Solução Teste 3

Questão 1: Resolva o PVI

$$y' = t(y+1) \qquad com \quad y(1) = 0.$$

de duas formas distintas:
(a) Usando o método de Euler para t no intervalo [1,2] com $h = 0, 2$.
(b) Usando o método das aproximações sucessivas , calcule $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ iniciando por $\phi_0(t) = 0$.

Solução:

(a) Solução aproximada pelo método de Euler:

Neste caso: $f(t, y) = t \cdot (y+1)$ e

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot t_i \cdot (1 + y_i) \qquad i = 0, 1, 2, 3, .., n.$$

> $restart : with(DEtools) : with(plots) :$

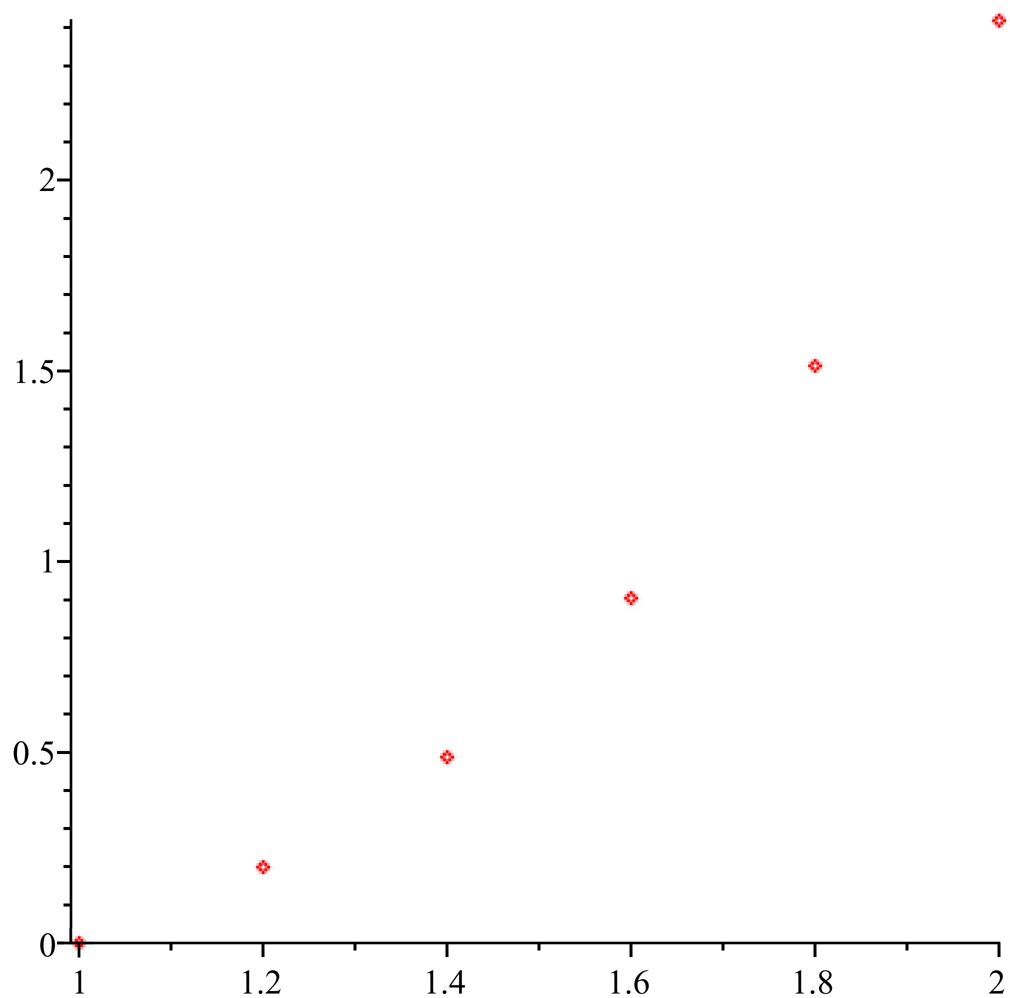
> $h := 0.2;$
$t := array([1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0]);$
$y[1] := 0;$

$$h := 0.2$$
$$t := \begin{bmatrix} 1 & 1.2 & 1.4 & 1.6 & 1.8 & 2.0 \end{bmatrix}$$
$$y_1 := 0 \tag{1}$$

> **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 5 **do** $y[i+1] := y\ [i] + h \cdot t[i] \cdot (1 + y[i])$ **end do**

$$y_2 := 0.2$$
$$y_3 := 0.488$$
$$y_4 := 0.90464$$
$$y_5 := 1.5141248$$
$$y_6 := 2.419209728 \tag{2}$$

> $p2 := plot(\langle\langle t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\rangle | \langle y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\rangle\rangle, style = point) :$
$display(\{p2\});$



>

(b) Antes de utilizar o método de aproximações sucessivas precisamos colocar a condição inicial na origem do (novo) sistema de coordemadas. Para isso, fazemos a transformação:

$u = y \quad e \quad x = t - 1.$

Assim o PVI se transforma em :

$u' = (x+1) \cdot (u+1)$

Agora sim, podemos aplicar o método das aproximações sucessivas:

```
> restart : with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :
>
> phi[0] := x→0;
```

$$\phi_0 := x \rightarrow 0 \tag{3}$$

```
> phi[1] := x→int((s+1)·(phi[0](s)+1), s=0..x);
  phi[1](x);
```

$$\phi_1 := x \to \int_0^x (s+1)\left(\phi_0(s)+1\right)\,\mathrm{d}s$$

$$\frac{1}{2}x^2 + x \qquad \textbf{(4)}$$

```
> phi[2] := x→int((s+1)·(phi[1](s)+1), s=0..x);
  phi[2](x);
```

$$\phi_2 := x \to \int_0^x (s+1)\left(\phi_1(s)+1\right)\,\mathrm{d}s$$

$$x + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 \qquad \textbf{(5)}$$

\>

Trocando x *por* $t-1$ obtemos $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$.

****
****

Questão 2: Resolva o PVI

$$y'' - y' + 2y = 0 \quad com\ y(2) = -1 \quad e\ y(2) = 0.$$

****

<u>Solução:</u>

```
> restart : with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :
> dsolve({diff(y(t), t, t) - diff(y(t), t) + 2·y(t) = 0, y(2) = -1, D(y)(2) = 0});
```

$$y(t) = -\frac{1}{7}\,\frac{\left(-\cos(\sqrt{7}) + \sin(\sqrt{7})\sqrt{7}\right)\sqrt{7}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right)}{\mathrm{e}\left(\cos(\sqrt{7})^2 + \sin(\sqrt{7})^2\right)} - \frac{1}{7}\,\frac{\sqrt{7}\left(\sin(\sqrt{7}) + \cos(\sqrt{7})\sqrt{7}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right)}{\mathrm{e}\left(\cos(\sqrt{7})^2 + \sin(\sqrt{7})^2\right)} \qquad \textbf{(6)}$$

\>

\>

Esse exercício era mais difícil, pois as raízes da equação característica são complexas e dadas pela solução da equação:

```
> solve(r^2 - r + 2, r);
```

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{7},\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{7} \qquad \textbf{(7)}$$

\>

Para todos que determinaram as raízes da equação característica certa terão o crédito pela questão. Esta questão será bem entendida a partir da próxima aula.