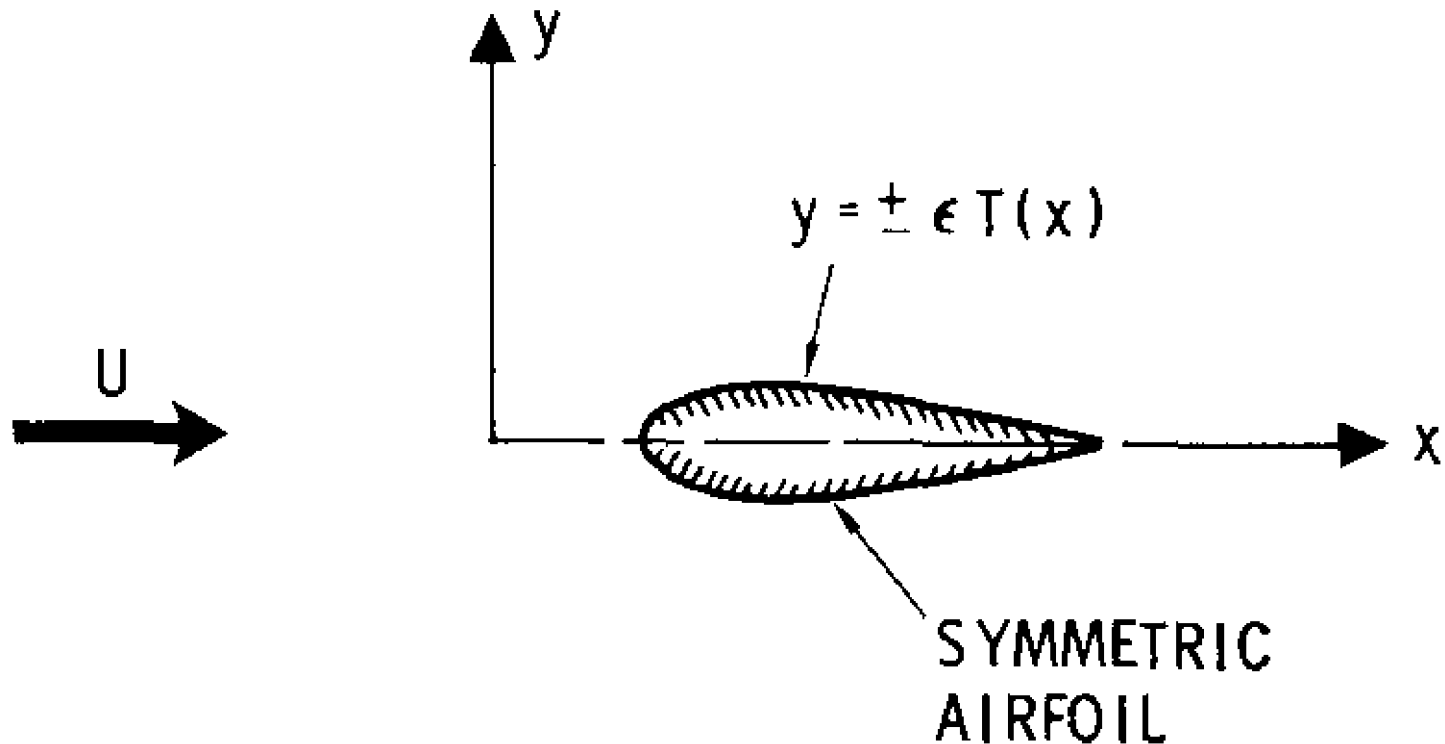
$$u = \epsilon \cos \sigma_1 t \cos kx$$

$$+ \epsilon^3 \left[ \frac{9}{32\sigma_1} t \sin \sigma_1 t \cos kx + \text{terms bounded as } t \rightarrow \infty \right]$$

expansion is invalid when  $t = O(\epsilon^{-2})$

(termo secular)

- Fluxo incompressível e estacionário na presença de um objeto sólido (aerofólio)



- A dedução nas páginas anexas

$$\left( \psi_y \frac{\partial}{\partial x} - \psi_x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{R} \nabla^2 \right) \nabla^2 \psi = 0$$

- Número de Reynolds (suposto alto):

$$R = UL/\nu$$



- Na superfície do objeto:  $y = F(x)$
- Condição de não derrapamento (no slip):

$$\psi[x, F(x)] = 0$$

- Podia ser apenas  $\Psi = \text{cte.}$  (componente tangencial nula)
- Componente normal nula:

$$F' \psi_y[x, F(x)] + \psi_x[x, F(x)] = 0$$

- Além disso (explicar):

$$\psi(x, y) \rightarrow y \quad (\text{upstream})$$

- Vejamos

$$\psi(x, y; R) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(R) \psi_m(x, y) \quad \text{as } R \rightarrow \infty$$

$$\delta_0(R) = 1 \quad \text{and} \quad \delta_m(R) = o[\delta_{m-1}(R)] \quad \text{as } R \rightarrow \infty$$

- Ordem mais baixa (fluido ideal)

$$\left( \psi_{0y} \frac{\partial}{\partial x} - \psi_{0x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla^2 \psi_0 = 0$$

- Uma EDP de ordem 3 e não 4 como antes.
- Qual condição de contorno eliminar? Não se pode satisfazer a todas.

- Remove-se

$$\psi[x, F(x)] = 0$$

que ocorreria num fluido ideal (sem viscosidade)

Fica bem para longe do objeto, quando a condição de no-slip não é tão básica

→ camada limite (de Prandtl)

Um pouco vago (teria que resolver e ver)

- O símbolo “o pequeno” na p. 50 quer dizer que as correções são de ordem mais alta quando  $R$  fica grande
- Oscilações de relaxação (Nayfeh)

$$\epsilon u'' = f(u', u)$$

for small  $\epsilon$  when  $f(u', u) = 0$  has no periodic solutions

Obter soluções periódicas

- Método de Lindstedt para soluções periódicas (KC, cap. 3)
- Oscilador fracamente não linear:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon y^3 = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = v > 0.$$

- Todas as soluções são periódicas. Sendo um sistema autônomo, não faz mal tomar  $y(0) = 0$ , já que este ponto será visitado cedo ou tarde.
- Expansão padrão:

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + O(\varepsilon^2)$$

- Obtém-se

$$\frac{d^2 y_0}{dt^2} + y_0 = 0; \quad y_0(0) = 0, \quad \frac{dy_0(0)}{dt} = v$$

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 = -y_0^3; \quad y_1(0) = \frac{dy_1(0)}{dt} = 0.$$

- Ordem zero:  $y_0(t) = v \sin t$



- Segue que

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + y_1 = -v^3 \sin^3 t = \frac{v^3}{4} \sin 3t - \frac{3v^3}{4} \sin t.$$

- com solução

$$y_1 = -\frac{9}{32} v^3 \sin t - \frac{v^3}{32} \sin 3t + \frac{3v^3}{8} t \cos t.$$

Secular  $t = \mathcal{O}(1/\varepsilon)$



- No entanto, a solução é limitada:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{\varepsilon y^4}{4} = \text{const.} = \frac{v^2}{2}$$

$$-y_m \leq y \leq y_m,$$

$$y_m = \left[ \frac{-1 + (1 + 2\varepsilon v^2)^{1/2}}{\varepsilon} \right]^{1/2} = v \left[ 1 - \frac{\varepsilon v^2}{4} + O(\varepsilon^2) \right]$$

(provar)

- Quadratura:

$$t = \pm \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{v^2 - s^2 - \varepsilon s^4/2}}$$

- $dy/dt > 0$ , sinal positivo
- $dy/dt < 0$ , sinal negativo

$$s = -y_m \cos \psi.$$

$$(1 + 2\varepsilon v^2)^{1/4} t = \pm \int_{\pi/2}^{\cos^{-1}(-y/y_m)} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},$$

$$k^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2\varepsilon v^2}}{2\sqrt{1 + 2\varepsilon v^2}} = \frac{\varepsilon v^2}{2} + O(\varepsilon^2).$$

Integral: função elíptica do primeiro tipo

- $\frac{1}{4}$  do período: quando  $y = y_m$

$$P(\varepsilon) = \frac{4K(k^2)}{(1 + 2\varepsilon v^2)^{1/4}}$$

$K(k^2)$  is the complete elliptic integral of the first kind

$$K(k^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

$$P = 2\pi \left[ 1 - \frac{3}{8}\varepsilon v^2 + O(\varepsilon^2) \right] \quad (\text{expansão})$$

Período depende da amplitude

- Solução exata (cn = função elíptica de Jacobi)

$$y = y_m \operatorname{cn}[(1 + 2\varepsilon v^2)^{1/4} t + K(k^2), k]$$

que é uma função periódica no tempo. Ou também:

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\varepsilon) \sin \frac{2n\pi t}{P(\varepsilon)},$$

$$b_n(\varepsilon) = \frac{4}{P} \int_0^{P/2} y(t, \varepsilon) \sin \frac{2n\pi t}{P} dt$$

- Na última, entrariam as funções elípticas de Jacobi para  $y$ .
- Ou seja, é uma expansão de Fourier da função elíptica, com  $y(0) = 0$ .
- Problema: demonstrar que  $y'(0) = v$ . Verifique isto.
- Em todo caso: depende de

$$t^+ = 2\pi t/P$$

- e  $t^+ = (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)t,$

- Por exemplo

$$\omega_1 = (3/8)v^2$$

- Expandindo para  $t$  fixo:

$$\sin \frac{2n\pi t}{P} = \sin n(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)t$$

$$\sin \frac{2n\pi t}{P} = \sin nt + n\varepsilon\omega_1 t \cos nt + O(\varepsilon^2)$$

↑ secular

- Precisaria de uma expansão mantendo  $t^+$  fixo quando  $\varepsilon \rightarrow 0$



- Então

$$y(t, \varepsilon) = f_0(t^+) + \varepsilon f_1(t^+) + \varepsilon^2 f_2(t^+) + \dots$$

onde se requer  $f_i$  periódicas.

$$t^+ = (1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)t.$$

Os  $w_i$  a determinar

Método das coordenadas “strained”

$$(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots)^2 \frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon y^3 = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$(1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots) \frac{dy(0)}{dt} = v.$$

$$L(f_0) \equiv \frac{d^2 f_0}{dt^{+2}} + f_0 = 0; \quad f_0(0) = 0, \quad \frac{df_0(0)}{dt^+} = v$$

$$L(f_1) = -2\omega_1 \frac{d^2 f_0}{dt^{+2}} - f_0^3; \quad f_1(0) = 0, \quad \frac{df_1(0)}{dt^+} = -\omega_1 v$$

$$L(f_2) = -(\omega_1^2 + 2\omega_2)f_0 - 2\omega_1 \frac{d^2 f_1}{dt^{+2}} - 3f_0^2 f_1;$$

$$f_2(0) = 0; \quad \frac{df_2(0)}{dt^+} = (\omega_1^2 - \omega_2)v$$

$$f_0(t^+) = v \sin t^+$$

$$L(f_1) = (2\omega_1 v - \frac{3}{4}v^3)\sin t^+ + \frac{v^3}{4} \sin 3t^+$$

Para remover o termo ressonante:

$$2\omega_1 v - \frac{3}{4}v^3 = 0$$

$$\omega_1 = \frac{3}{8}v^2$$

- Resolvendo:

$$f_1(t^+) = -\frac{9}{32}v^3 \sin t^+ - \frac{v^3}{32} \sin 3t^+$$

A próxima ordem fixaria  $w_2$

we can deduce for this example that  $f_n(t)$  will only involve the  $(n + 1)$ -functions  $\sin t^+, \sin 3t^+, \dots, \sin(2n + 1)t^+$ .

Provar esta afirmação.

Obter  $b_1$  e  $b_3$  (p. 65) e comparar com  $f_0$  e  $f_1$

## Equação de Rayleigh. Ciclo limite.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon \left[ -\frac{dy}{dt} + \frac{1}{3} \left( \frac{dy}{dt} \right)^3 \right] = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

$$w = \dot{y}$$

→ eq. van der Pol para  $w$  (fazer)

## Argumento para ciclo limite:

Although one can rigorously prove the existence of a limit cycle, we will use a heuristic argument on which to base our suspicion for the occurrence of such a solution. Consider (3.1.30) in the phase-plane of  $y$  and  $dy/dt$ . If  $\varepsilon = 0$  the integral curves are circles. For any positive  $\varepsilon$ , the oscillator is additionally subjected to the “force”  $\varepsilon[dy/dt - \frac{1}{3}(dy/dt)^3]$ . Now if  $dy/dt$  is small, i.e., if the motion starts near the origin of the phase-plane, the term  $dy/dt$  is more important than  $-\frac{1}{3}(dy/dt)^3$ . Hence the net effect of the bracketed term in (3.1.30) is a negative damping, leading to an increase in amplitude. But this cannot go on indefinitely, since eventually the term  $-\frac{1}{3}(dy/dt)^3$  would dominate and would produce a decay in the amplitude. Similarly, if the motion were initiated with a large value of  $v$ , the tendency is for the amplitude to decrease until a balance is struck between the two opposing forces in the bracketed term. Therefore, we have a strong suspicion that for certain very special initial conditions there exists a closed trajectory in the phase plane, i.e., a periodic solution.

$$y(0) = a(\varepsilon) = a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = 0,$$

Não há perda de generalidade na condição inicial (por quê?)

$$y(t, \varepsilon) = f_0(t^+) + \varepsilon f_1(t^+) + \varepsilon^2 f_2(t^+) + \dots$$

$$t^+ = (1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots)t.$$



$$L(f_0) \equiv \frac{d^2 f_0}{dt^{+2}} + f_0 = 0, \quad f_0(0) = a_0, \quad \frac{df_0(0)}{dt^+} = 0;$$

$$L(f_1) = -2\omega_1 \frac{d^2 f_0}{dt^{+2}} + \frac{df_0}{dt^+} - \frac{1}{3} \left( \frac{df_0}{dt^+} \right)^3, \quad f_1(0) = a_1, \quad \frac{df_1(0)}{dt^+} = 0$$

$$L(f_2) = -2\omega_1 \frac{d^2 f_1}{dt^{+2}} - (2\omega_2 + \omega_1^2) \frac{d^2 f_0}{dt^{+2}} + \frac{df_1}{dt^+} + \omega_1 \frac{df_0}{dt^+} \\ - \left( \frac{df_0}{dt^+} \right)^2 \left[ \frac{df_1}{dt^+} + \omega_1 \frac{df_0}{dt^+} \right], \quad f_2(0) = a_2, \quad \frac{df_2(0)}{dt^+} = 0.$$

$$f_0(t^+) = a_0 \cos t^+$$

$$L(f_1) = 2\omega_1 a_0 \cos t^+ + \left( \frac{a_0^3}{4} - a_0 \right) \sin t^+ - \frac{a_0^3}{12} \sin 3t^+$$

Para ser periódico:

$$\begin{array}{ccc} 2\omega_1 a_0 = 0 & \longrightarrow & \omega_1 = 0 \\ \frac{a_0^3}{4} - a_0 = 0. & & a_0 = 2. \end{array}$$

- Resolvendo:

$$f_1(t^+) = -\frac{1}{4} \sin t^+ + a_1 \cos t^+ + \frac{1}{12} \sin 3t^+.$$

Na ordem seguinte:

$$L(f_2) = (4\omega_2 + \frac{1}{4})\cos t^+ + 2a_1 \sin t^+ \\ - \frac{1}{2} \cos 3t^+ - a_1 \sin 3t^+ + \frac{1}{4} \cos 5t^+$$

Para ser periódico:  $a_1 = 0$

$$\omega_2 = -\frac{1}{16}$$

In this example, the method of strained coordinates defined both the appropriate initial conditions for a periodic solution as well as the corresponding period.

Calculate the limit cycle to  $O(\varepsilon)$  for

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon \left[ -\frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} \left| \frac{dy}{dt} \right| \right] = 0.$$

Exercício. Por quê há um ciclo limite?

## Escalas de tempo múltiplas (KC, cap. 3)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = 1,$$

$$\varepsilon = \frac{T_1}{T_2} = \frac{B}{2\sqrt{KM}}.$$

$$T_2 = \frac{2M}{B} \quad (\text{tempo de amortecimento, p. 4})$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{M}{K}}, \quad (\text{tempo de oscilações, p. 4})$$

$$T_2 \gg T_1$$

Solução exata

$$y = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \sin \sqrt{1 - \varepsilon^2} t$$

Variáveis dimensionais:

$$\frac{Y}{A} = \frac{e^{-T/T_2}}{\sqrt{1 - (T_1/T_2)^2}} \sin \sqrt{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2} \left(\frac{T}{T_1}\right)$$

- Expandindo para  $t$  fixo:

$$y(t, \varepsilon) = \sin t - \varepsilon t \sin t + O(\varepsilon^2 t^2).$$

It is also evident that mutually contradictory requirements will arise if we wish to represent both  $e^{-\varepsilon t}$  and  $\sin \sqrt{1 - \varepsilon^2} t$  uniformly for long times. In fact, the only uniformly valid representation of  $e^{-\varepsilon t}$  for long times is  $e^{-\varepsilon t}$  itself; therefore we need the limit process  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\tilde{t} = \varepsilon t$  fixed. However, this limit process *does not exist* for  $\sin \sqrt{1 - \varepsilon^2} t = \sin(\sqrt{1 - \varepsilon^2}/\varepsilon)\tilde{t}$  as the argument of the sine tends to infinity. Another way of saying this is that the function defined by (3.2.4) does not have an outer expansion.

Aqui, (3.2.4) é  $y$  na p. anterior

- Duas escalas de tempo:

$$t^+ = \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n\right)t = \text{“fast time”}$$

$$\tilde{t} = \varepsilon t = \text{“slow time,”}$$

Começa com  $\varepsilon^2$   
 por causa  
 da forma da  
 solução exata  
 (conhecida  
 neste caso)

Problema fracamente não linear:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y + \varepsilon f\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = 0$$

Proposta:

$$y(t, \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t^+, \tilde{t}) \varepsilon^n.$$



The basic assumption is that each term  $F_n$  in the general asymptotic expansion depends on  $t$  and  $\varepsilon$  in such a way that the result can be unambiguously expressed as a function of  $t^+$  and  $\tilde{t}$ .

Parece razoável. Por quê?

Oscilador fracamente amortecido:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = 1.$$

$$y = F_0(t^+, \tilde{t}) + \varepsilon F_1(t^+, \tilde{t}) + \varepsilon^2 F_2(t^+, \tilde{t}) + \dots$$

$$t^+ = (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3 + \dots)t$$

$$\tilde{t} = \varepsilon t.$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial F_0}{\partial t^+} (1 + \varepsilon^2 \omega_2) + \varepsilon \frac{\partial F_0}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon \frac{\partial F_1}{\partial t^+} + \varepsilon^2 \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon^2 \frac{\partial F_2}{\partial t^+} + O(\varepsilon^3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\partial^2 F_0}{\partial t^{+2}} (1 + 2\varepsilon^2 \omega_2) + 2\varepsilon \frac{\partial^2 F_0}{\partial t^+ \partial \tilde{t}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial \tilde{t}^2} \\ &+ \varepsilon \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^{+2}} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^+ \partial \tilde{t}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial t^{+2}} + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Com isso:

$$L(F_0) \equiv \frac{\partial^2 F_0}{\partial t^{+2}} + F_0 = 0$$

$$L(F_1) = -2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial t^+ \partial \tilde{t}} - 2 \frac{\partial F_0}{\partial t^+}$$

$$L(F_2) = -2\omega_2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial t^{+2}} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial \tilde{t}^2} - 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^+ \partial \tilde{t}} - 2 \frac{\partial F_0}{\partial \tilde{t}} - 2 \frac{\partial F_1}{\partial t^+}.$$

- Ordem mais baixa:

$$F_0(t^+, \tilde{t}) = A_0(\tilde{t})\cos t^+ + B_0(\tilde{t})\sin t^+.$$

$$y(0) = 0, \quad dy(0)/dt = 1$$

Se converte em (verificar):

$$F_0(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F_0}{\partial t^+}(0, 0) = 1$$

$$F_1(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial t^+}(0, 0) = -\frac{\partial F_0}{\partial \tilde{t}}(0, 0)$$

$$F_2(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial t^+}(0, 0) = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{t}}(0, 0) - \omega_2 \frac{\partial F_0}{\partial t^+}(0, 0).$$

- Com isto:

$$A_0(0) = 0, \quad B_0(0) = 1.$$

Na ordem seguinte:

$$L(F_1) = 2 \left[ \frac{dA_0}{d\tilde{t}} + A_0 \right] \sin t^+ - 2 \left[ \frac{dB_0}{d\tilde{t}} + B_0 \right] \cos t^+.$$

Para eliminar termos ressonantes:  $\frac{dA_0}{d\tilde{t}} + A_0 = 0$

$$L(F_1) = 0 \quad \frac{dB_0}{d\tilde{t}} + B_0 = 0.$$

- Com isso,

$$A_0(\tilde{t}) = 0, \quad B_0(\tilde{t}) = e^{-\tilde{t}}.$$

$$F_0 = e^{-\tilde{t}} \sin t^+$$

The uniformly valid expansion thus far is

$$y(t, \varepsilon) = e^{-\tilde{t}} \sin t^+ + \varepsilon \{A_1(\tilde{t}) \cos t^+ + B_1(\tilde{t}) \sin t^+\} + O(\varepsilon^2).$$

Corresponde à solução exata da equação na p. 81 (verifique).

$$F_0(t^+, \tilde{t}) = e^{-\tilde{t}} \sin t^+, \quad F_1(t^+, \tilde{t}) = A_1(\tilde{t}) \cos t^+ + B_1(\tilde{t}) \sin t^+,$$

and

$$L(F_2) = \left[ 2 \left( \frac{dA_1}{d\tilde{t}} + A_1 \right) + (2\omega_2 + 1)e^{-\tilde{t}} \right] \sin t^+ - 2 \left[ \frac{dB_1}{d\tilde{t}} + B_1 \right] \cos t^+.$$

Devido a (por quê?)  $\bar{A}_1(0) = B_1(0) = 0$

$$A_1(\tilde{t}) = -(\omega_2 + \frac{1}{2})\tilde{t}e^{-\tilde{t}}$$

$$B_1(\tilde{t}) = 0.$$

(para remover os termos ressonantes)

- Para ficar limitado:

$$\omega_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$y(t, \varepsilon) = e^{-\tilde{t}} \sin \left[ 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^3) \right] t + O(\varepsilon^2)$$

$$\tilde{t} = \varepsilon t.$$



- Eq. Rayleigh (KC, cap. 3)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon \left[ -\frac{dy}{dt} + \frac{1}{3} \left( \frac{dy}{dt} \right)^3 \right] = 0.$$

$$y(0) = a$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = 0.$$

- Daí vem (verificar):

$$L(F_0) = 0$$

$$L(F_1) = -2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial t^+ \partial \tilde{t}} + \frac{\partial F_0}{\partial t^+} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial F_0}{\partial t^+} \right)^3$$

$$L(F_2) = -2\omega_2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial t^{+2}} - 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial t^+ \partial \tilde{t}} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial \tilde{t}^2} + \frac{\partial F_1}{\partial t^+} - \left( \frac{\partial F_0}{\partial t^+} \right)^2 \left[ \frac{\partial F_1}{\partial t^+} + \frac{\partial F_0}{\partial \tilde{t}} \right].$$

$$F_0(t^+, \tilde{t}) = A_0(\tilde{t}) \cos t^+ + B_0(\tilde{t}) \sin t^+$$

- Segue (verificar):

$$\begin{aligned}
 L(F_1) = & \left[ 2 \frac{dA_0}{d\tilde{t}} - A_0 + \frac{A_0}{4} (A_0^2 + B_0^2) \right] \sin t^+ \\
 & - \left[ 2 \frac{dB_0}{d\tilde{t}} - B_0 + \frac{B_0}{4} (A_0^2 + B_0^2) \right] \cos t^+ \\
 & - \frac{A_0}{12} (A_0^2 - 3B_0^2) \sin 3t^+ - \frac{B_0}{12} (B_0^2 - 3A_0^2) \cos 3t^+.
 \end{aligned}$$

Para anular fontes de secularidade:

$$A_0(\tilde{t}) = \frac{2\lambda}{\sqrt{1 - ke^{-\tilde{t}}}}$$

Provar?

$$B_0(\tilde{t}) = \frac{2\sqrt{1 - \lambda^2}}{\sqrt{1 - ke^{-\tilde{t}}}},$$

- Para as condições iniciais:

$$\lambda = 1, k = (a^2 - 4)/a^2,$$

$$y(t, \varepsilon) = \frac{2a}{\sqrt{a^2 - (a^2 - 4)e^{-t}}} \cos[1 + O(\varepsilon^2)]t + O(\varepsilon).$$

Se começar no ciclo limite:  $a = 2$

Dá para verificar estas contas?

# Ondas não lineares e sólitons (e talvez caos)

- Infeld and Rowlands: Nonlinear waves, solitons and chaos
- Cap. 1 – Introdução
- Ondas não lineares e instabilidades
- Equações de onda “universais”
- Uma delas é a equação da onda,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \Phi = 0.$$

# Equações KdV e KP

- Vejamos uma onda longitudinal de pequena amplitude:

$$u = a \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t),$$

- $\omega = \omega(\mathbf{k})$
- Ondas acústicas (sound waves):  $\omega^2 = c^2 k^2 + \dots,$
- $c =$  velocidade do som no meio
- Velocidade de grupo:  $\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \simeq \omega k^{-2} \mathbf{k} = c k^{-1} \mathbf{k}.$

- Uma correção isotrópica ( $\omega^2 = \omega^2(k^2)$ ):

$$\omega^2 = c^2 k^2 - \beta^2 k^4.$$

- 1D e onda se propagando para a direita (fazer):

$$\omega = ck - (\beta^2/2c)k^3 + \dots$$

- Em um referencial que se move a velocidade  $c$ , e normalizando variáveis:

$$\omega^* = -k^3,$$

- A EDP correspondente é

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

- Fourier-transform reproduz a relação de dispersão (fazer)
- A EDP tem 2 problemas: não é invariante de Galileu (foi escolhido um referencial privilegiado); suas soluções sempre se dispersam no espaço à medida que o tempo evolui. Você seria capaz de demonstrar isto? Considere, por exemplo,  $u(x,0) = \text{gaussiana}$ .



- Trocamos  $D/Dt$  pela derivada convectiva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Dispersão

Aqui deveria ser x

Não linearidade

- Equação KdV (Korteweg – de Vries)
- Sem a dispersão (verificar):  $u(x, t) = u(x - ut, 0)$ .

- Sóliton:

$$u = 3\eta \operatorname{sech}^2 \frac{1}{2}\eta^{\frac{1}{2}}(x - \eta t).$$

- Amplitude proporcional à velocidade
- (Verifique a solução)
- Existe bem mais a dizer (IST, Inverse Scattering Transform, N-soliton solutions)
- Derivações físicas: plasmas, fluidos

- Dispersão X não linearidade
- Dispersão:

$$u_t + u_{xxx} = 0$$

Condição inicial:

$$u(x, 0) = u_0 e^{-x^2/a^2}$$

Onda plana:

$$\exp[i(kx - \omega t)] \Rightarrow \omega = -k^3$$

- Expande:

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{u}(k) \exp[i(kx + k^3t)]$$

De agora em diante, todas as integrais de menos a mais infinito.

$$u(x, 0) = \int dk \hat{u}(k) e^{ikx}$$

Invertendo:

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{2\pi} \int dx u(x, 0) e^{-ikx}$$

No problema:

$$\hat{u}(k) = \frac{u_0 a}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{k^2 a^2}{4}\right)$$

- Com isto:

$$u(x, t) = \frac{u_0 a}{2\sqrt{\pi}} \int dk \exp\left(-\frac{k^2 a^2}{4}\right) \cos(kx + k^3 t)$$

É óbvio que isto satisfaz a EDP e a condição inicial, não?

Pelo que vi, não é possível escrever  $u(x, t)$  analiticamente. Porém, a integral pode ser feita numericamente.

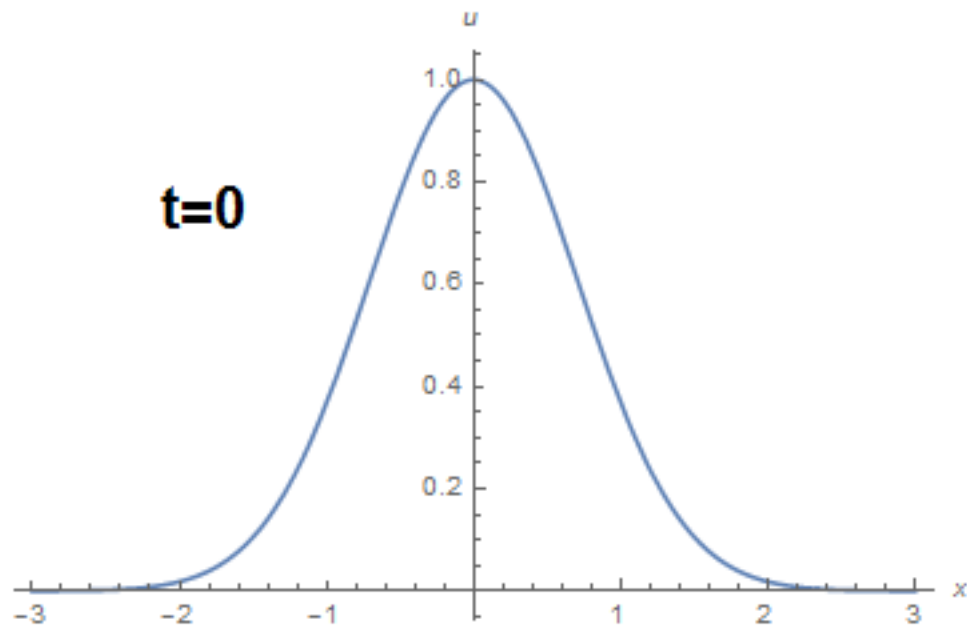
Normalizando:

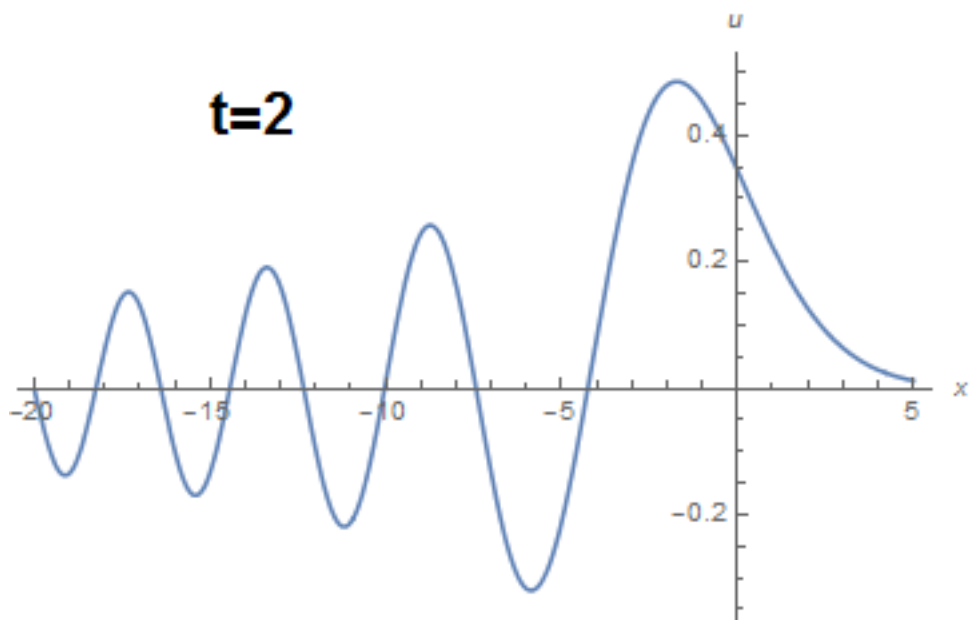
$$x \rightarrow x/a, \quad t \rightarrow t/a^3, \quad k \rightarrow ka, \quad u \rightarrow u/u_0$$

Ficamos com:

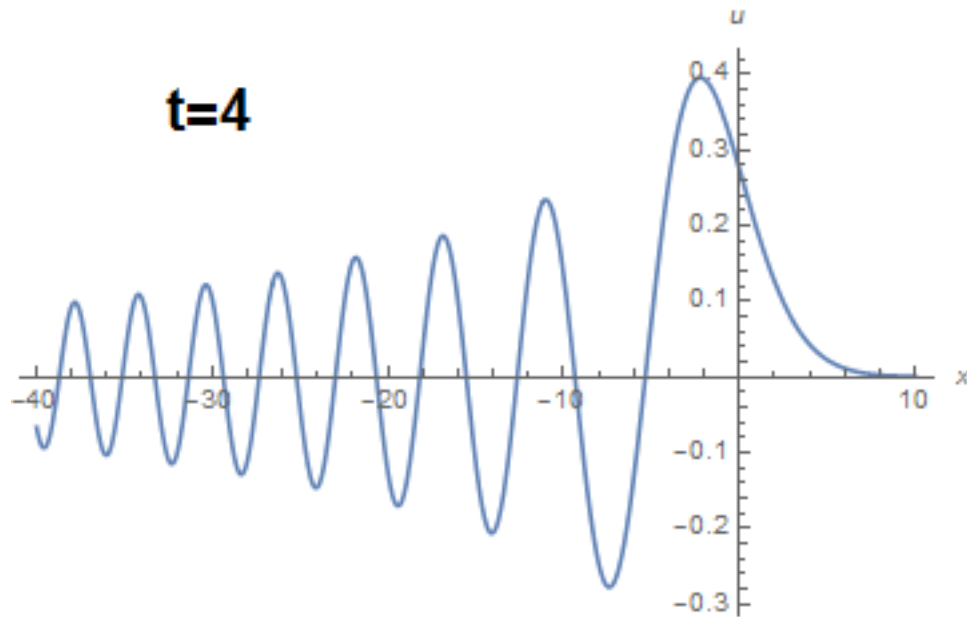
$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int dk \exp\left(-\frac{k^2}{4}\right) \cos(kx + k^3t)$$

A seguir, o gráfico para diferentes tempos.









O pacote de ondas se dispersa para a esquerda (velocidade de grupo negativa).

- Não linearidade

$$u_t + uu_x = 0$$

A solução é (método das características):

$$u(x, t) = u_0(x - u(x, t)t), \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

Veja-se a condição inicial:

- Região 1:

$$u(x, 0) = \frac{u_0}{a}(x + a), \quad -a \leq x \leq 0$$

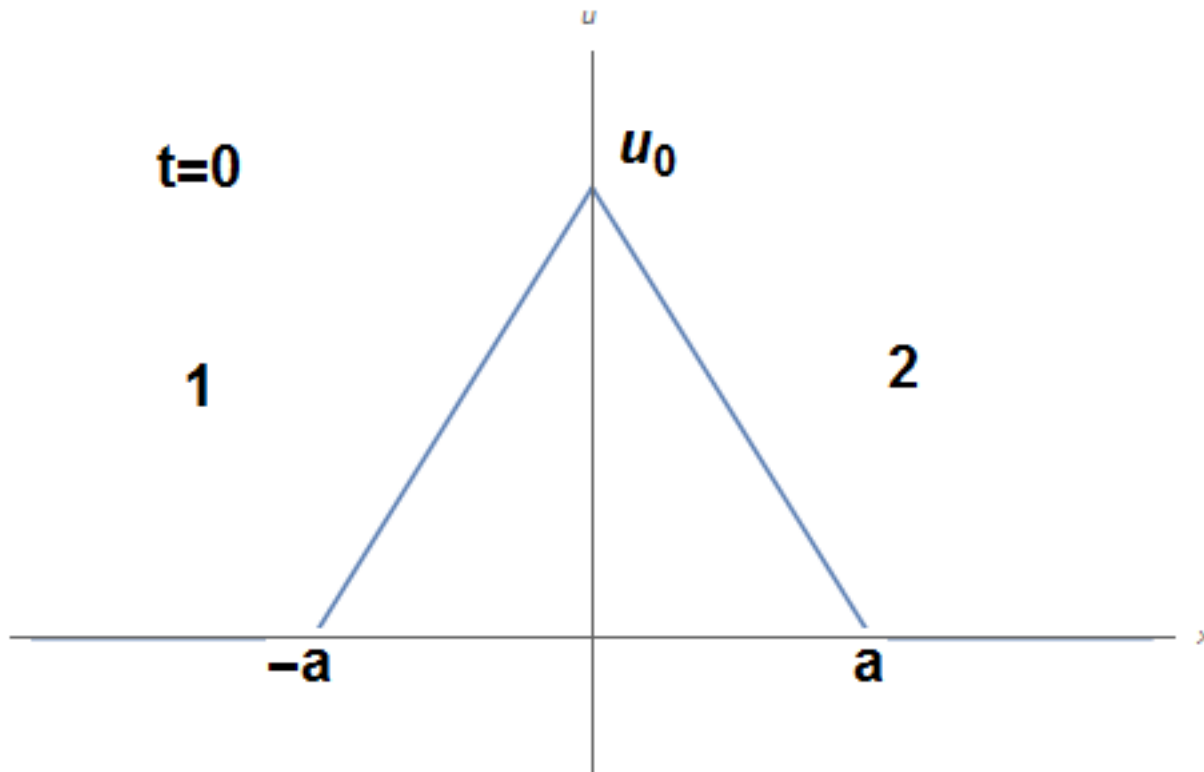
(zero fora do intervalo)

- Região 2:

$$u(x, 0) = -\frac{u_0}{a}(x - a), \quad 0 \leq x \leq a$$

(zero fora do intervalo)

Condição inicial localizada:



Usando a solução exata (p. 106) e a condição inicial, obtém-se (verifique isto em aula):

- Região 1:

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + a)}{a + u_0 t}$$

Com a condição:

$$-u_0 t \geq x \geq -a \quad (\text{zero fora do intervalo})$$

Que implica:

$$a \geq u_0 t$$

- Região 2:

$$u(x, t) = \frac{-u_0(x - a)}{a - u_0 t}$$

Com a condição:

$$a \geq x \geq u_0 t \quad (\text{zero fora do intervalo})$$

Observamos que o tempo fica limitado para evitar a singularidade (quebramento de onda, como chamado em plasmas):

$$t < a/u_0$$

(um pouco mais forte que a restrição na região 1)

Verifica-se um buraco no intervalo

$$|x| \leq u_0 t$$

que não é representado nem pela solução 1 nem pela solução 2.

No entanto, a solução 1 não apresenta qualquer singularidade fora do seu intervalo de validade.

Basta estender até que  $u_1 = u_2$  (numa notação evidente), o que ocorre em  $x = u_0 t$ , onde

$$u_1 = u_2 = u_0$$

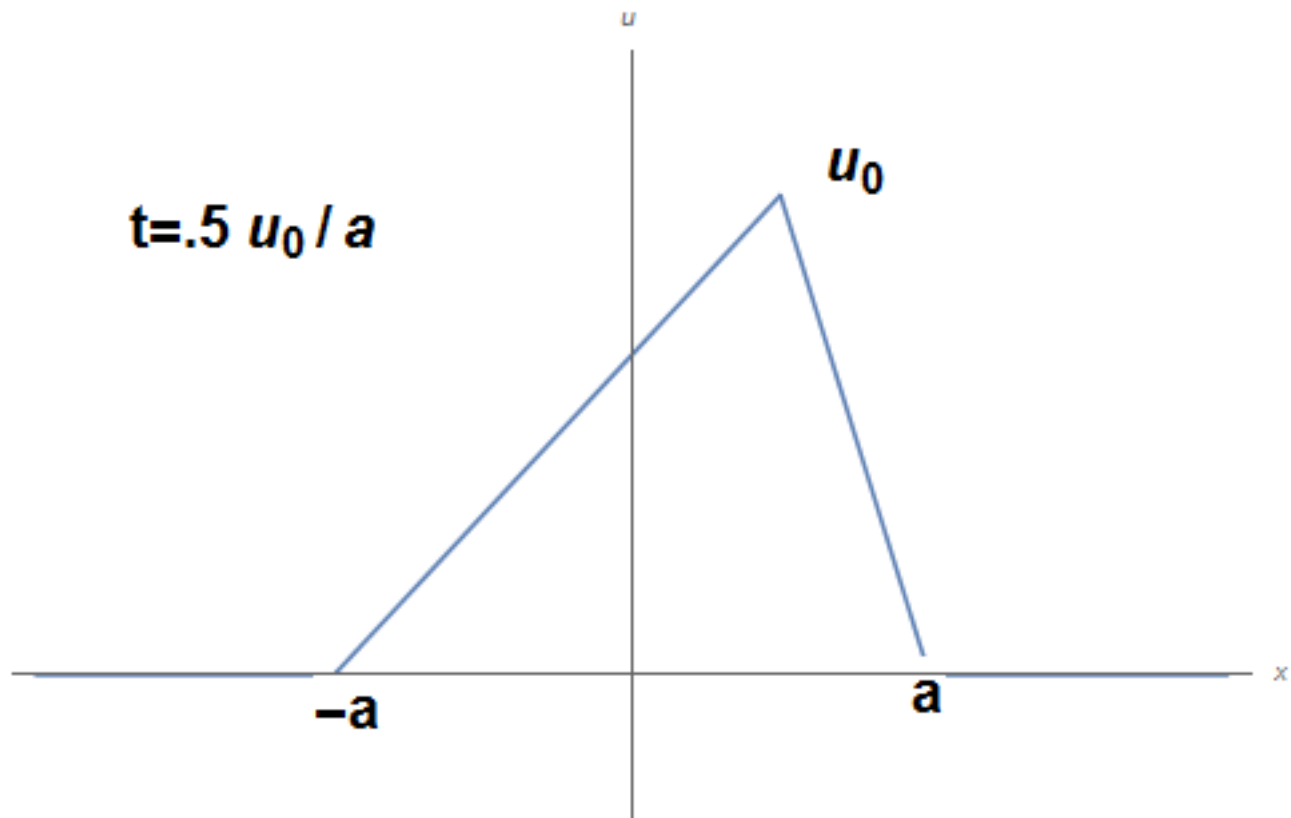
Esta interpolação preserva área,  
uma propriedade da EDP:

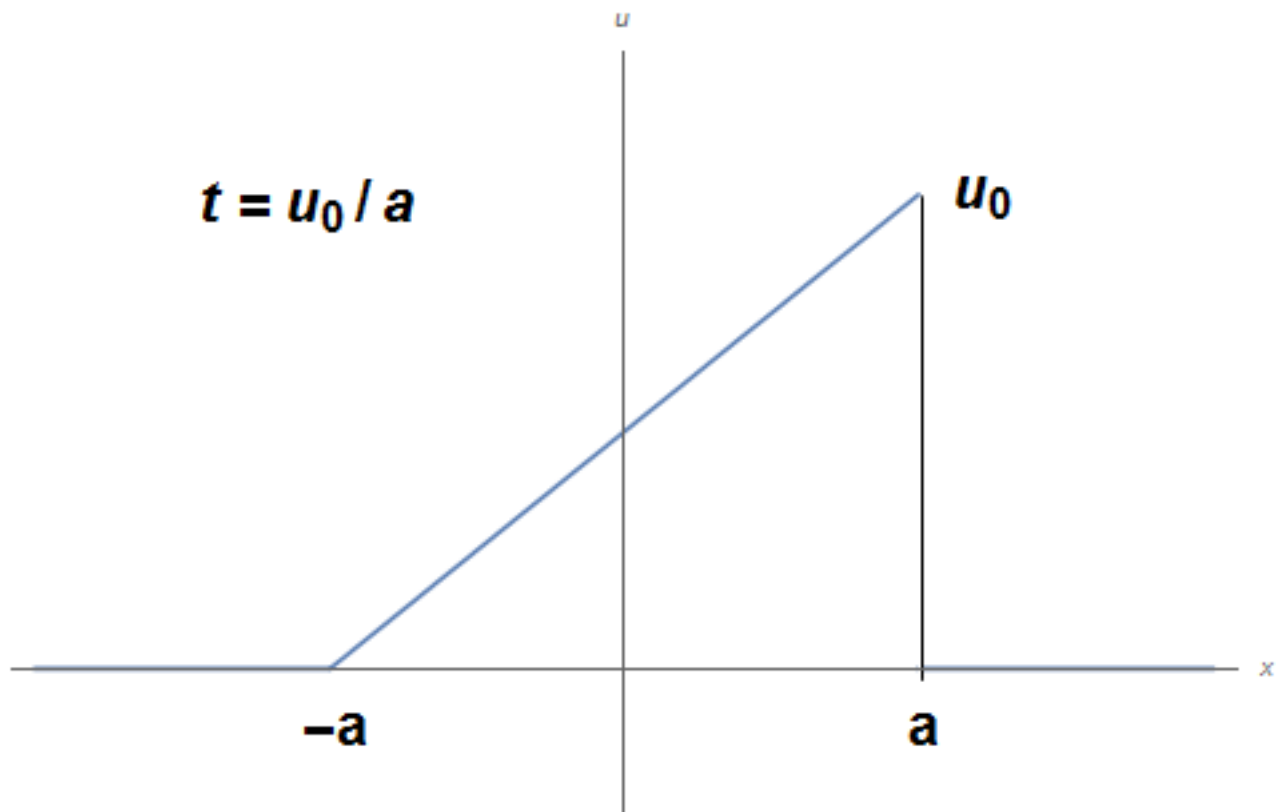
$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = 0$$

Com isto:

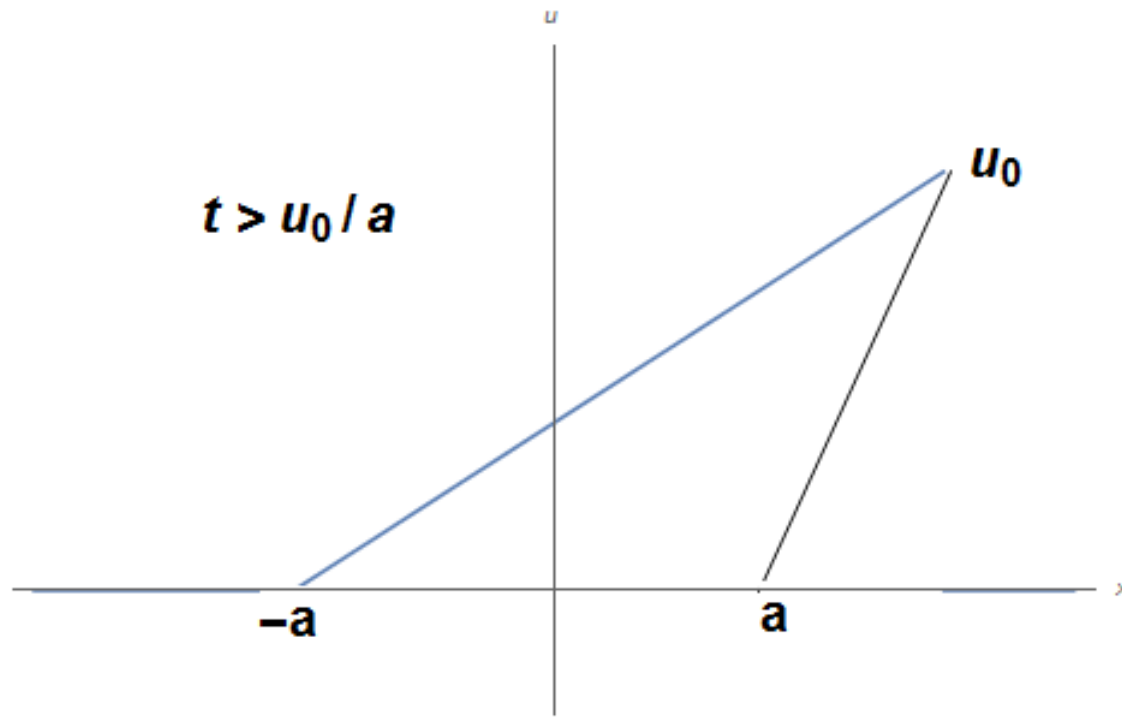
$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx = u_0 a$$







- Resolve a EDP e a condição inicial, preservando a área.
- Em  $t = u_0/a$ , a derivada em  $x=a$  fica infinita.
- Após este instante, a solução ficaria multivaluada (quebramento de onda).



- A solução na região 2 pode ser obtida da solução na região 1 e vice-versa pela simetria: se  $u = f(x,t)$  é solução, então  $u = f(-x,-t)$  também é solução (verifique).
- Nem sempre esta simetria ajuda:  $u = x/t$  é mapeada nela mesma.
- Em resumo, na equação KdV temos a disputa entre o chifre cada vez mais ereto devido ao termo não linear, se propagando para a direita, contra a dispersão, que se propaga para a esquerda. Combinando na equação KdV, temos sólitons, que são mansos (sem singularidades) e sem dispersão.

- Generaliza para 2D:

$$\omega^2 = k_x^2 + k_y^2 - 2(k_x^2 + k_y^2)^2, \quad k_x^2 \gg k_y^2$$

- Fatores numéricos por conveniência
- Aí vem (fazer):

$$\omega = k_x - k_x^3 + \frac{1}{2}k_y^2k_x^{-1} + \dots$$

Único termo novo



- Multiplica por  $k_x$  e usando  $u = \partial\phi/\partial x$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

- Seria a KdV caso  $D/Dy = 0$
- Isso é a equação KP ( **K**adomtsev-**P**etviashvili )
- Também admite sólitons

## Equação de Schrödinger não linear (NLS)

$$\Phi(x,t) = Ae^{i(kx - \omega t)},$$

where the amplitude  $A$  is a constant.

Relação de dispersão:

$$D(\omega, k, \mu) = 0.$$

$\mu$  = parâmetro de controle (por ex. a densidade).

Um ramo:  $\omega = \omega(k, \mu)$

- Para uma fraca não linearidade, esperamos que a amplitude afete a relação de dispersão parametricamente,

$$\omega = \omega(k, \mu, |\Phi|^2).$$

- Sendo  $\omega = \omega_0$  um modo de referência para  $k = k_0$ :

$$\Phi(x, t) = a(x, t)e^{i(k_0x - \omega_0t)},$$

- O fator de amplitude representa as modulações do modo de referência



- Comparando (fazer, com  $A = a_0$ ):

$$a = a_0 e^{i[(k - k_0)x - (\omega(k, \mu, |a|^2) - \omega_0)t]}$$

- Expandindo para não linearidade fraca:

$$\begin{aligned} \omega(k, \mu, |a|^2) = & \omega(k_0, \mu_0, 0) + \omega_k(k - k_0) \\ & + \frac{1}{2}\omega_{kk}(k - k_0)^2 + \omega_\mu(\mu - \mu_0) + \omega_{|a|^2}|a|^2 + \dots, \end{aligned}$$

- Escolhendo:  $\omega_0 = \omega(k_0, \mu_0, 0)$

- Obtém-se (verificar separadamente, faz a FT):

$$i \left( \frac{\partial a}{\partial t} + v_g \frac{\partial a}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \omega_{kk} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - [(\mu - \mu_0) \omega_\mu + \omega_{|a|^2} |a|^2] a = 0.$$


 Velocidade de grupo =  $w_k$

- Na vizinhança de  $k = k_0$  sempre

- É a chamada equação de Schrödinger não linear (NLS)
- Também admite sólitons, propriedades de estabilidade etc.
- O envelope de uma onda não linear pode se aparentar a um pulso propagante
- Vimos as equações KdV, KP e NLS e como são modelos plausíveis
- Na seqüência: cap. 5 do Infeld and Rowlands

## Modelos para ondas e sólitons de pequena amplitude: teoria fracamente não linear (Infeld, cap. 5)

- Ondas de superfície

Campo de velocidade de um fluido irrotacional:

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0$$

Fluido incompressível:  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla^2 \phi = 0.$

(mostrar)

We choose the  $z$  coordinate to be the height measured from the bottom, assumed to be flat. The normal fluid velocity should vanish for  $z=0$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \text{ on } z=0.$$

The equation of the surface is  $z = h + \eta(x, y, t)$  (here  $h$  is the average height)

A velocidade do fluido coincide com a velocidade na superfície. Assim,

$$\eta_t + \phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y = \phi_z \text{ on } z = h + \eta.$$

Ou seja,

$$\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta = v_z \quad (\text{em } z = h + \eta)$$

Finally, pressure balance on the fluid surface gives, ( $T/\rho$  is the surface tension):

$$\phi_t + \frac{1}{2}[\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2] + g\eta - (T/\rho)(\eta_{xx} + \eta_{yy})(1 + \eta_x^2 + \eta_y^2)^{-3/2} = 0$$

on  $z = h + \eta$

De onde vem?

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{g} + (TS)$$

Aqui, TS representa o termo de tensão superficial, que não sei bem o que seja (não importa tanto).

$$\nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\nabla \phi)^2}{2} + gz \right) = (TS)$$

Como antes, deixamos a parte da tensão superficial não especificada.

A constante de integração (eliminando o gradiente) garante que a equação da página anterior seja satisfeita quando  $\eta = 0$  e as derivadas são todas nulas.

Temos então um conjunto de equações para resolver, na superfície desconhecida onde

$$z = h + \eta.$$

- Ondas íon-acústicas em plasma magnetizado

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{x}, \quad (\text{campo magnético externo})$$

Equações dos íons:

$$\partial_t n + \nabla \cdot (n \mathbf{v}) = 0$$

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \phi + \Omega_e \mathbf{x} \wedge \mathbf{v} = 0$$

$$\nabla^2 \phi = e^\psi - n.$$

Potencial elétrico  $\phi$  é normalizado por  $(K_B T_e)/e$ .

Elétrons não inerciais e íons frios:

$$(m_e/m_i \rightarrow 0, T_i/T_e \rightarrow 0).$$



Velocidade normalizada pela velocidade íon-acústica:

$$(K_B T_e / m_i)^{1/2}$$

Comprimento normalizado pelo comprimento de Debye:

$$(K_B T_e / 4\pi n_0 e^2)^{1/2}$$

Densidades normalizadas por  $n_0$  (o valor de equilíbrio). Por fim:

$$\Omega_c = B_0 / \sqrt{(4\pi n_1 m_1) c} = V_A / c.$$

$V_A$  = velocidade de Alfvén,  $c$  = velocidade da luz  
(executar estas contas)

São 5 equações para  $n, v, \phi$

Para as ondas de superfície, assumindo

$$\eta = a \cos(k_0 x - \omega_0 t)$$

$$\phi = a f(z) \sin(k_0 x - \omega_0 t), \quad a \rightarrow 0$$

obtém-se

$$\omega_0^2 = (gk_0 + Tk_0^3) \tanh(k_0 h)$$

Fazer (encontrei  $T / \rho$ ).

A razão do subscrito zero será dada mais adiante.

Para  $k_0$  pequeno: ondas de gravidade em águas rasas (fazer).

Já para as ondas íon-acústicas lineares, com perturbações do tipo

$$\eta = a \cos(\mathbf{k}_o \cdot \mathbf{x} - \omega_o t)$$

obtém-se (fazer)

$$k_o^2 + 1 - \frac{k_{oy}^2 + k_{oz}^2}{\omega_o^2 - \Omega_c^2} - \frac{k_{ox}^2}{\omega_o^2} = 0.$$

Não magnetizado:

$$\omega_o^2 = k_o^2 / (1 + k_o^2)$$

- Ondas de superfície e ondas íon-acústicas parecem ter pouco em comum
- No entanto, veremos que a equação para ondas de amplitude pequena mas finita é a mesma nos dois casos.
- Para tanto faz-se uma expansão em um parâmetro pequeno apropriado

- Ondas de gravidade, águas rasas, equações adimensionais:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\phi_z = 0 \text{ on } z = 0$$

$$\eta_t + \phi_x \eta_x + \phi_y \eta_y = \phi_z \text{ on } z = 1 + \eta$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}[\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2] + \eta - S(\eta_{xx} + \eta_{yy})(1 + \eta_x^2 + \eta_y^2)^{-3/2} = 0$$

on  $z = 1 + \eta$ .

Here length is measured in units of the depth  $h$  and velocities in units of  $(gh)^{1/2}$ . A fluid velocity measured in units of  $(gh)^{1/2}$  is known as a Froude number. The dimensionless constant  $S$  derives from surface tension:

$$S = T/(g\rho h^3).$$

Para águas rasas, podemos tomar o ordenamento

wavelength: depth: amplitude as  $\varepsilon^{-\frac{1}{2}} : 1 : \varepsilon$

Ou seja, o comprimento de onda é maior que a profundidade (escalada como um).

Usar estes fatores um pouco estranhos não faz diferença.

Para  $k_0$  pequeno, tanto a velocidade de fase quanto a de grupo são  $(gh)^{\frac{1}{2}}$ , ou 1 no novo sistema.

Para o ordenamento da página anterior, isto sugere tomar

$$\zeta = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(x - t)$$

(onda se propagando para a direita, embora fosse possível assumir propagação no sentido inverso)

No novo sistema, a frequência com deslocamento Doppler fica sendo

$$\omega_0^* = \omega_0 - k_0 \sim k_0^3,$$

Isto sugere usar um novo tempo:  $\tau = \varepsilon^{\frac{3}{2}} t.$

Também pelo ordenamento usado:

$$\eta = \varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)} + \dots$$

Afinal, a amplitude escala com  $\varepsilon$  em primeira ordem.

O resto é menos óbvio, mas funciona:

$$\sigma = \varepsilon \gamma$$

$$\phi = \varepsilon^{1/2} \phi^{(1)} + \varepsilon^{3/2} \phi^{(2)} + \dots$$

Obs.: por quê águas rasas? Porque  $k_0$  é pequeno, ou seja, o comprimento de onda é maior que  $h$ .



Para a equação de Laplace, seja

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n(x, y, t)$$

yielding

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1)z^{n-2} f_n + \nabla^2 f_n z^n] = 0.$$

Thus

$$f_{n+2} = \frac{-\nabla^2 f_n}{(n+1)(n+2)}.$$

A condição no fundo ( $z = 0$ ) nos dá  $f_1 = 0$  e assim todos os  $f_n$  ímpares são nulos.

Com isto,

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} \nabla^{2m} f$$

onde  $f = f_0$ . Verificar.

Nas coordenadas esticadas (stretched):

$$\nabla^2 = \varepsilon \partial_{\xi}^2 + \varepsilon^2 \partial_{\sigma}^2$$

$$\phi = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left( f + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} [\varepsilon \partial_{\xi}^2 + \varepsilon^2 \partial_{\sigma}^2]^m f \right),$$

(verificar)

O Laplaciano explica a escolha do escalonamento de  $y$ ; se refere a  $k_x \gg k_y$  (explicar).

Aqui  $f$  é uma função de  $\xi, \sigma, \tau$ .

Faltam as duas últimas na p. 133.

Notamos (verificar):

$$\partial_t = -\varepsilon^{\frac{1}{2}} \partial_\xi + \varepsilon^{3/2} \partial_\tau.$$

Na primeira correção não linear:

$$\phi \simeq \varepsilon^{\frac{1}{2}} f - \varepsilon^{3/2} \frac{z^2}{2} f_{\xi\xi},$$

Isto implica

$$\phi_z \simeq -\varepsilon^{3/2} z f_{\xi\xi}.$$

A penúltima equação na p. 133 implica, na ordem mais baixa:

$$f_{\xi\xi} - \eta_{\xi}^{(1)} = 0$$

$$\eta^{(1)} = f_{\xi} = \phi_{\xi}^{(1)}$$

(verificar)

Nesta mesma ordem mais baixa (que é  $\epsilon^{3/2}$ ) a última equação na p. 133 não implica nada.

Na ordem seguinte  $\epsilon^{5/2}$  obtém-se usando  $z = 1 + \eta$  as últimas duas equações na p. 133 (verificar):

$$-\eta_{\xi}^{(2)} + \phi_{\xi\tau}^{(1)} + \phi_{\xi\xi}^{(2)} + 2\phi_{\xi}^{(1)}\phi_{\xi\xi}^{(1)} - \frac{1}{6}\phi_{\xi\xi\xi\xi}^{(1)} + \phi_{\sigma\sigma}^{(1)} = 0$$

$$\eta_{\xi}^{(2)} + \phi_{\xi\tau}^{(1)} - \phi_{\xi\xi}^{(2)} + \phi_{\xi}^{(1)}\phi_{\xi\xi}^{(1)} + \left(\frac{1}{2} - S\right)\phi_{\xi\xi\xi\xi}^{(1)} = 0.$$

A última veio após derivar em relação a  $\xi$

Adicionando as duas equações, vem:

$$\phi_{\xi\tau}^{(1)} + \frac{3}{2}\phi_{\xi}^{(1)}\phi_{\xi\xi}^{(1)} + \frac{1}{6}(1 - 3S)\phi_{\xi\xi\xi\xi}^{(1)} + \frac{1}{2}\phi_{\sigma\sigma}^{(1)} = 0.$$

(equação KP – Kadomtsev-Petviashvili)

Sem a dinâmica transversal, vira a equação KdV:

$$u = \phi_{\xi}^{(1)} \Rightarrow u_{\tau} + \frac{3}{2}u u_{\xi} + \frac{1}{6}(1 - 3S)u_{\xi\xi\xi} = 0$$

Dependendo dos parâmetros físicos,  $S > 1/3$

Na verdade no Infeld está um tanto Mandrake.

Precisamos:

$$\phi = \varepsilon^{1/2} \left[ f - \frac{z^2}{2} (\varepsilon \partial_\zeta^2 + \varepsilon^2 \partial_\sigma^2) f + \frac{z^4}{24} (\varepsilon \partial_\zeta^2 + \varepsilon^2 \partial_\sigma^2)^2 f \right]$$

On  $z = 1 + \eta = 1 + \varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)}$  e comparando:

$$\phi^{(1)} = f, \quad \phi^{(2)} = -\frac{f_{\zeta\zeta}}{2} = -\frac{\phi_{\zeta\zeta}^{(1)}}{2}$$

Isso vai ser necessário mais adiante.

Com isto obtém-se

$$\phi_z = \varepsilon^{1/2} \left[ -(\varepsilon f_{\zeta\zeta} + \varepsilon^2 f_{\sigma\sigma} - \varepsilon^2 \eta^{(1)} f_{\zeta\zeta} + \frac{1}{6} \varepsilon^2 f_{\zeta\zeta\zeta\zeta}) \right]$$

(em  $z = 1 + \eta = 1 + \varepsilon \eta^{(1)} + \varepsilon^2 \eta^{(2)}$  )

Fazendo o cálculo e inserindo o resultado de ordem mais baixa na penúltima da p. 133:

$$-\eta_{\zeta}^{(2)} + \phi_{\zeta\tau}^{(1)} + 2\phi_{\zeta}^{(1)}\phi_{\zeta\zeta}^{(1)} - \frac{1}{6}\phi_{\zeta\zeta\zeta\zeta}^{(1)} + \phi_{\sigma\sigma}^{(1)} = 0$$

Não há o termo  $\phi_{\zeta\zeta}^{(2)}$  mostrado no Infeld.



De modo semelhante, calculando a última equação na página 133, obtém-se

$$\phi_{\tau}^{(1)} - \phi_{\zeta}^{(2)} + \frac{(\phi_{\zeta}^{(1)})^2}{2} + \eta^{(2)} = S\eta_{\zeta\zeta}^{(1)}$$

Com  $\eta^{(1)} = \phi_{\zeta}^{(1)}$  e derivando  $\partial_{\zeta}$ :

$$\eta_{\zeta}^{(2)} + \phi_{\zeta\tau}^{(1)} - \phi_{\zeta\zeta}^{(2)} + \phi_{\zeta}^{(1)}\phi_{\zeta\zeta}^{(1)} - S\phi_{\zeta\zeta\zeta\zeta}^{(1)} = 0$$

Não contém  $(1/2)\phi_{\zeta\zeta\zeta\zeta}^{(1)}$  mostrado no Infeld

No entanto, adicionando os termos das equações nas páginas 144 e 145 e usando

$$\phi^{(2)} = -\frac{\phi_{\zeta\zeta}^{(1)}}{2}$$

conforme demonstrado, obtém-se a equação KP que está no livro.

Um cancelamento de dois erros.

- Derivação no livro do Ablowitz (Nonlinear Dispersive Waves, 2011)

$$\eta = a \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$$

$$\phi = af(z) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$$

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0), \quad a \ll 1$$

Anteriormente era 1D

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad f'' - k^2 f = 0, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad \Rightarrow \quad f = f_0 \cosh(kz)$$

Lineariza as equações restantes:

$$\eta_t = \phi_z \quad \text{on } z = h$$

$$\phi_t + g\eta = \frac{T}{\rho} \nabla^2 \eta \quad \text{on } z = h$$

Relação de dispersão:

$$\Rightarrow \omega^2 = \left( g k + \frac{T k^3}{\rho} \right) \tanh(kh)$$

(verificar todos os passos)

Tira a raíz quadrada:

$$\omega = \left[ \left( g k + \frac{T k^3}{\rho} \right) \tanh(kh) \right]^{1/2}$$

Expande até  $k_x^4$  e até  $k_y^2$  (notar as escalas):

$$k_x \omega = \sqrt{g h} \left( k_x^2 + \frac{k_y^2}{2} + \left( \frac{T}{2\rho g} - \frac{h^2}{6} \right) k_x^4 \right)$$

Substitui:  $\omega \rightarrow i\partial_t$ ,  $\mathbf{k} \rightarrow -i\nabla$

Esse termo some após transformada de Galileu

$$\eta_{xt} = \sqrt{g h} \left( -\eta_{xx} - \frac{\eta_{yy}}{2} + \left( \frac{T}{2\rho g} - \frac{h^2}{6} \right) \eta_{xxxx} \right)$$

Isto é a equação KP linearizada.

Não é claro por quê é  $\eta$  que satisfaz (e não outra quantidade, como  $\phi$  por exemplo).

- Ondas íon-acústicas de baixa amplitude

Densidade Lagrangiana (sem campo magnético e com  $\mathbf{v} = \nabla\psi$ ):

$$L = \frac{1}{2}n(\nabla\psi)^2 + n\psi_t + n\phi - e^{\psi} - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + 1.$$

Irrotacional.

Verificar que é uma boa densidade Lagrangiana.  
É melhor expandir apenas a função L.

Stretching:

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - t)$$

$$\tau = \varepsilon^{3/2}t.$$

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \approx k - \frac{k^3}{2}$$

(sugere o stretching)

Também escolhemos:

$$\sigma = \varepsilon y$$

$$n = 1 + \varepsilon n^{(1)} + \dots$$

$$\psi = \varepsilon^{1/2} \psi^{(1)} + \dots$$

$$\phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \dots$$

Expandindo L, obtém-se  $L^{(1)} = -\psi_{\xi}^{(1)}$

Isto é um termo de superfície e não contribui (verificar a expansão).



Na ordem seguinte:

$$L^{(2)} = -n^{(1)}\psi_{\xi}^{(1)} + n^{(1)}\phi^{(1)} - \frac{1}{2}\phi^{(1)2} + \frac{1}{2}\psi_{\xi}^{(1)2} + \psi_{\tau}^{(1)} - \psi_{\xi}^{(2)}$$

As equações de movimento:

$$\delta_n^{(1)}: \psi_{\xi}^{(1)} = \phi^{(1)}$$

$$\delta\phi^{(1)}: n^{(1)} = \phi^{(1)}$$

$$\delta\psi^{(1)}: n^{(1)} = \psi_{\xi}^{(1)}$$

Na ordem seguinte:

$$L^{(3)} = \psi_{\tau}^{(1)} \psi_{\xi}^{(1)} + \frac{1}{3} \psi_{\xi}^{(1)3} - \frac{1}{2} \psi_{\xi\xi}^{(1)2} + \frac{1}{2} \psi_{\sigma}^{(1)2} \\ + \text{perfect differentials,}$$

Aqui foi expressado em termos de  $\psi(1)$

A equação de movimento:

$$\delta\psi: \psi_{\xi\tau} + \psi_{\xi} \psi_{\xi\xi} + \frac{1}{2} \psi_{\xi\xi\xi\xi} + \frac{1}{2} \psi_{\sigma\sigma} = 0.$$

Novamente, a equação KP.

Conferir estas contas.

- Ondas íon-acústicas em plasma magnetizado

Consideramos  $\Omega_c$  de ordem 1 (pag. 128), o que quer dizer um campo magnético intenso.

Não há densidade Lagrangiana (ao menos que seja simples o suficiente).

Se precisa expandir diretamente as equações.

A expansão da relação de dispersão (pag. 131) para  $k$  pequeno leva a

$$\omega_0 - k_0 \sim k_0^3 \quad (\text{conferir com } k_y \ll k_x)$$

Usamos

$$\xi = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(x - t)$$

$$\sigma = \varepsilon^{\frac{1}{2}}y$$

$$\tau = \varepsilon^{3/2}t$$

$$n = 1 + \varepsilon n^{(1)} + \dots$$

$$v_x = \varepsilon v_x^{(1)} + \varepsilon^2 v_x^{(2)} + \dots$$

$$v_y = \varepsilon^2 v_y^{(1)} + \varepsilon^3 v_y^{(2)} + \dots$$

$$v_z = \varepsilon^{3/2} v_z^{(1)} + \varepsilon^{5/2} v_z^{(2)} + \dots$$

$$\phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \dots$$

A justificativa para  $\zeta$  e  $\tau$  vem da relação de dispersão. Já o restante vem porque funciona...  
 Notar que  $k_y \ll k_x$  justifica a transformação de  $y$ .

Primeira ordem (conferir):

$$n^{(1)} = \phi^{(1)},$$

$$\partial_\zeta n^{(1)} = \partial_\zeta v_x^{(1)},$$

$$v_z^{(1)} = \Omega_c^{-1} \partial_\sigma \phi^{(1)},$$

$$v_y^{(1)} = \Omega_c^{-1} \partial_\zeta v_z^{(1)}$$

Na ordem seguinte (conferir):

$$n^{(2)} = \phi^{(2)} - (\partial_\xi^2 + \partial_\sigma^2)\phi^{(1)} + \frac{1}{2}\phi^{(1)2},$$

$$-\partial_\xi n^{(2)} + \partial_t n^{(1)} + \partial_\xi(n^{(1)}v_x^{(1)}) + \partial_\xi v_x^{(2)} + \partial_\sigma v_y^{(1)} = 0,$$

$$-\partial_\xi v_x + \partial_t v_x^{(1)} + v_x^{(1)}\partial_\xi v_x^{(1)} + \partial_\xi \phi^{(2)} = 0.$$

Adicionando as duas últimas e expressando em termos de  $n(1)$  (conferir):

$$\partial_t n^{(1)} + n^{(1)}\partial_\xi n^{(1)} + \frac{1}{2}\partial_\xi^3 n^{(1)} + \frac{1}{2}(1 + \Omega_c^{-2})\partial_{\xi\sigma\sigma} n^{(1)} = 0.$$

É a equação de Zakharov-Kuznetsov.  
Bastante diferente da equação KP.

Exercício: considere as equações para os íons, para ondas íon-acústicas.

Find a solution of (5.1.7)–(5.1.9) depending on  $x - Mt$  only, and such that  $v_x = 0$ ,  $\delta M = M - 1$  is small, and  $\phi$ ,  $v_x$  and  $n - 1$  all tend to zero for  $|x - Mt| \rightarrow \infty$ . Show that this solution is

$$\phi = 3\delta M \operatorname{sech}^2 \left[ \left( \frac{1}{2} \delta M \right)^{\frac{1}{2}} (x - Mt) \right] + O(\delta M)^2.$$

(solução nas notas separadas)

- Equação NLS

Derivação no Belashov and Vladimirov, Solitary waves in dispersive complex media (seção 2.3.1)

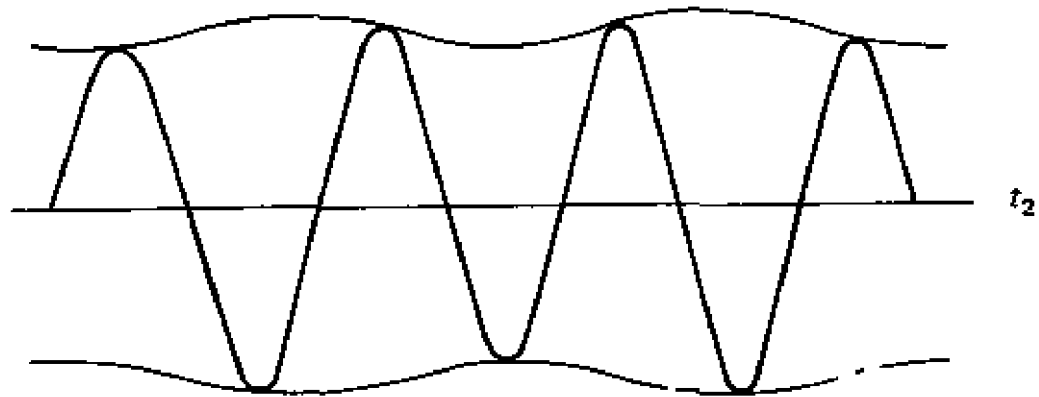
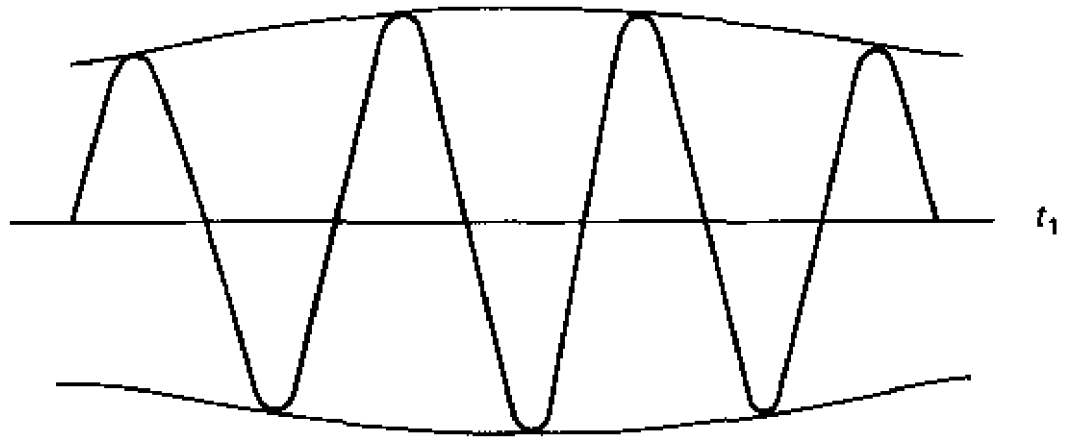
Equação para a propagação de envelopes de ondas.

Derivação para envelopes de ondas de Langmuir.

Nonlinearidade fraca:  $\frac{\delta n(t, \mathbf{r})}{n_0} \ll 1.$



# Envelope de ondas



(b)

Relação de dispersão (ondas de Langmuir):

$$\varepsilon_{\omega,\mathbf{k}}(n)E_{\omega,\mathbf{k}} = 0$$

Função dielétrica:

$$\varepsilon_{\omega,\mathbf{k}}(n) = 1 - 3r_{De}^2\mathbf{k}^2 - \frac{\omega_{pe}^2(n)}{\omega^2}.$$

Comprimento de Debye:

$$r_{De} = \sqrt{\frac{\kappa_B T}{m_e \omega_{pe}^2}}$$

Freqüência de plasma local ( $n$  varia lentamente no tempo e no espaço):

$$\omega_{pe}^2(n) = \frac{4\pi n e^2}{m_e} = \frac{4\pi(n_0 + \delta n)e^2}{m_e} = \omega_{pe}^2 + \frac{\delta n}{n_0} \omega_{pe}^2$$

Freqüência de plasma não perturbada:

$$\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m_e}$$

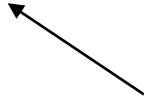
Logo (com (0) denotando o valor de equilíbrio):

$$\varepsilon_{\omega, \mathbf{k}}^{(0)} E_{\omega, \mathbf{k}} = \frac{\delta n}{n_0} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} E_{\omega, \mathbf{k}}$$

Para  $r_{De}^2 k^2 \ll 1$  :

$$\omega_k = \omega_{pe} + \frac{3}{2} r_{De}^2 k^2.$$

Faltou multiplicar  
por  $\omega_{pe}$



Envelope [  $E(x,t)$  varia lentamente ]:

$$\mathbf{E} = \text{Re} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) e^{-i\omega_{pe} t}$$

[ a parte real se aplica a toda a expressão,  
Incluindo  $\exp(-i\omega_{pe} t)$  ]

Em 1D:

$$\left( \frac{i}{\omega_{pe}} \partial_t + \frac{3r_{De}^2}{2} \partial_x^2 \right) E(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\delta n(t, x)}{n_0} E(t, x).$$

De onde vem isso?

$$\omega = \omega_{pe}(n) + \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \omega_{pe}(n)$$

É o mesmo que

$$\omega = \omega_{pe} \left( 1 + \frac{\delta n}{2n_0} \right) + \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \omega_{pe}$$

(o termo térmico já é uma perturbação)

Para ondas planas:

$$\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \Rightarrow \omega = i \frac{\partial}{\partial t}, \mathbf{k} = i \nabla$$

A última equação na página anterior fica sendo

$$\frac{i}{\omega_{pe}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{3}{2} r_{De}^2 \nabla^2 = 1 + \frac{\delta n}{2n_0}$$

Aplicando em

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_{pe}t)$$

e omitindo o til, vem

$$\frac{i}{\omega_{pe}} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{3}{2} r_{De}^2 \nabla^2 E = \frac{\delta n}{2n_0} E$$

cuja versão 1D é mostrada no Belashov.

Há uma variação lenta no espaço (termos de ordem  $k^4$  foram omitidos).

Falta exprimir a perturbação da densidade.

- Força ponderomotiva

Vejamos o movimento de uma partícula na presença de um campo elétrico variando rapidamente no tempo

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cos \omega t$$

Massa  $m$ , carga  $q$ .

Separamos o movimento lento do movimento rápido:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1$$

Aqui  $\mathbf{r}_1$  tem média zero em um período de oscilação.



Além disso,  $r_1$  é pequeno:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) + \mathbf{r}_1 \cdot \nabla \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0)$$

Com isto, na média,

$$m\ddot{\mathbf{r}}_0 = q \langle \mathbf{r}_1 \cdot \nabla \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cos \omega t \rangle$$

O termo que oscila rapidamente tem média zero.

Já a parte rápida é

$$m\ddot{\mathbf{r}}_1 = q\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cos \omega t$$

com solução

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{q\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cos \omega t}{m\omega^2}$$

Com isto,

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = -\frac{q^2}{m^2\omega^2}\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0)\langle\cos^2 \omega t\rangle$$

Mas

$$\mathbf{E}_0 \cdot \nabla \mathbf{E}_0 = \nabla \left( \frac{|E_0|^2}{2} \right), \quad \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

Considera-se  $E_0$  puramente eletrostático.

Portanto,

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = - \frac{q^2}{4m^2\omega^2} \nabla (|E_0|^2)$$

O lado direito (multiplicado pela massa) é a força ponderomotiva, com tantas aplicações em plasmas e lasers.

A derivação foi para uma partícula. Admitindo que seja válida para o plasma como fluido, e considerando elétrons não inerciais, decorre que

$$0 = -\frac{\kappa_B T_e \nabla n_e}{m_e n_e} - \frac{e^2}{4m_e^2 \omega_{pe}^2} \nabla (|E|^2)$$

fazendo a necessária adaptação da notação.

Com isto, finalmente obtemos:

$$\delta n_e = \delta n = -\frac{|E|^2}{16\pi\kappa_B T_e}$$

Substituindo na equação para o envelope:

$$\left( \frac{i}{\omega_{pe}} \partial_t + \frac{3r_{De}^2}{2} \partial_x^2 \right) E(t, x) = - \frac{|E(t, x)|^2}{16\pi n_0 T_e} E(t, x).$$

Falta um fator  
 $\frac{1}{2}$  no Belashov



Normalizando (como?) obtém-se

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + |u|^2 u = 0$$

que é desejada equação de Schrödinger não linear (NLS).

A derivação em si sofre de uma série de defeitos, mas é o boa o bastante para nossos propósitos.

- Para um campo elétrico variando rapidamente no tempo, há também um campo magnético induzido. O Fitzpatrick (Introduction to plasma physics) esboça algo nessa linha, mas custaria um pouco de álgebra a mais, incluir campos magnético.

- Falta qualquer menção aos íons. No entanto, é sabido que a força ponderomotiva representa o impacto das ondas lentas (ion-acústicas) nas ondas rápidas (Langmuir), ou seja, o acoplamento entre LW e IAW.

- Uma derivação mais consistente, portanto, partiria das equações de fluido para íons e elétrons, separando as escalas de tempo rápida e lenta, incluindo campos magnéticos. Algo assim está no Nicholson (Introduction to plasma physics) e também em Thornhill and Ter Haar, Physics Reports, Langmuir turbulence and modulational instability. **43**, 43 (1978).  
(mas sem campo magnético induzido)

- Métodos exatos para ondas não lineares de grande amplitude

Infeld and Rowlands, cap. 6

O método do espalhamento inverso (Inverse Scattering Method) gera sólitons, mas nem sempre ondas não lineares gerais, além de nem sempre se adaptar às condições iniciais.

Aqui serão vistas alternativas, a começar pela análise no plano de fase.



- Análise no plano de fase

Equações dos íons, sem campo magnético, elétrons termalizados, variável  $\xi = x - v_0 t$

$$-v_0 n' + (nv)' = 0$$

$$-v_0 v' + vv' + \phi' = 0$$

$$\phi'' = e^{th} - n.$$

Introduzindo  $w = v - v_0$  e integrando (fazer):

- $nw = M$

$$\frac{1}{2}w^2 + \phi = E = \frac{1}{2}M^2$$

$$\frac{1}{2}\phi'^2 = e^\psi + M(M^2 - 2\phi)^{\frac{1}{2}} - C.$$

Aqui,  $M > 0$ ,  $C > 0$ . ( $C < 0$ , ou energia positiva, dá singularidade)

Para  $|\xi| \rightarrow \infty$  esperamos (Lt é o limite):

$$\text{Lt}\phi = \text{Lt}(n-1) = 0 \quad \text{Ltw} = M$$

Para uma onda solitária, no infinito vale

$$\phi_\xi = \text{zero. Assim, } C_s = 1 + M^2$$

( $C_s$  é o valor de  $C$  para onda solitária)

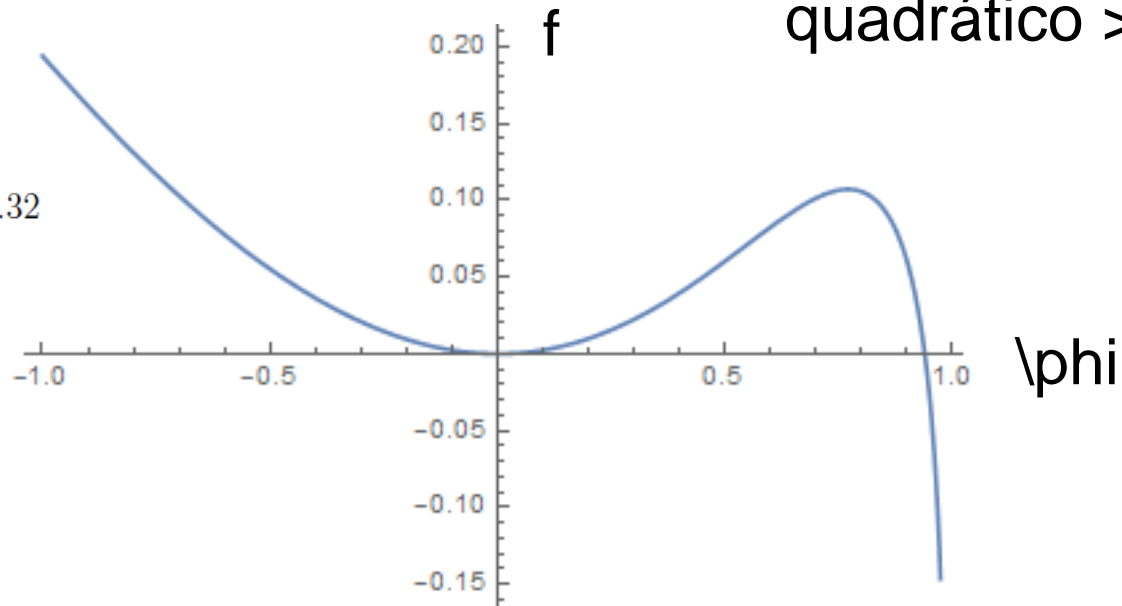
A “energia cinética” expandida para  $\phi$  pequeno:

$$\frac{\phi'^2}{2} = e^\phi + M(M^2 - 2\phi)^{1/2} - (1 + M^2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{M^2}\right)\phi^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M^4} - \frac{1}{3}\right)\phi^3 = f(\phi, M)$$

Aqui assumido  $C = C_s$

Para  $1 < M < 1.32$ , o lado direito parece uma cúbica com sinal do termo cúbico negativo, e o quadrático  $> 0$

$$M^4 < 3 \Rightarrow M < 1.32$$



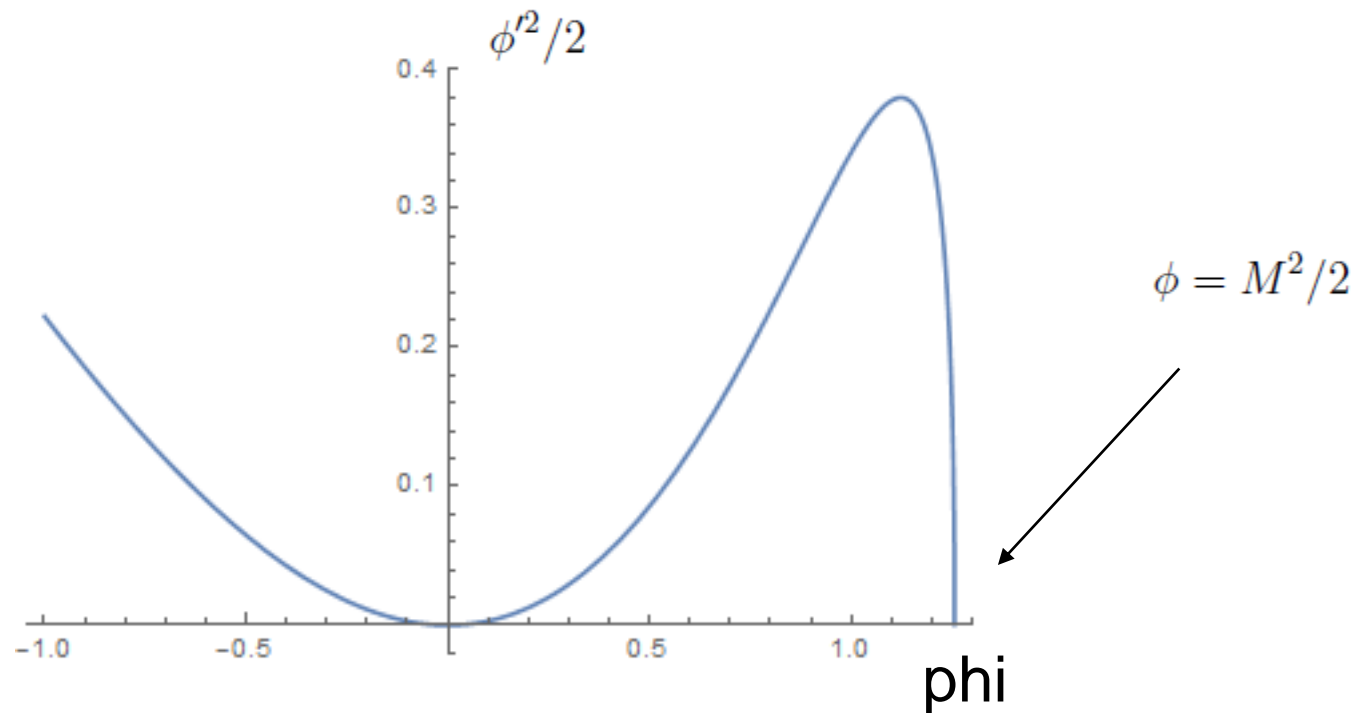
A condição  $\phi < \frac{1}{2}M^2$  para que a raiz fique real:  
se precisa encontrar a raiz de (por quê?)

$$1 + M^2 - e^{M^2/2} = 0$$

A solução é  $M = 1.5852$  (ligeiramente diferente do valor obtido expandindo para pequena amplitude).

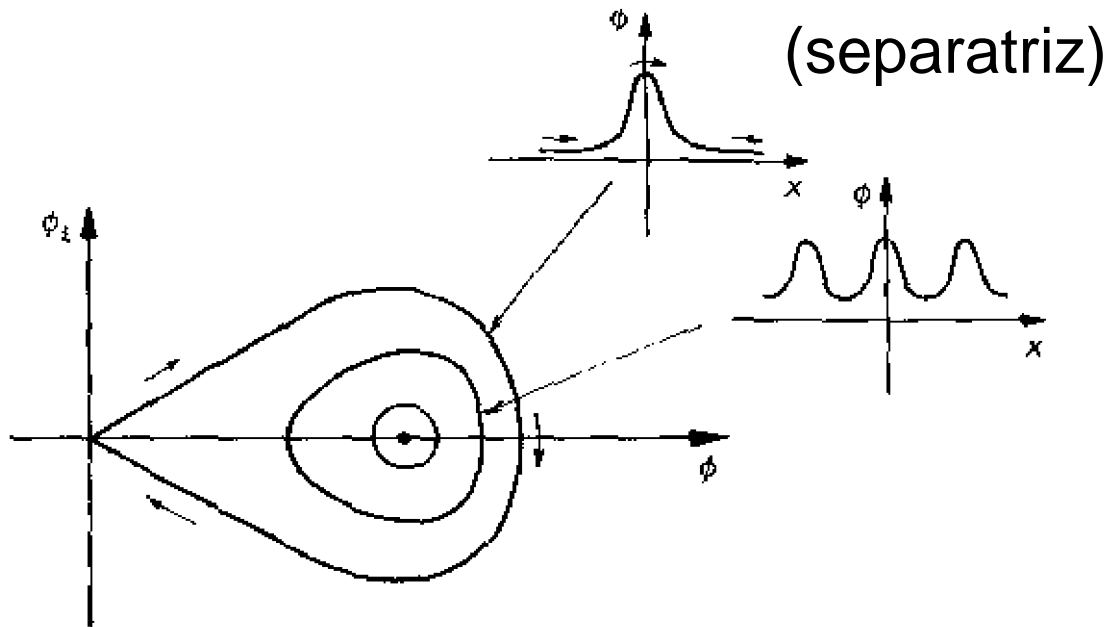
Ou seja:  $1 < M < 1.5852$

Gráfico da “energia cinética” para  $M = 1.5852$ :



(A expressão completamente não linear, sem expandir)

Fazendo o gráfico no espaço de fase obtém-se:



As curvas periódicas correspondem a  $C < C_s = 1 + M^2$


$$\frac{\phi'^2}{2} = e^\phi + M(M^2 - 2\phi)^{1/2} - C$$

Caso  $C > C_s$ : singular em tempo finito

Encontrou-se algo como  $(\phi')^2 = f(\phi, C_i)$   
 sendo  $C_i$  constantes. Condições para  
 sólitons (ou ondas solitárias):

$$(\phi')^2 \geq 0.$$

$$f(0, C_i) = 0 \quad (\text{uma condição sobre } C_i)$$


 No infinito  $\phi' = 0$ ,  $\phi = \text{cte.} = 0$

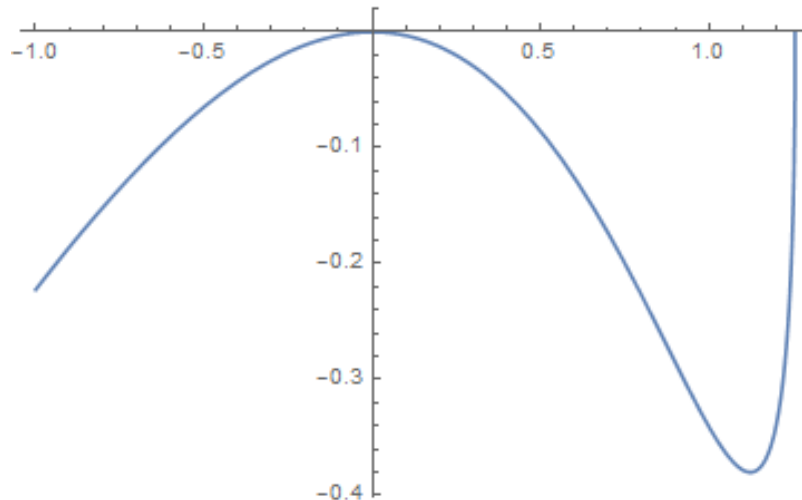
$$\frac{\partial \phi'^2}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi'^2}{\partial \phi^2} > 0 \text{ at the origin}$$

(ponto fixo estável)

Em plasma se fala em “potencial de Sagdeev”:

$$\frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) = 0, \quad V(\phi) = -e^\phi - M(M^2 - 2\phi)^{1/2} + C$$

Gráfico de  $V$  para  $C = C_s$ , mostrando o poço de potencial





A forma analítica da onda solitária é difícil de encontrar, devido a forma do potencial de Sagdeev.

Porém, expandindo

$$\frac{\phi'^2}{2} = e^\phi + M(M^2 - 2\phi)^{1/2} - (1 + M^2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{M^2}\right)\phi^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M^4} - \frac{1}{3}\right)\phi^3$$

e resolvendo com  $\phi'(0) = 0$  obtém-se (verifique):

$$\phi = \frac{a}{b} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{a}\zeta}{2}\right)$$

$$a = 1 - \frac{1}{M^2}, \quad b = \frac{1}{M^4} - \frac{1}{3}$$

Restrito a  
 $1 < M < 1.32$

De fato uma onda solitária.

A seguir a NLS (Infeld pag. 149):

$$i\partial_t\phi + \bar{h}\phi + c\partial_x^2\phi + |\phi|^2\phi = 0.$$

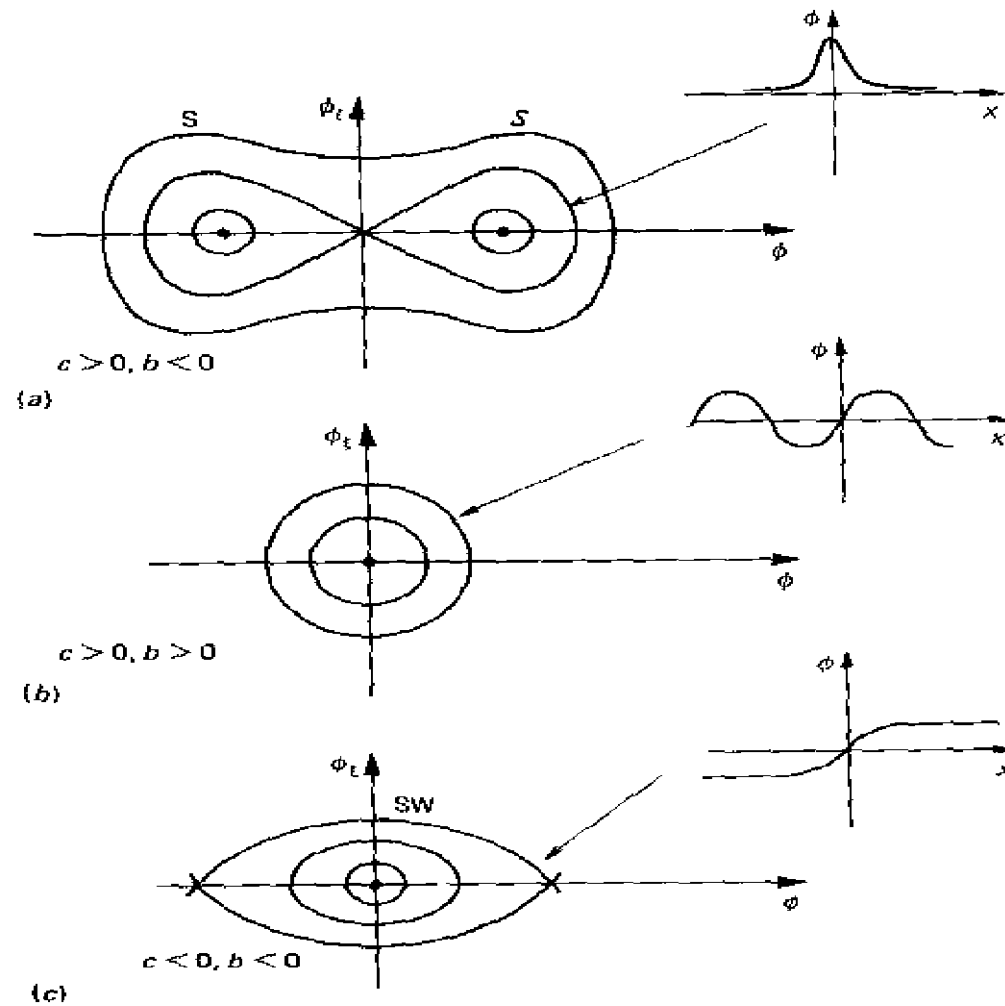
Subs.:  $\phi = \phi_0(x - v_D t) \exp[i(\frac{v_D x}{2c} + \omega_0 t)]$

Segue:  $c\phi_{0\xi\xi} + b\phi_0 + \phi_0^3 = 0$  (conferir)  
 $b = \bar{h} - \omega_0 - v_D^2/4c.$

Integra:  $c(\phi_{0\xi})^2 = B - b\phi_0^2 - \frac{1}{2}\phi_0^4$

↖ Constante de integração

Fig. 6.2. Phase diagrams for solutions to the nonlinear Schrödinger equation (6.2.12).  $S$  is the separatrix corresponding to a soliton,  $SW$  = shock wave.



Discutir

- Ondas de choque fracas em um plasma colisional  
 Havendo colisões entre elétrons e íons, a equação KdV fica alterada para:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Medida das colisões e-i

$$u = u(\xi - u_0 t), \quad (\text{onda propagante})$$

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = 2\nu(u - u_0) \frac{du}{d\xi} - (u - u_1)(u - u_2), \quad u_{1,2} = u_0 \pm (u_0^2 + A)^{\frac{1}{2}}.$$

(fazer)

Tranformando:

$$u = \alpha(v - 1) + u_0$$

$$\frac{dv}{dx} = w$$

$$\xi = x/\sqrt{\alpha}$$

$$\alpha = (u_0^2 + 2A)^{\frac{1}{2}}, \delta = 2v\alpha^{\frac{1}{2}}$$

A e não 2A



Obtém-se (fazer):

$$\frac{dv}{dx} = w$$

$$\frac{dw}{dx} = \delta(v - 1)w - v(v - 2).$$

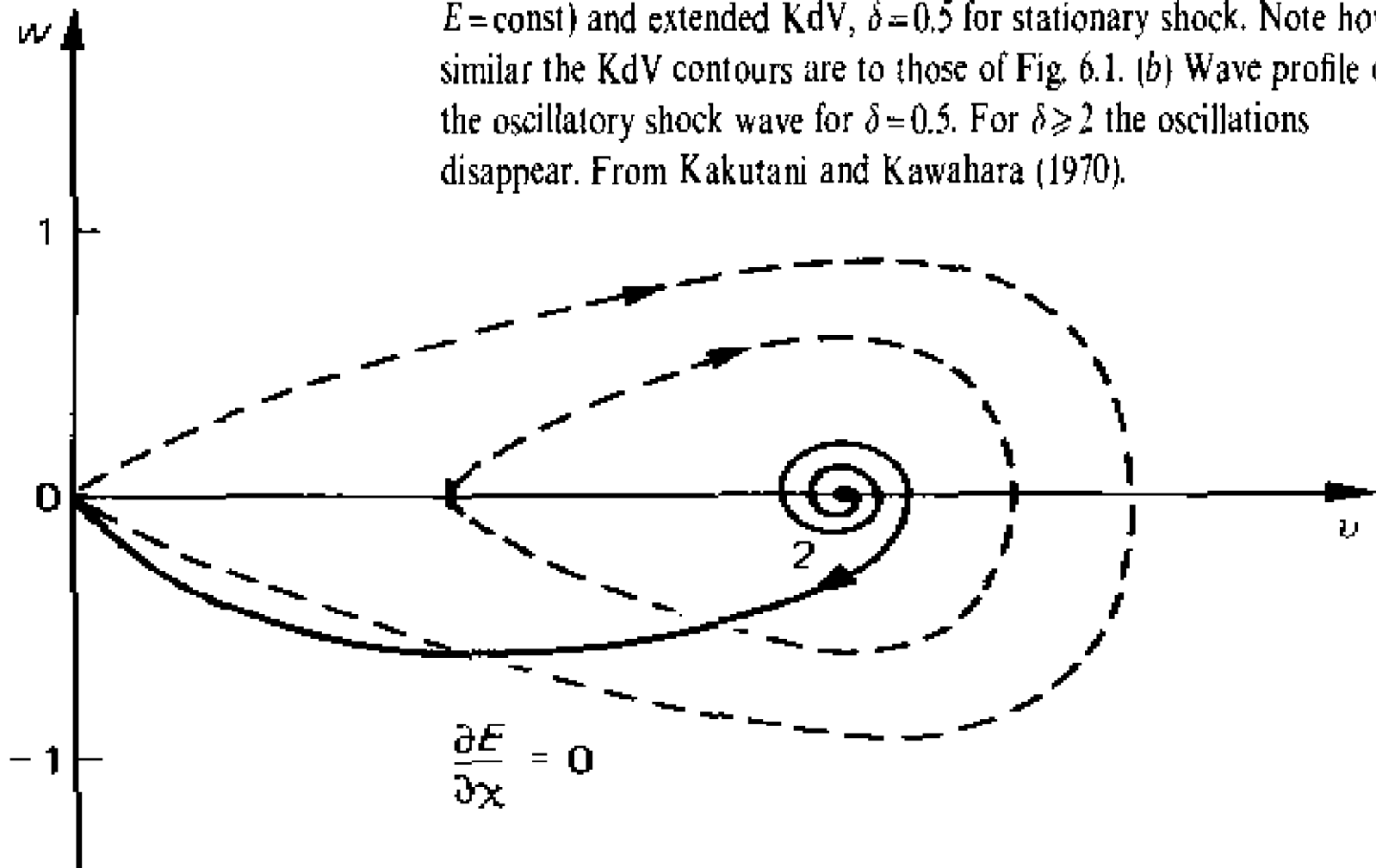
$(v, w) = (0, 0)$  is a saddle point and  $(v, w) = (2, 0)$  is a centre when  $\delta = 0$ .  
(fazer)

$0 < \delta < 2$  : o centro se torna uma espiral instável

(fazer. Notas paralelas)

O que achei foi:  $0 < \delta < 2\sqrt{2}$

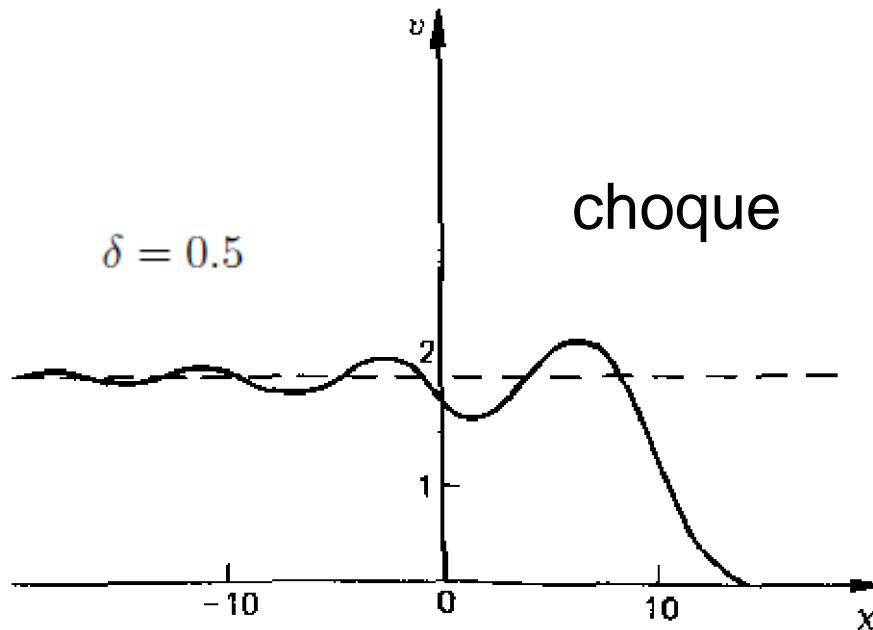
Fig. 6.6. (a) Phase diagram of  $(v, w)$  for KdV (dashed lines are  $E = \text{const}$ ) and extended KdV,  $\delta = 0.5$  for stationary shock. Note how similar the KdV contours are to those of Fig. 6.1. (b) Wave profile of the oscillatory shock wave for  $\delta = 0.5$ . For  $\delta \geq 2$  the oscillations disappear. From Kakutani and Kawahara (1970).



(def. E na página que segue)

Integrando:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{3}v^3 - v^2 \right) = \delta(v-1)v_x^2$$



$$v > 1 \Rightarrow dE/dx > 0$$

$$v < 1 \Rightarrow dE/dx < 0$$

$$x \approx 10 \Rightarrow v \approx 1$$

(mesma legenda da figura anterior)



Explicando:

$$\frac{v_x^2}{2} - v^2 + \frac{v^3}{3} = E = \text{cte.} \longrightarrow \text{Curvas tracejadas}$$

Iniciando próximo de  $v = 2 > 1$ ,  $w = dv/dx = 0$ , a quantidade  $E$  aumenta, atingindo as curvas maiores, até que  $v < 1$  (figura p. 192)

$$\delta > 2\sqrt{2} \longrightarrow \text{Não oscilatório}$$

A figura da p. 193 vem da simulação numérica. A quantidade  $v$  vai oscilando com amplitude crescente, até

$$x \approx 10 \Rightarrow v \approx 1 \longrightarrow E \text{ começa a diminuir até } w=v=0$$

- Modos BGK (Bernstein – Greene – Kruskal)  
Versão bem detalhada: Infeld and Rowlands  
Aqui seguiremos Davidson (Methods in Nonlinear Plasma Theory), seções 4.3 e 4.4

Sistema de Vlasov-Poisson ( $j = e, i$ ):

$$\frac{\partial}{\partial t} f_j(x, v, t) + v \frac{\partial}{\partial x} f_j(x, v, t) + \frac{e_j}{m_j} E(x, t) \frac{\partial}{\partial v} f_j(x, v, t) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E(x, t) = \sum_j 4\pi e_j n_j(x, t) \equiv \sum_j 4\pi e_j \int dv f_j(x, v, t).$$

Novas variáveis (estrutura translacional):

$$x' = x - v_0 t, \quad v' = v - v_0, \quad t' = t$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} f_j(x', v', t') + v' \frac{\partial}{\partial x'} f_j(x', v', t') + \frac{e_j}{m_j} E(x', t') \frac{\partial}{\partial v'} f_j(x', v', t') = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} E(x', t') = \sum_j 4\pi e_j n_j(x', t') = \sum_j 4\pi e_j \int dv' f_j(x', v', t'),$$

(No referencial da onda)

Estacionário no referencial da onda (  $\partial/\partial t' = 0$  )

$$v' \frac{\partial}{\partial x'} f_{j0}(x', v') + \frac{e_j}{m_j} E_0(x') \frac{\partial}{\partial v'} f_{j0}(x', v') = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} E_0(x') = \sum_j 4\pi e_j \int_{-\infty}^{\infty} dv' f_{j0}(x', v').$$

Energia:  $W_j \equiv \frac{1}{2} m_j v'^2 + e_j \phi(x')$ .

$$E_0(x') = -\frac{\partial \phi(x')}{\partial x'}$$

Solução da equação de Vlasov:

$$f_{j0} = f_{j0}(W_j, \text{sgn } v') = \theta(v') f_{j0}^>(W_j) + \theta(-v') f_{j0}^<(W_j);$$

sgn = função sinal; \theta = função de Heaviside

É preciso que:

$$f_{j0}^>(W_j) = f_{j0}^<(W_j), \quad [e_j \phi]_{\min} < W_j < [e_j \phi]_{\max}$$

(partículas aprisionadas)

Ver notas auxiliares

Para partículas não aprisionadas é possível escolher as funções  $>$  e  $<$  de modo independente.

Para a equação de Poisson:

$$dv' = \pm dW_j / [2m_j(W_j - e_j\phi)]^{1/2}$$

+ para  $v > 0$  e - para  $v < 0$  (fazer)

Daí vem (fazer, vide notas):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} = - \sum_j 4\pi e_j \int_{e_j\phi}^{\infty} \frac{dW_j [f_{j0}^>(W_j) + f_{j0}^<(W_j)]}{[2m_j(W_j - e_j\phi)]^{1/2}}$$

Pensando como uma equação para o potencial:

$$\frac{1}{2}[\partial\phi/\partial x']^2 + V(\phi) = \text{const},$$

$$V(\phi) \equiv - \sum_j 4\pi \int_{e_j\phi}^{\infty} dW_j [f_{j0}^>(W_j) + f_{j0}^<(W_j)][2(W_j - e_j\phi)/m_j]^{1/2}.$$

Verifica-se (fazer) usando

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} dx' f(x', x) = \int_{a(x)}^{b(x)} dx' \frac{\partial f(x', x)}{\partial x} + \frac{db}{dx} f(b(x), x) - \frac{da}{dx} f(a(x), x)$$

Quadratura:

$$x' - x_0' = \pm 2^{-1/2} \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi |V(\phi) - V(\phi_0)|^{-1/2}$$

$\phi_0 = \phi(x_0')$  and  $x_0'$  is a point at which  $d\phi/dx' = 0$

Exemplo (Nicholson):

$$f_{j0}^> = n_0 m_j v_{j0} \delta(W_j - \frac{m_j v_{j0}^2}{2}), \quad f_{j0}^< = 0, \quad v_{j0} > 0$$

Ou seja, só há partículas indo para a direita  
(nenhuma aprisionada, portanto)



Fator de normalização: vem de

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad f(x_i) = 0$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta\left(W_j - \frac{m_j v_{j0}^2}{2}\right) &= \delta\left(\frac{m_j v^2}{2} + e_j \phi - \frac{m_j v_{j0}^2}{2}\right) \\ &= \frac{\delta(v - v_{+j})}{m_j v_{+j}}, \quad v_{+j} = +\sqrt{v_{j0}^2 - \frac{2e_j \phi}{m_j}} \end{aligned}$$

(lembrando que  $v > 0$ )

Com isto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{j0} dv = \frac{n_0 v_{j0}}{v_{+j}}$$

Supondo um equilíbrio  $\phi = 0$  sem perda de generalidade, vem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{j0} dv = n_0$$

(em equilíbrio, garantindo a neutralidade global supondo cargas +e, -e)

Supondo cargas  $+e$ ,  $-e$ , massas  $m_e$ ,  $m_i$ , e usando a última página, vem

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi n_0 e \left\{ \left( 1 + \frac{2e\varphi(x)}{m_e v_e^2} \right)^{-1/2} - \left( 1 - \frac{2e\varphi(x)}{m_i v_i^2} \right)^{-1/2} \right\}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = - \frac{\partial}{\partial\varphi} V(\varphi)$$

$$V(\varphi) = - 4\pi n_0 \left\{ m_e v_e^2 \left( 1 + \frac{2e\varphi}{m_e v_e^2} \right)^{1/2} + m_i v_i^2 \left( 1 - \frac{2e\varphi}{m_i v_i^2} \right)^{1/2} \right\}$$

(fazer)

Supondo

$$m_e v_e^2 = m_i v_i^2 \equiv T,$$

vem

$$V(\varphi) = -4\pi n_0 T \left\{ \left( 1 + \frac{2e\varphi}{T} \right)^{1/2} + \left( 1 - \frac{2e\varphi}{T} \right)^{1/2} \right\}$$

Se for pequena amplitude:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)$$

$$V \approx -4\pi n_0 T + 4\pi n_0 e^2 \phi^2 / T$$

↑  
irrelevante

↖ pseudo-potencial  
harmônico

Neste caso (de outro modo: oscilações não lineares),

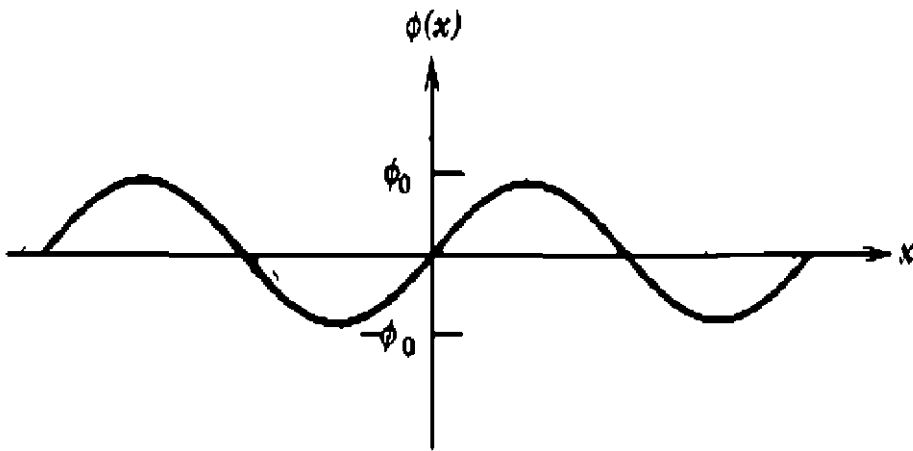
$$\varphi(x) = \varphi_0 \sin (2^{1/2} x / \lambda_{\text{eff}})$$

Comprimento de Debye efetivo:

$$\lambda_{\text{eff}} = \dot{v}_e / \omega_e \quad (\text{verificar})$$

$$\omega_e^2 = 4\pi n_0 e^2 / m_e$$

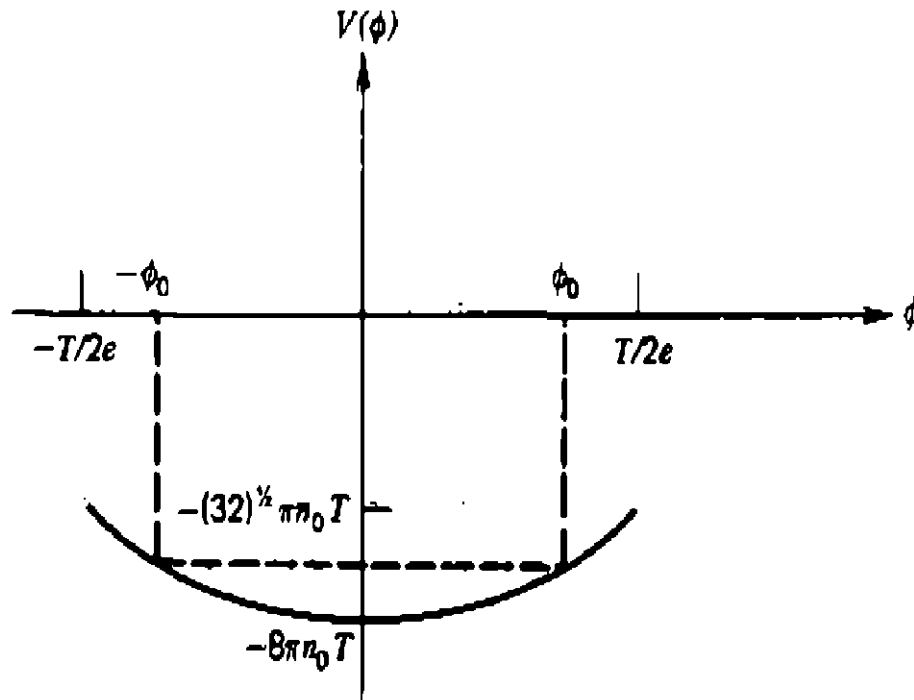
Obs.:  $\lambda_{\text{eff}}$  não é o comprimento de onda



**Fig. 6.36** Periodic BGK modes for an electron beam moving through an ion beam.

$$m_j v_{j0}^2 / 2 > e \phi_0 \quad (\text{para não haver partículas aprisionadas})$$

Ainda do Nicholson:



**Fig. 6.35** Pseudopotential well used in finding BGK modes for an electron beam traveling through an ion beam.

(fazer os detalhes)



# Cálculo exato do comprimento de onda

Quadratura:

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 = 8\pi n_0 T \left[ \left(1 + \frac{2e\phi}{T}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{2e\phi}{T}\right)^{1/2} - \sqrt{2} \right]$$

Fator dois

$$\lambda = \frac{2}{\sqrt{8\pi n_0 T}} \int_{-T/2e}^{T/2e} \frac{d\phi}{\left[ \left(1 + \frac{2e\phi}{T}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{2e\phi}{T}\right)^{1/2} - \sqrt{2} \right]^{1/2}}$$

Aqui supondo que oscile entre  $-T/2e$  e  $+T/2e$   
(amplitude máxima)

$$\lambda = \sqrt{2} \frac{v_e}{\omega_e} \int_0^1 \frac{ds}{[(1+s)^{1/2} + (1-s)^{1/2} - \sqrt{2}]^{1/2}} \quad \swarrow \text{A integral} = 1.53$$

Resultado para a amplitude máxima

Tomando  $2 \times 1.53 = 3.06 \approx \pi$

$$\longrightarrow \lambda \approx \frac{\sqrt{2}\pi v_e}{2\omega_e} \quad (\text{concorda com o resultado obtido para pequena amplitude a menos de um fator } 1/2)$$

Alternativa (pequena amplitude)

Expandindo na p. 209:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{m_e \omega_e^2 \phi^2}{T} = 4\pi(2 - \sqrt{2})n_0 T$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{k^2 \phi^2}{2} = 4\pi(2 - \sqrt{2})n_0 T$$

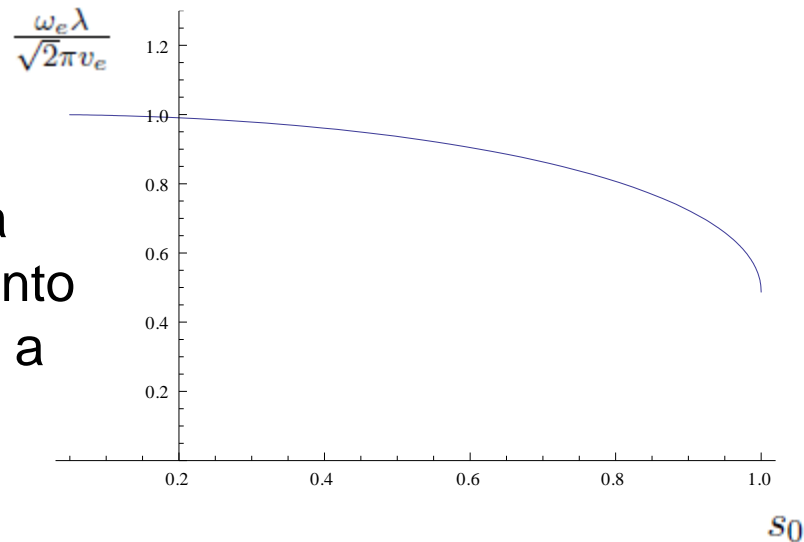
onde

$$k^2 = \frac{2m_e \omega_e^2}{T} = \frac{2\omega_e^2}{v_e^2} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\sqrt{2}\pi v_e}{\omega_e} \quad (\text{OK})$$

O resultado para  $-\phi_0 \leq \phi \leq \phi_0$  :

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}v_e}{\omega_e} \int_0^{s_0} ds \left( \sqrt{1+s} + \sqrt{1-s} - \sqrt{1+s_0} - \sqrt{1-s_0} \right)^{-1/2}, \quad s_0 = \frac{2e\phi_0}{T} \leq 1$$

Dependência  
do comprimento  
de onda com a  
amplitude

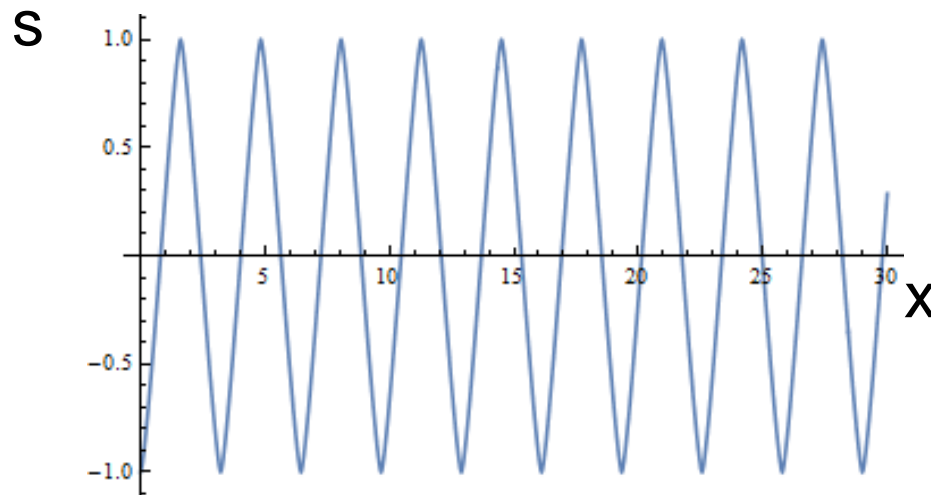


Reescalando:

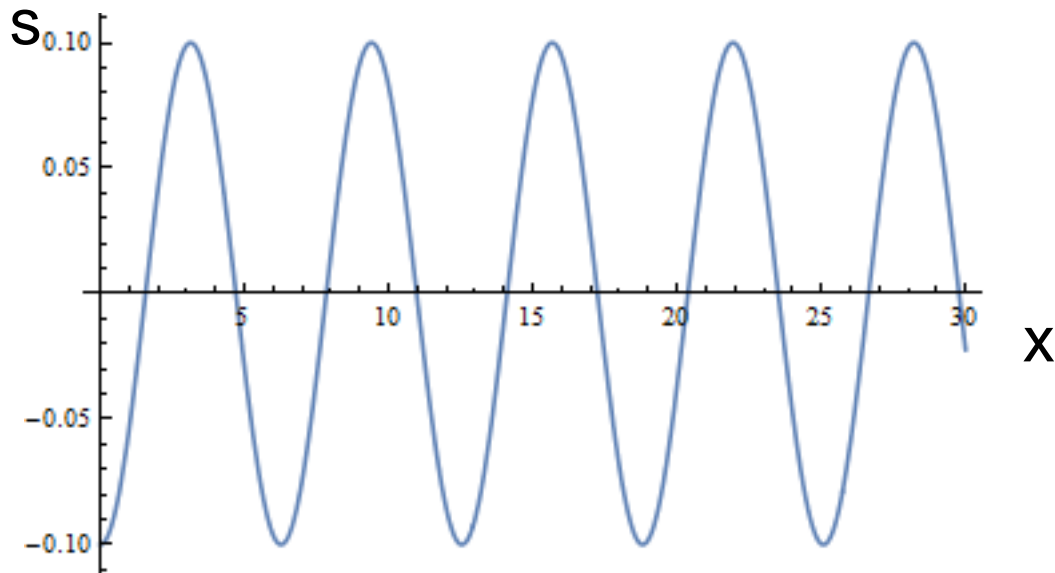
$$s = \frac{2e\phi}{T}, \quad x \rightarrow kx$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 4 \left[ (1+s)^{1/2} + (1-s)^{-1/2} - (1+s_0)^{1/2} - (1-s_0)^{1/2} \right]$$

[onde  $s'(s=s_0) = 0$ ]



Oscilação de grande amplitude



Oscilação de pequena amplitude (bem mais suave).  
Nos dois gráficos foi mais fácil simular e EDO2:

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = (1 + s)^{-1/2} - (1 - s)^{-1/2}$$

Poderia ser feito usando a p. 199

Extensões: campos magnéticos, leis de conservação mais gerais, inúmeros exemplos

Aplicações: estágio final do amortecimento de Landau não linear

Ou então: dado o potencial arbitrariamente escolhido, resolver para a função distribuição (veremos)

Ondas não lineares em plasmas: Schamel e outros!

- Outro ponto de vista:  $\phi(x')$  dado, assim como a distribuição de íons (trapped e untrapped) e elétrons (untrapped), resolvendo para a distribuição de elétrons aprisionados.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} = - \sum_j 4\pi e_j \int_{e_j \phi}^{\infty} \frac{dW_j [f_{j0}^>(W_j) + f_{j0}^<(W_j)]}{[2m_j(W_j - e_j \phi)]^{1/2}} \quad (\text{p. 198})$$

Cargas +e, -e:

$$\frac{1}{4\pi e} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} = \int_{-e\phi}^{\infty} \frac{dW_e (f_{e0}^>(W_e) + f_{e0}^<(W_e))}{[2m_e(W_e + e\phi)]^{1/2}} - \int_{e\phi}^{\infty} \frac{dW_i (f_{i0}^>(W_i) + f_{i0}^<(W_i))}{[2m_i(W_i - e\phi)]^{1/2}}$$



Elétrons aprisionados:

$$W_e < -e\phi_{\min}$$

Usando

$$\int_{-e\phi}^{\infty} dW_e = \int_{-e\phi}^{-e\phi_{\min}} dW_e + \int_{-e\phi_{\min}}^{\infty} dW_e$$

obtem-se

$$\int_{-e\phi}^{-e\phi_{\min}} \frac{dW_e f_{e0}^{\text{tr}}(W_e)}{[2m_e(W_e + e\phi)]^{1/2}} = g(e\phi)$$

$$f_{e0}^{\text{tr}}(W_e) = f_{e0}^>(W_e) + f_{e0}^<(W_e) = 2f_{e0}^>(W_e) = 2f_{e0}^<(W_e)$$

A expressar em termos de  $\phi$

$$g(e\phi) \equiv \frac{1}{4\pi e} \frac{\partial^2 \phi(x')}{\partial x'^2} + \int_{e\phi}^{\infty} \frac{dW_1 [f_{10}^>(W_1) + f_{10}^<(W_1)]}{[2m_1(W_1 - e\phi)]^{1/2}} - \int_{-e\phi_{\min}}^{\infty} \frac{dW_e [f_{e0}^>(W_e) + f_{e0}^<(W_e)]}{[2m_e(W_e + e\phi)]^{1/2}},$$

Solução da equação integral na página anterior:

$$f_{e0}^{\text{tr}}(W_e) = \frac{(2m_e)^{1/2}}{\pi} \int_{e\phi_{\min}}^{-W_e} dW \frac{dg(W)}{dW} \frac{1}{[-W_e - W]^{1/2}}, \quad W_e < -e\phi_{\min}$$

$$g(e\phi_{\min}) = 0$$

Espera-se que resulte numa função  $\geq 0$

No restante é bastante arbitrário

Estabilidade de ondas BGK: Davidson estuda

→ é bem envolvido, mas mostra como  
estudar a estabilidade de um  
equilíbrio não homogêneo

Davidson também mostra um exemplo para uma  
onda senoidal, e é um tanto envolvido

- Variáveis Lagrangianas

Os modos (ou ondas) BGK, quando estáveis, podem representar o estágio final de um plasma não colisional

Modos BGK são modos cinéticos

Evolução temporal? Quem sabe, via fluidos

Métodos Lagrangianos (vejamos pelo Infeld / Davidson)

Equações para os elétrons frios (íons, um fundo homogêneo neutralizante):

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_e v_e) = 0$$

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} = -\frac{e}{m} E$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + v_e \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{4\pi\rho_0}{m} e v_e$$

$\rho_{e,0}$  : densidades de massa

A última equação foi tomada por conveniência (derivada total de E) e vem de

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{4\pi e}{m}(\rho_0 - \rho_e)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi \mathbf{J}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

1D:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -4\pi J = \frac{4\pi \rho_e e v_e}{m} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} + v_e \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{4\pi \rho_0 e v_e}{m}$$

## Variáveis Lagrangianas:

$$\tau = t$$

$$\bar{x} = x - \int_0^{\tau} v(\bar{x}, \tau') d\tau' \quad (\text{omitindo o subscrito e})$$

Com isso (verificar),

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -eE/m, \quad \partial E / \partial \tau = 4\pi\rho_0 ev/m$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} E + \omega_p^2 E = 0, \quad \omega_p^2 = 4\pi\rho_0 e^2 / m^2$$

Portanto (verificar):


$$E(\bar{x}, \tau) = A(\bar{x})\cos(\omega_p\tau) + B(\bar{x})\sin(\omega_p\tau)$$

$$v(\bar{x}, \tau) = \frac{e}{\omega_p m_e} [-A\sin(\omega_p\tau) + B\cos(\omega_p\tau)].$$

Pelas condições iniciais:

$$A = E(\bar{x}, 0), B = \omega_p m_e v(\bar{x}, 0).$$

Falta dividir  
por e



(pois  $\bar{x} = x$  em  $t = 0$ )



Integrando (fazer):

$$x = \bar{x} + \frac{v(\bar{x}, 0)}{\omega_p} \sin(\omega_p \tau) - \frac{eE(\bar{x}, 0)}{m\omega_p^2} [1 - \cos(\omega_p \tau)]. \quad (\text{ok})$$

Para a densidade:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\rho(\bar{x}, \tau) \psi(\bar{x}, \tau)] = 0 \quad (\text{Equação da continuidade})$$

Onde: 
$$\psi = 1 + \int_0^\tau \frac{\partial v(\bar{x}, \tau')}{\partial \bar{x}} d\tau'$$

(verificar)

$$\frac{\partial}{\partial x} = \psi^{-1} \frac{\partial}{\partial \bar{x}},$$

Com isso:

$$\rho(\bar{x}, \tau) = \rho(\bar{x}) / \psi(\bar{x}, \tau),$$

where  $\rho(\bar{x}) = \rho(\bar{x}, t = 0)$  and  $\psi(\bar{x}, 0) = 1$

Em princípio há uma solução exata, que deve ser univaluada e demanda uma inversão de variáveis,

$\bar{x}$  em função de  $x$

Exemplo:  $v(\bar{x}, 0) = 0$

$$E(\bar{x}, 0) = a \sin(k\bar{x}).$$



$$E(\bar{x}, t) = a \sin(k\bar{x}) \cos(\omega_p t)$$

$$kx = k\bar{x} - \alpha(t) \sin(k\bar{x}), \quad \alpha(t) = -\frac{eak}{m\omega_p^2} [1 - \cos(\omega_p t)]$$

(verificar)

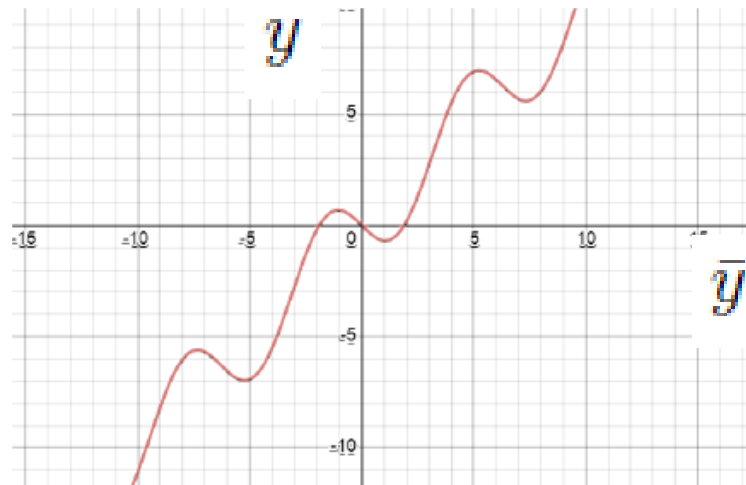
Para ficar uma função univaluada de  $x$ :

$$|\alpha(t)| < 1$$

$$\rightarrow 2ea/m\omega_p^2 < 1$$

This is a condition on the amplitude and raises the question of what happens if one tries to propagate a larger amplitude wave in a cold plasma (experimentally or computationally). This would in fact lead to a multi-stream flow not describable by the Lagrangian formalism, which is tailored to just one stream.

$$y = kx, \quad \bar{y} = k\bar{x}, \quad y = \bar{y} - \alpha(t) \sin \bar{y}$$



$$\alpha > 1$$

Multivaluada: para um mesmo  $y$  há de mais de um  $\bar{y}$

Invertendo:

$\sin(k\bar{x})$  must be a periodic function of  $x$  with period  $2\pi/k$

$$\rightarrow \sin(k\bar{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nkx)$$

Inverte para

$$b_n = \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi/k} \sin(k\bar{x}) \sin(nkx) dx$$

Vem de  $\int_0^{2\pi/k} \sin(mkx) \sin(nkx) dx = \frac{\pi \delta_{mn}}{k}$

$m, n$  inteiros (verificar)

$$\rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dy \sin y (1 - \alpha \cos y) \sin(n[y - \alpha \sin y]).$$

(usando  $k\bar{x}$  como variável de integração - verificar)

Integration by parts gives

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \cos y \cdot \cos(ny - n\alpha \sin y) dy \\ &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} dy [\cos\{(n+1)y - n\alpha \sin y\} + \cos\{(n-1)y - n\alpha \sin y\}]. \end{aligned}$$

(verificar)

Such integrals can be expressed in terms of Bessel functions.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(ny - \beta \sin y) dy = J_n(\beta)$$

and from the identity  $J_{n+1}(\beta) + J_{n-1}(\beta) = \frac{2nJ_n(\beta)}{\beta}$  it follows

$$b_n = \frac{2J_n(n\alpha(t))}{n\alpha(t)}.$$



Thus we finally obtain an explicit solution

$$E(x,t) = 2a \cos(\omega_p t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n\alpha(t))}{n\alpha(t)} \sin(nkx)$$

and using Poisson's equation

$$\rho = \rho_0 - (amk/2\pi e) \cos \omega_p t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha(t)} J_n(n\alpha) \cos(nkx)$$

(conferir)

Período (no tempo) é a frequência de plasma, independente da amplitude.

Vale para o plasma frio apenas.

Relação com estruturas do tipo BGK:

- BGK é teoria cinética
- No entanto, de modo similar se poderia tomar

$\eta = x - v_0 t$  na pag. 217 (erro no Infeld)

→  $\rho v = \rho_0 v_0, v^2 = c + 2e\phi/m$

$E = -d\phi/d\eta, v = v - v_0, c$  is an integration constant

$$\frac{d^2\phi}{d\eta^2} = 4\pi e\rho_0 \left[ \frac{v_0}{\left(c + \frac{2e\phi}{m}\right)^{1/2}} - 1 \right].$$

(fazer)

Falta dividir por m

Integrando resulta

$$\omega_{pe} x = v_0 [\arcsin(y/A) + A - (A^2 - y^2)^{1/2}]$$

\eta

Falta a raíz

$$A = (d\phi/dx)_0 / v_0 (4\pi n_0 m_e)^{1/2} \geq 0$$

$$\omega_{pe}^2 = 4\pi n_0 e^2 / m_e$$

$$y = (1 + 2e\phi / m_e v_0^2)^{1/2} - 1,$$

$$c = v_0^2$$

(Fazer, vide notas auxiliares)

Parecido com o modo BGK do Nicholson (IAW)

- Modos BGK – limite linear
- Modos de Case – van Kampen

Vlasov – Poisson:

$$\partial_t f + v \partial_x f - \frac{eE}{m} \partial_v f = 0$$

$$\partial_x E = 4\pi e \left[ n_0 - \int_{-\infty}^{\infty} dv f(v) \right]$$

Lineariza:

$$\partial_t f_1 + v \partial_x f_1 = \frac{n_0 e E}{m} \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\partial_x E(x,t) = -4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} dv f_1(x,v,t)$$

$$f_0(v) = n_0 g(v), \int_{-\infty}^{\infty} dv g(v) = 1$$

## Do Nicholson (modos normais):

Looking for solutions  $f_1(x, v, t) = \tilde{f}_1(v) \exp(-i\omega t + ikx)$ ,  $E = E_0 \exp(-i\omega t + ikx)$ , (6.216) and (6.217) become

$$(-i\omega + ikv)\tilde{f}_1 = \frac{n_0 e E_0}{m} \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$E_0 = \frac{-4\pi e}{ik} \int_{-\infty}^{\infty} dv \tilde{f}_1(v)$$

$$\rightarrow \left(v - \frac{\omega}{k}\right) \tilde{f}_1 = \frac{\omega_e^2}{k^2} \frac{\partial g}{\partial v} \int_{-\infty}^{\infty} dv' \tilde{f}_1(v')$$

Defining  $\eta(v) \equiv (\omega_e^2/k^2) \partial g/\partial v$ , this is

$$\left(v - \frac{\omega}{k}\right) \tilde{f}_1(v) = \eta(v) \int_{-\infty}^{\infty} dv' \tilde{f}_1(v')$$

Solução (P é a parte principal):

$$\tilde{f}_1(v) = P \left[ \frac{\eta(v)}{v - \omega/k} \right] + \delta(v - \omega/k) \left[ 1 - P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(v') dv'}{v' - \omega/k} \right]$$

(Modo de Case – van Kampen)

Verificar

Valor principal:

$$P \left( \frac{1}{x - a} \right) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x - a} & x \neq a \\ \lim_{x \rightarrow a^{\pm}} \frac{1}{x - a} & x = a \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow (x - a) P \left( \frac{1}{x - a} \right) = 1$$

Dado  $k$ , mantém-se  $w$  livre  
(não há relação de dispersão)

Não amortecido (neste sentido seria um BGK)

Campo elétrico:

$$E_0 = \frac{-4\pi e}{ik} \int_{-\infty}^{\infty} dv \tilde{f}_1(v)$$

$$E_0 = \frac{-4\pi e}{ik}$$

$$E(x,t) = \frac{-4\pi e}{ik} e^{-i\omega t + ikx}$$



Isolado, um modo de Case – van Kampen é singular

Veja-se uma sobreposição, para um dado k:

$$f_1(x, v, t) = e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{f}_1(v, \omega) c(\omega)$$

$c(\omega)$  uma função para ponderação.

Obtém-se:

$$f_1(x, v, t) = e^{ikx} \eta(v) P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t} c(\omega)}{v - (\omega/k)}$$

(verificar)

$$+ e^{ikx} k e^{-ikvt} c(\omega = kv)$$

$$- k e^{ikx - ikvt} c(\omega = kv) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(v') dv'}{v' - v}$$

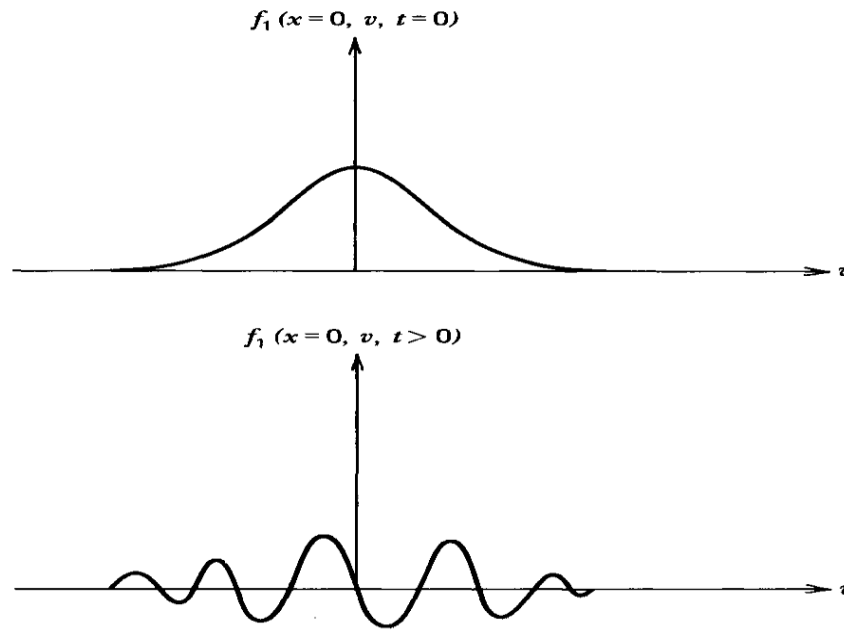
$$\delta(v - \omega/k) = k \delta(\omega - kv)$$

Com isso:

$$E(x,t) = \frac{-4\pi e}{ik} \int_{-\infty}^{\infty} dv f_1(v,x,t)$$

$$E(x,t) = 4\pi e i e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-ikvt} c(\omega = kv)$$

Esse não é singular



(Ignorando a parte dos  
streaming elétrons)

- Excitação paramétrica de ondas em plasmas

- O assunto da interação entre várias ondas

- Ou a excitação de ondas devido a um campo externo

Vamos seguir o Shivamoggi (Introduction to Nonlinear Fluid and Plasma Waves)

## (i) Parametric Excitation of Electromagnetic Waves by an Oscillating Electric Field

Campo externo de alta frequência:

$$\mathbf{E}^{(0)} = E_0 \sin \omega_0 t \hat{\mathbf{i}}_z$$

Com isto a velocidade será

$$\mathbf{V}_s^{(0)} = -V_s^{(0)} \cos \omega_0 t \hat{\mathbf{i}}_z$$

[o (0) se refere ao “estado de equilíbrio”]

where,

$$V_s^{(0)} = \frac{e_s E_0}{m_s \omega_0} .$$

De fato,  $m_s \dot{v}_s = e_s E_0 \sin \omega_0 t$  (s = e,i)

Linearizando as equações de fluido:

$$\frac{\partial n_s^{(1)}}{\partial t} + n_s^{(0)} \nabla \cdot \mathbf{V}_s^{(1)} + \mathbf{V}_s^{(0)} \cdot \nabla n_s^{(1)} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_s^{(1)}}{\partial t} + \mathbf{V}_s^{(0)} \cdot \nabla \mathbf{V}_s^{(1)} = \frac{e_s}{m_s} \left( \mathbf{E}^{(1)} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_s^{(0)} \times \mathbf{B}^{(1)} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^{(1)} = 4\pi \sum_s n_s^{(1)} e_s$$

[(1) é a perturbação]

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{(1)} = 0$$

Se precisa uma corrente externa para um  $\mathbf{J}(0)$  total nulo

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(1)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(1)}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^{(1)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_s e_s [n_s^{(0)} \mathbf{V}_s^{(1)} + n_s^{(1)} \mathbf{V}_s^{(0)}]$$

Seja

$$q^{(1)} \sim e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^{(0)} = 0.$$

[onda transversa;  
q(1) é qualquer campo]

Com isto,

$$\frac{\partial n_s^{(1)}}{\partial t} + n_s^{(0)} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_s^{(1)} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_s^{(1)}}{\partial t} = \frac{e_s}{m_s} \left( \mathbf{E}^{(1)} + \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{V}_s^{(0)} \times \mathbf{B}^{(1)} \right)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^{(1)} = 4\pi \sum_s e_s n_s^{(1)}$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}^{(1)} = 0$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E}^{(1)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(1)}}{\partial t}$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{B}^{(1)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_s e_s [n_s^{(0)} \mathbf{V}_s^{(1)} + \varepsilon n_s^{(1)} \mathbf{V}_s^{(0)}]$$

where  $\varepsilon$  is a small parameter characterizing the weak pump field.

$$\mathbf{B}^{(1)} = B_T^{(1)} \hat{\mathbf{i}}_z \quad (15)$$

$$\mathbf{V}_s^{(1)} = V_{s_L} \hat{\mathbf{i}}_x + V_{s_T} \hat{\mathbf{i}}_y$$

so that equations (9)–(14) give:

$$\frac{\partial n_{s_L}^{(1)}}{\partial t} + n_s^{(0)} ik V_{s_L}^{(1)} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial V_{s_L}^{(1)}}{\partial t} = \frac{e_s}{m_s} E_L^{(1)} \quad (17)$$

$$\frac{\partial V_{s_T}^{(1)}}{\partial t} = \frac{e_s}{m_s} E_T^{(1)} \quad (18)$$

$$ik E_L^{(1)} = 4\pi \sum_s e_s n_{s_L}^{(1)} \quad (19)$$

$$ik E_T^{(1)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_T^{(1)}}{\partial t} \quad (20)$$

$$-ik B_T^{(1)} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_T^{(1)}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_s e_s n_s^{(0)} V_{s_T}^{(1)}. \quad (21)$$



One derives from equations (16), (17) and (19),

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) E_L^{(1)} = -\varepsilon \sum_s \frac{\omega_{p_s}^2}{c} V_s^{(0)} B_T^{(1)} \cos \omega_0 t \quad (22)$$

and from equations (18), (20) and (21),

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_k^2 \right) E_T^{(1)} = \varepsilon \sum_s 4\pi e_s V_s^{(0)} \frac{\partial}{\partial t} (n_{s_L}^{(1)} \cos \omega_0 t) \quad (23)$$

where,

$$\Omega_k^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2, \quad \omega_p^2 = \sum_s \omega_{p_s}^2, \quad \omega_{p_s}^2 = \frac{4\pi n_s^{(0)} e_s^2}{m_s}.$$

A notação sugere L = Langmuir, enquanto  $\Omega_k$  é a onda transversal (ir fazendo os detalhes)

Vemos um acoplamento entre ondas longitudinais e transversais, devido ao campo externo (pump)

The problem in question is characterized by the disparate time scales:

- (a) The fast-time scale corresponding to the period of the excited oscillations;
- (b) The slow-time scale characterizing the rate at which energy is fed into the excited oscillations; this depends on the strength of the pump field.

Therefore, we use the method of multiple time scales to treat equations (16)–(21). Accordingly, let us seek a solution to equations (16)–(21), of the form

$$q^{(1)}(t; \varepsilon) = q_{(0)}^{(1)}(t, \tilde{t}) + \varepsilon q_{(1)}^{(1)}(t, \tilde{t}) + \dots \quad (24)$$

where  $\tilde{t} \equiv \varepsilon t$  represents the slow-time scale.

O método das escalas múltiplas novamente

Using (24), equations (16)–(21) give:

$$E_{L(0)}^{(1)} = A_L^+ e^{i\omega_p t} + A_L^- e^{-i\omega_p t}$$

$$E_{T(0)}^{(1)} = A_T^+ e^{i\Omega_k t} + A_T^- e^{-i\Omega_k t}$$

$$B_{T(0)}^{(1)} = -\frac{kc}{\Omega_k} (A_T^+ e^{i\Omega_k t} - A_T^- e^{-i\Omega_k t})$$

$$V_{sL(0)}^{(1)} = \frac{e_s}{im_s \omega_p} (A_L^+ e^{i\omega_p t} - A_L^- e^{-i\omega_p t})$$

$$V_{sT(0)}^{(1)} = \frac{e_s}{im_s \Omega_k} (A_T^+ e^{i\Omega_k t} - A_T^- e^{-i\Omega_k t})$$

$$e_s n_{sL(0)}^{(1)} = \frac{ik}{4\pi} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega_p^2} (A_L^+ e^{i\omega_p t} + A_L^- e^{-i\omega_p t})$$

where  $A_L^\pm$  and  $A_T^\pm$  are functions of  $\tilde{t}$ .

FAZER

(25)

Notar o  
subscrito (0)

Using (24) and (25), equations (22) and (23) give:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right) E_{L(1)}^{(1)} &= -2i\omega_p \left( \frac{\partial A_L^+}{\partial \tilde{t}} e^{i\omega_p t} - \frac{\partial A_L^-}{\partial \tilde{t}} e^{-i\omega_p t} \right) \\ &\quad - \frac{k}{2\Omega_k} \left( \sum_s \omega_{p_s}^2 V_s^{(0)} \right) (A_T^+ e^{i\Omega_k t} - A_T^- e^{-i\Omega_k t}) \times \\ &\quad \times (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Omega_k^2 \right) E_{T(1)}^{(1)} &= -2i\Omega_k \left( \frac{\partial A_T^+}{\partial \tilde{t}} e^{i\Omega_k t} + \frac{\partial A_T^-}{\partial \tilde{t}} e^{-i\Omega_k t} \right) \\ &\quad + ik \sum_s \frac{\omega_{p_s}^2}{2\omega_p^2} V_s^{(0)} \frac{\partial}{\partial t} [(A_L^+ e^{i\omega_p t} + A_L^- e^{-i\omega_p t}) \times \\ &\quad \times (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})]. \end{aligned} \quad (27)$$

Notar o subscrito (1)

Equations (26) and (27) develop secular terms on the right hand side if  $\omega_0 - \omega_p \approx \Omega_k$ . The removal of these secular terms requires

$$\pm 2i\omega_p \frac{\partial A_L^\pm}{\partial \tilde{t}} = \pm \frac{k}{2\Omega_k} \left( \sum_s \omega_{p_s}^2 V_s^{(0)} \right) A_T^\mp e^{\pm i\Delta_k \tilde{t}} \quad (28)$$

$$\pm 2i\Omega_k \frac{\partial A_T^\pm}{\partial \tilde{t}} = \mp k(\omega_0 - \omega_p) \left( \sum_s \frac{\omega_{p_s}^2 V_s^{(0)}}{2\omega_p^2} \right) A_L^\mp e^{\pm i\Delta_k \tilde{t}}, \quad (29)$$

where,

$$\varepsilon \Delta_k \equiv \omega_0 - \omega_p - \Omega_k \quad \text{MOSTRAR} \quad (30)$$

represents the frequency-mismatch. Observe that the longitudinal and the transverse modes propagating in the opposite directions are coupled parametrically.

Para entender as Eqs. (28) e (29), veja-se as notas anexas.

From equations (28) and (29), one derives

$$\frac{\partial^2 A_T^\pm}{\partial \tilde{t}^2} \mp i\Delta_k \frac{\partial A_T^\pm}{\partial \tilde{t}} - \frac{k^2}{16\Omega_k \omega_p^3} \left( \sum_s \omega_{p_s}^2 V_s^{(0)} \right)^2 A_T^\pm = 0. \quad (31)$$

Equation (31) gives for an exponentially-growing solution (or for parametric excitation),

$$\frac{k^2}{4\Omega_k \omega_p^3} \left( \sum_s \omega_{p_s}^2 V_s^{(0)} \right)^2 > \Delta_k^2 \quad (32)$$

for a given mismatch in frequency  $\Delta_k$ , (32) gives the threshold value of the intensity of the pump field  $\mathbf{E}^{(0)}$  to cause parametric excitation of transverse electromagnetic waves.

Nice!

(instabilidade paramétrica)

Conferi a Eq. (31). Deu certo. Notar que os termos oscilatórios desaparecem.

Notar que foi suposto (ao final) que  $\omega_0 - \omega_p \approx \Omega_k$

Este é o único acoplamento possível já que

$$\omega_0 > \Omega_k > \omega_p$$



Alta freqüência do pump

## (ii) Wave-Wave Interactions

Atitude kamikaze de copiar o livro e debulhar os detalhes ao vivo...

A method of determining satisfaction of the resonance conditions

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3, \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$$

was introduced by Peierls [131] in connection with phonon-phonon interaction in solids. In this method, the portion of the dispersion diagram (Figure 4.2) corresponding to  $(\omega_3, k_3)$  is drawn with origin  $(\omega_2, k_2)$ . If the terminal point of this displaced curve lies on the original dispersion curve then there exists a resonant triad (Figure 4.3).



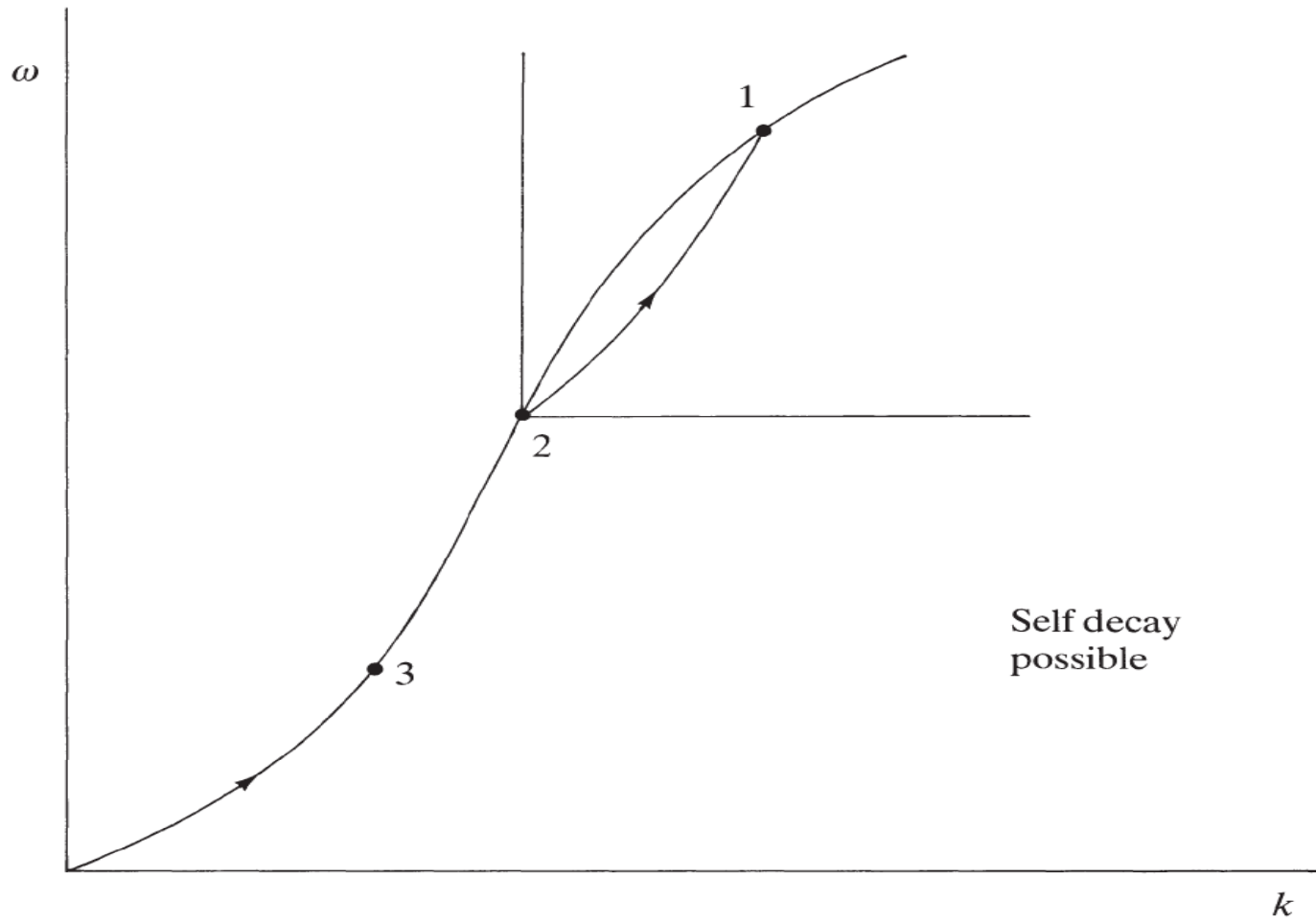


Figure 4.2. Peierls' construction.

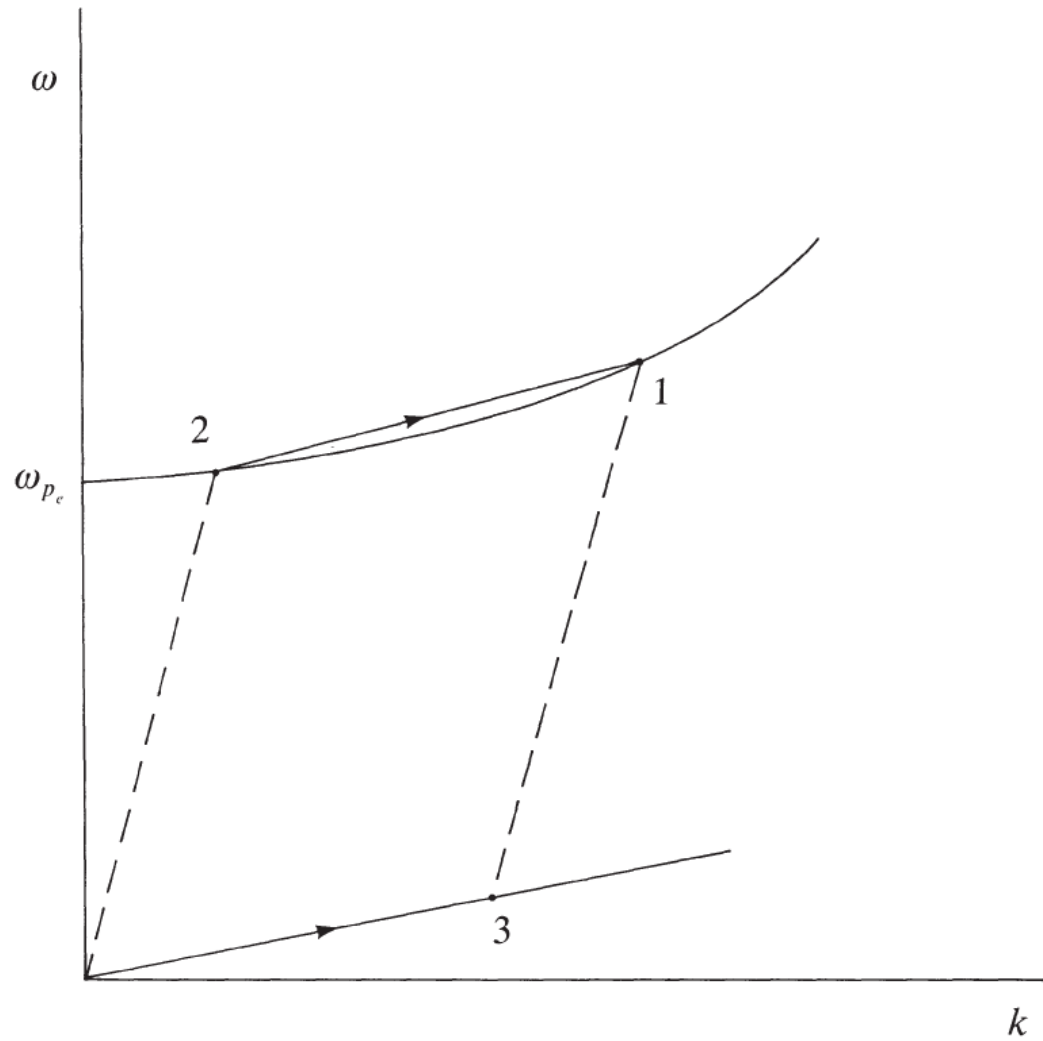


Figure 4.3. Resonant triad  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ .

É curioso que esse método mostra ser impossível  
haver acoplamento entre 3 ondas de Langmuir...

(não verifiquei)

No entanto, muitos outros acoplamentos podem  
existir.

Veremos apenas um deles.

(a) *Nonlinear Resonant Interactions Between Two Electromagnetic Waves and a Langmuir Wave*

$$\frac{\partial n}{\partial t} + N_0 \nabla \cdot \mathbf{V} = -\nabla \cdot (n\mathbf{V})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{e\mathbf{E}}{m} + \frac{V_T^2}{N_0} \nabla n = & -(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} - \frac{e}{mc} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \\ & + \frac{V_{Te}^2}{N_0} n \nabla n \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c \nabla \times \mathbf{B} - eN_0 \mathbf{V} = en\mathbf{V}$$

where  $N_0$  is the number density of electrons (or ions) in the unperturbed state, and  $V_{T_e}$  is the thermal speed of electrons. Note that whereas the left hand sides in equations (33)–(36) represent the linearized problem, the right hand sides represent the nonlinear effects.

Let us now consider waves propagating in the  $x$ -direction. One may separate equations (33)–(36) into those governing the transverse modes:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{eE_y}{m} = \frac{e}{mc} v_x B_z - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (37)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} + c \frac{\partial B_z}{\partial x} - eN_0 v_y = env_y \quad (39)$$

and the equations governing the longitudinal modes:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + N_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} (nv_x) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{eE_x}{m} + \frac{V_T^2}{N_0} \frac{\partial n}{\partial x} = & - \frac{e}{mc} v_y B_z - v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ & + \frac{V_{T_e}^2}{N_0} n \frac{\partial n}{\partial x} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} - eN_0 v_x = env_x \quad (42)$$

where we have assumed that the polarization of the transverse modes is such that

$$E_z = B_y = v_z = 0.$$

We will use the method of coupled modes (Sjolund and Stenflo [14]) to treat this problem. Let us consider linearized transverse modes of the form  $\exp(-ik_T x)$  and introduce

$$a_T = v_y + \frac{i\omega_T}{eN_0} E_y + \frac{ik_T c}{eN_0} B_z \quad (43)$$

where,

$$\omega_T^2 \equiv \omega_p^2 + k_T^2 c^2$$

$$\omega_L^2 \equiv \omega_p^2 + k_L^2 V_{Te}^2, \quad \omega_p^2 = \frac{N_0 e^2}{m}$$

$k_L$  being the wave number of the Langmuir wave.

Using equations (37)–(39), one obtains

$$\frac{\partial a_T}{\partial t} = i\omega_T a_T \quad (a_T \text{ is a normal mode})$$

Similarly, let us consider linearized longitudinal modes of the form  $\exp(-ik_L x)$ , and introduce

$$a_L = n + \frac{N_0 \omega_L}{k_L V_{Te}^2} v_x + \frac{ieN_0}{mk_L V_{Te}^2} E_x.$$

Using equations (40)–(42), one then obtains,

$$\frac{\partial a_L}{\partial t} = i\omega_L a_L \quad (\text{a normal mode})$$



Mantendo as não-linearidades:

$$\frac{\partial a_T}{\partial t} - i\omega_T a_T = \frac{e}{mc} v_x B_z - v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{i\omega_T}{N_0} n v_y$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_L}{\partial t} - i\omega_L a_L = & -\frac{\partial}{\partial x} (n v_x) - \frac{N_0 \omega_L}{k_L V_T^2} \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{e}{mc} v_y B_z \right. \\ & \left. - \frac{V_{T_e}^2}{N_0} n \frac{\partial n}{\partial x} \right) + \frac{ie^2 N_0}{mk_L^2 V_{T_e}^2} n v_x. \end{aligned}$$

Let us consider two transverse electromagnetic waves of the form  $\exp[-i(k_{T_0}x - \omega_{T_0}t)]$  and  $\exp[-i(k_{T_1}x - \omega_{T_1}t)]$  propagation in the  $x$ -direction, with

$$\omega_{T_0}^2 = \omega_p^2 + k_{T_0}^2 c^2$$

$$\omega_{T_1}^2 = \omega_p^2 + k_{T_1}^2 c^2.$$

Due to nonlinear resonant interaction between these two waves, let a Langmuir wave of the form  $\exp[-i(k_L x - \omega_L t)]$ , propagating in the  $x$ -direction, be excited such that

$$\omega_{T_0} - \omega_{T_1} = \omega_L, \quad k_{T_0} - k_{T_1} = k_L. \quad (50)$$

Now, one obtains for the linearized problem.

$$v_x = \frac{k_L V_T^2}{2\omega_L N_0} a_L, \quad n = \frac{k_L^2 V_{T_e}^2}{2\omega_L^2} a_L, \quad E_x = -\frac{iek_L V_{T_e}^2}{2\omega_L^2} a_L \quad (51)$$

$$a_L = a_L(t)e^{i(\omega_L t - k_L x)} + a_L^*(t)e^{-i(\omega_L t - k_L x)}$$

and

$$v_y = \frac{\omega_p^2}{2\omega_T^2} a_T, \quad E_y = -\frac{im}{e} \frac{\omega_p^2}{2\omega_T} a_T$$

$$B_z = -\frac{imk_T c}{e} \frac{\omega_p^2}{2\omega_T^2} a_T \quad (52)$$

$$a_T = a_T(t)e^{i(\omega_T t - k_T x)} + a_T^*(t)e^{-i(\omega_T t - k_T x)}$$

where  $a_L(t)$  and  $a_T(t)$  are slowly-varying functions of time, and the stars denote complex conjugates.

Using (51) and (52), equations (47) and (48) give, upon keeping only the resonant terms on their right-hand sides:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial a_{T_0}}{\partial t} - i\omega_{T_0} a_{T_0} &= \frac{ik_L^2 V_{T_e}^2 \omega_p^2 \omega_{T_0}}{4\omega_L^2 \omega_{T_1}^2 N_0} a_{T_1} a_L \\
 \frac{\partial a_{T_1}}{\partial t} - i\omega_{T_1} a_{T_1} &= \frac{ik_L^2 V_{T_e}^2 \omega_p^2 \omega_{T_1}}{4\omega_L^2 \omega_{T_0}^2 N_0} a_{T_0} a_L^* \\
 \frac{\partial a_L}{\partial t} - i\omega_L a_L &= \frac{iN_0 \omega_L \omega_p^4}{4\omega_{T_0}^2 \omega_{T_1}^2 V_{T_e}^2} a_{T_0} a_{T_1}^*.
 \end{aligned} \tag{53}$$

In terms of the electric field components  $E_y$  (or  $E_T$ ) and  $E_x$  (or  $E_L$ ), equation (53) becomes

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E_{T_0}}{\partial t} - i\omega_{T_0}E_{T_0} &= -\frac{k_L\omega_p^2}{2eN_0\omega_{T_1}} E_{T_1}E_L \\
 \frac{\partial E_{T_1}}{\partial t} - i\omega_{T_1}E_{T_1} &= \frac{k_L\omega_p^2}{2eN_0\omega_{T_0}} E_{T_0}E_L^* \\
 \frac{\partial E_L}{\partial t} - i\omega_L E_L &= \frac{k_L\omega_p^4}{2eN_0\omega_{T_0}\omega_{T_1}\omega_L} E_{T_0}E_{T_1}^*.
 \end{aligned} \tag{54}$$

One obtains from equation (54),

$$\frac{\partial}{\partial t} (|E_{T_0}|^2 + |E_{T_1}|^2 + |E_L|^2) = 0 \quad (55)$$

which implies conservation of the total wave energy density for the interacting waves.

Further, one obtains from equation (54),

$$-\frac{1}{\omega_{T_0}} \frac{\partial}{\partial t} |E_{T_0}|^2 = \frac{1}{\omega_{T_1}} \frac{\partial}{\partial t} |E_{T_1}|^2 = \frac{1}{\omega_L} \frac{\partial}{\partial t} |E_L|^2 \quad (56)$$

which are called Manley—Rowe [133] relations. The latter give the proportion of pump energy converted to each parametrically excited wave. Note that in equations (55) and (56),  $\partial/\partial t$  refers to the slow variations in time.

One also obtains from equation (54), for the slow variations in time,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 E_{T_0}}{\partial t^2} &= -\frac{k_L^2 \omega_p^4 E_{T_0}}{4e^2 N_0^2 \omega_{T_0} \omega_{T_1}} |E_L|^2 - \frac{k_L^2 \omega_p^6 E_{T_0}}{4e^2 N_0^2 \omega_{T_0} \omega_{T_1} \omega_L} |E_{T_1}|^2 \\
 \frac{\partial^2 E_{T_1}}{\partial t^2} &= -\frac{k_L^2 \omega_p^4 E_{T_1}}{4e^2 N_0^2 \omega_{T_0} \omega_{T_1}} |E_L|^2 + \frac{k_L^2 \omega_p^6 E_{T_1}}{4e^2 N_0^2 \omega_{T_0}^2 \omega_{T_1} \omega_L} |E_{T_0}|^2 \\
 \frac{\partial^2 E_L}{\partial t^2} &= -\frac{k_L^2 \omega_p^6 E_L}{4e^2 N_0^2 \omega_{T_0} \omega_{T_1} \omega_L} |E_{T_1}|^2 + \frac{k_L^2 \omega_p^6 E_L}{4e^2 N_0^2 \omega_L \omega_{T_0}^2 \omega_{T_1}} |E_{T_0}|^2
 \end{aligned} \tag{57}$$

which show the decay instability of the transverse electromagnetic wave  $(\omega_{T_0}, k_{T_0})$  into another transverse electromagnetic wave  $(\omega_{T_1}, k_{T_1})$  and a Langmuir wave  $(\omega_L, k_L)$ .

If one assumes that

$$|E_{T_0}| \gg |E_{T_1}|, |E_L|$$

then  $E_{T_0}$  can be taken to be constant. If further,

$$E_{T_1}, E_L \sim e^{\gamma t}$$

one obtains:

$$\gamma = \frac{k_L \omega_p^3}{2eN_0 \omega_{T_0} \sqrt{\omega_{T_1} \omega_L}} |E_{T_0}|.$$

Outros casos belamente discutidos pelo Shivamoggi:

- (b) *Nonlinear Resonant Interactions Between Two Transverse Electromagnetic Waves and an Ion-Acoustic Wave*
- (c) *Nonlinear Resonant Interactions Between Two Circularly-Polarized Waves and a Langmuir Wave*
- (d) *Nonlinear Resonant Interactions Between Three Extraordinary Waves*



*(e) Stimulated Wave-Scattering Phenomena*



One of the consequences of the interaction of an incident (pump) electromagnetic wave with a plasma is the parametric excitation of two plasma waves. If the latter are both purely electrostatic, they are eventually absorbed in the plasma and this decay process then leads to enhanced (or anomalous) absorption of the incident electromagnetic wave. If one of the excited plasma waves is electromagnetic, it can escape from the plasma and show up as enhanced (or stimulated) scattering of the incident electromagnetic wave. The latter process can be of two types according as the other excited plasma wave (stimulated Raman scattering) or an ion-acoustic wave (stimulated Brillouin scattering), (Bornatici [33], Shivamoggi [34]).

*(f) Oscillating Two-Stream Instability*

*(g) The Question of the Time-Dependent Ponderomotive Force*

Esse assunto é inesgotável...

# SOLITONS

- Um excelente livro, que será seguido:  
M. J. Ablowitz, *Nonlinear Dispersive Waves, Asymptotic Analysis and Solitons*
- Anteriormente, deduzimos algumas EDPs
- Para começar a ver solitons com mais detalhe, é interessante resolver alguns exercícios básicos, retirados do livro.

## Exercises

- 1.1 Following the methods described in this chapter, derive a generalized KdV equation from the FPU problem when the spring force law is given by

$$F(\Delta) = -k(\Delta + \alpha\Delta^3),$$

where  $\Delta$  is the displacement between masses and  $k, \alpha$  are constants.

- 1.2 Given the modified KdV (mKdV) equation

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0,$$

reduce the problem to an ODE by investigating traveling wave solutions of the form:  $u = U(x - ct)$ .

- (a) Express the bounded periodic solution in terms of Jacobi elliptic functions.  
(b) Find all bounded solitary wave solutions.
- 1.3 Consider the sine-Gordon (SG) equation given by

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0.$$

- (a) Use the transformation  $u = U(x - ct)$ , where  $c$  is a constant, to reduce the SG equation to a second-order ODE.  
(b) Find a first-order ODE by integrating once.

- (c) Make the transformation  $U = 2 \tan^{-1} w$  (inverse tan function), and solve the equation for  $w$  to find all bounded, real periodic solutions for  $w$  and therefore  $U$ . Express the solution in terms of Jacobi elliptic functions. (Hint: See Chapter 4.)
- (d) Use the above to find all bounded wave solutions  $U$  that tend to zero at  $-\infty$  and  $2\pi$  at  $+\infty$ . These are called kink solutions; they turn out to be solitons.

1.4 Consider the KdV equation

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

- (a) Make the transformation  $x \rightarrow k^l x, t \rightarrow k^m t, u \rightarrow k^n u, k \neq 0$ , and find  $l, m, n$  so that the KdV equation is invariant under the transformation.
- (b) Make the transformation  $u = t^{-2/3} f(v), v = xt^{-1/3}, f = 2(\log F)''$ . Find an equation for the similarity solution  $f$  and an equation for  $F$ ; then obtain a rational solution to the KdV equation. (See Section 3.2 for a discussion of self-similar/similarity solutions.)

1.5 Find the bounded traveling wave solution to the generalized KdV

$$u_t + (n+1)(n+2)u^n u_x + u_{xxx} = 0$$

where  $n = 1, 2, \dots$

1.6 Consider the modified KdV (mKdV) equation

$$u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0.$$

- (a) Make the transformation  $x \rightarrow a^l x$ ,  $t \rightarrow a^m t$ ,  $u \rightarrow a^n u$  and find  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , so that the equation is invariant under the transformation.
- (b) Introduce  $u(x, t) = (3t)^{-1/3} f(\xi)$ ,  $\xi = x(3t)^{-1/3}$  to reduce the mKdV equation to the following ODE

$$f'' = \xi f + 2f^3 + \alpha$$

where  $\alpha$  is constant. The equation for  $f$  is called the second Painlevé equation, cf. Ablowitz and Segur (1981).

1.7 Show that a solitary wave solution of the Boussinesq equation,

$$u_{tt} - u_{xx} + 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0,$$

is  $u(x, t) = a \operatorname{sech}^2[b(x - ct) + d]$ , for suitable relations between the constants  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , and  $d$ . Verify that the Boussinesq solitary wave can propagate in either direction.

1.8 Find the bounded traveling wave solution to the equation

$$u_{tt} = u_{xx} + u_x u_{xx} + u_{xxx}.$$

Hint: Set  $\xi = x - ct$ , integrate twice with respect to  $\xi$ , and use  $u_\xi = q(u)$  to solve the resulting equation.

- 1.9 Consider the sine–Gordon equation

$$u_{xx} - u_{tt} = \sin u.$$

- (a) Using the transformation  $\chi = \gamma(x - vt)$ ,  $\tau = \gamma(t - vx)$  write the equation in terms of the new coordinates  $\chi, \tau$ ; find  $\gamma$  in terms of  $v$ ,  $-1 < v < 1$  so that the equation is invariant under the transformation.
- (b) Consider the transformation  $\xi = (x + t)/2$ ,  $\eta = (x - t)/2$ . Find the equation in terms of the new coordinates  $\xi, \eta$ . Show that this equation has a self-similar solution of the form  $u(\xi, \eta) = f(z)$ ,  $z = \xi\eta$ . Then find an equation for  $w = \exp(if)$ . The equation for  $w$  is related to the third Painlevé equation, cf. Ablowitz and Segur (1981). (See Section 3.2 for a discussion of self-similar/similarity solutions.)

- 1.10 Seek a similarity solution of the Klein–Gordon equation,

$$u_{tt} - u_{xx} = u^3,$$

in the form  $u(x, t) = t^m f(xt^n)$  for suitable values of  $m$  and  $n$ . Show that  $f(z)$ ,  $z = x/t$  satisfies the equation  $(z^2 - 1)f'' + 4zf' + 2f = f^3$ . (See Section 3.2 for a discussion of self-similar/similarity solutions.)