3.4 Raízes Repetidas; Redução de Ordem (Boyce 9 ed.)

Considere a equação diferencial

$$y'' + ay' + b\,y = 0. \qquad (1)$$

Sabemos que esta equação admite soluções da forma $y = e^{rt}$. A partir disso obtemos a equação característica:

$$r^2 + ar + b = 0. \qquad (2)$$

Aqui vamos considerar o caso em que as raízes da equção (2) são reais e repetidas, isto é: $r_1 = r_2$. Usando a fórmula de Baskara obtemos:

$$r_{1,2} = -\frac{a}{2}.$$

Assim temos somente: $y_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t}$ como solução da equação diferencial. Como o conjunto fundamental precisa ter duas soluções fundamentais, devemos procurar outra solução para a ED.

Procuramos uma solução $y_2(t)$ que seja linearmente independente de $y_1(t)$, ou seja,

$$y_2(t) = v(t)y_1(t). \qquad (3)$$

Como a solução $y_2(t)$ deve satisfazer a equação diferencial, substituimos (3) em (1) para ver o que acontece:

$$y_2'' + ay_2' + b\,y_2 = 0$$

$$\left(v(t)y_1(t)\right)'' + a\left(v(t)y_1(t)\right)' + b\left(v(t)y_1(t)\right) = 0$$

$$\left(v''y_1 + 2\,v'\,y'_1 + vy''_1\right) + a\left(v'y_1 + vy'_1\right) + b\,v\,y_1 = 0$$

$$v''y_1 + v'\left(2\,y'_1 + a\,y_1\right) + v\left(y''_1 + ay'_1 + b\,y_1\right) = 0. \qquad (4)$$

Como y_1 satisfaz a equação diferencial então o termo que multipliva v na equação (4)

$$y''_1 + ay'_1 + b\,y_1 = 0.$$

Portanto, a equação (4) pode ser reescrita como:

$$v''y_1 + v'\left(2\,y'_1 + a\,y_1\right) = 0. \qquad (5)$$

Sabendo que $y_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t}$ então substituindo este resultado na equação acima obtemos:

$$v''\, e^{-\frac{a}{2}t} + v'\left(2\left(-\frac{a}{2}\right)e^{-\frac{a}{2}t} + ae^{-\frac{a}{2}t}\right) = 0$$

implica que

$$v''\, e^{-\frac{a}{2}t} = 0,$$

ou seja,

$$v'' = 0.$$

Resolvendo a equação diferencial obtemos:

$$v(t) = c_1 t + c_2.$$

Como precisamo encontrar UMA função $y_2(t)$ que seja linearmente independente de $y_1(t)$, podemos escolher as contantes que quisermos, por exemplo, $c_1 = 1\ \ e\ \ c_2 = 0$.
Assim, a função procurada fica:

$$y_2(t) = t\, y_1(t) = t\, e^{-\frac{a}{2}t}.$$

Precisamos apenas verificar que a função encontrada é linearmente independente de $y_1(t)$. De fato,

$$det\, W = y_1\, y'_2 - y_2\, y'_1 = e^{-\frac{a}{2}t}\left(e^{-\frac{a}{2}t} + t\left(-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}t}\right)\right) - t\, e^{-\frac{a}{2}t}\left(-\frac{a}{2}e^{-\frac{a}{2}t}\right) = e^{-at},$$

que é diferente de zero. Portanto o conjunto $\{y_1(t), y_2(t)\}$ forma um conjunto fundamental de soluções e a solução geral da equação diferencial (1) fica:

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{a}{2}t} + C_2\, t\, e^{-\frac{a}{2}t}.$$

As constantes são encontradas quando aplicamos as condições iniciais do PVI.

<u>Observações importantes:</u>

1) A solução geral obtida para encontrar uma segunda solução linearmente independente da equação (1), vale também para uma EDOLH mais geral, ou seja, dada

$$y'' + p(t)y' + q(t)\, y = 0,$$

e conhecendo-se uma solução $y_1(t)$, podemos obter uma segunda solução $y_2(t) = v(t)y_1(t)$, resolvendo a equação

$$v''y_1 + v'\left(2\, y'_1 + p(t)y_1\right) = 0, \qquad (6)$$

que é idêntica à equação (5), apenas trocando a por $p(t)$. A equação (6) é uma equação que pode ser facilmente resolvida pelo seguinte procedimento:

(a) faz-se a mudança de variável $z(t) = v'(t)$. Isso torna a equação em:

$$z' y_1 + \left(2 y'_1 + p(t) y_1\right) z = 0, \qquad (7)$$

(b) A equação (7) é uma EDOL de primeira ordem e tambémm uma EDO de primeira ordem à variáveis separáveis e pode ser facilmente resolvida para $z(t)$.

(c) Depois de encontrar $z(t)$ retorna-se à variável original $v(t)$ integrando $z(t)$ com relação a t.

2) Este método para encontrar uma segunda solução de uma EDOL de segunda ordem apartir de uma solução conhecida é chamado de **método de D'Alembert**.

Exemplos:

1) Encontre a solução do PVI:

$$9\,y'' - 12\,y' + 4\,y = 0, \;\; com \;\; y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

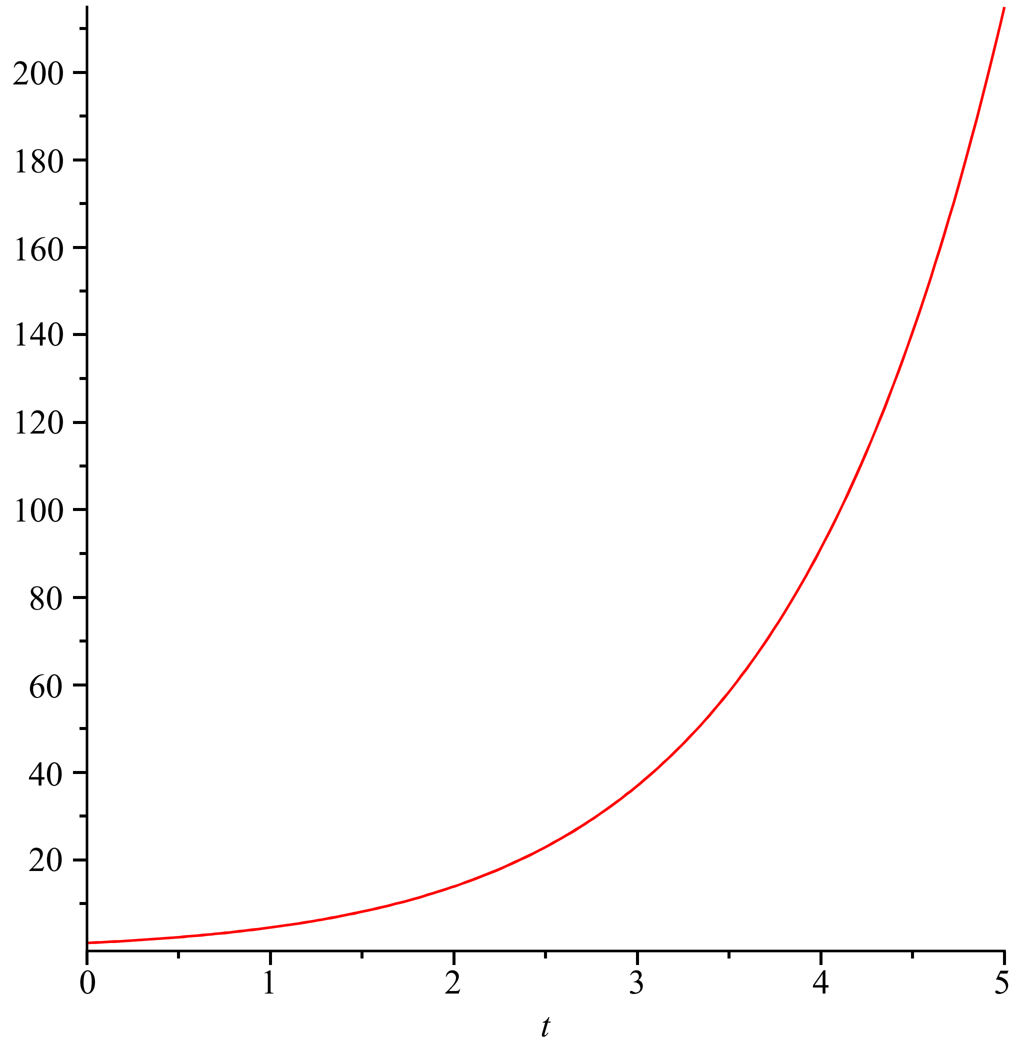
> $restart : with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :$

> $dsolve(\{9\cdot diff(y(t), t, t) - 12\cdot diff(y(t), t) + 4\cdot y(t) = 0, y(0) = 1., \mathrm{D}(y)(0) = 2\}) :$

$w[1] := t \to \mathrm{e}^{\frac{2}{3}t} + \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}t}\,t;$

$$w_1 := t \to \mathrm{e}^{\frac{2}{3}t} + \frac{4}{3}\,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}t}\,t \qquad \textbf{(1)}$$

> $plot\left(w_1(t), t = 0..5\right);$



>

Usando uma condição inicial diferente obtemos outras constantes e um gráfico também diferente:

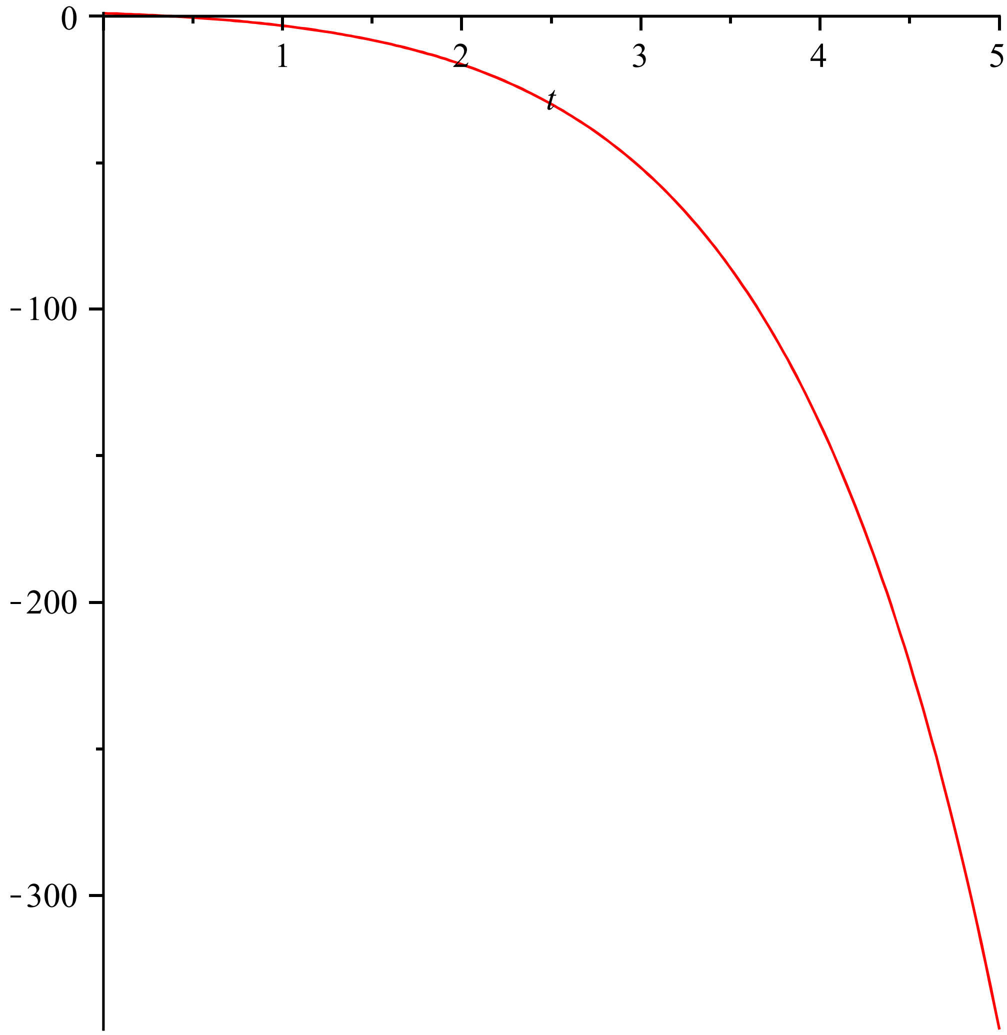
> $restart : with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :$

> $dsolve(\{9 \cdot diff(y(t), t, t) - 12 \cdot diff(y(t), t) + 4 \cdot y(t) = 0, y(0) = 1., D(y)(0) = -2\}) :$

$w[2] := t \rightarrow e^{\frac{2}{3}t} - \frac{8}{3} e^{\frac{2}{3}t} t;$

$$w_2 := t \rightarrow e^{\frac{2}{3}t} - \frac{8}{3} e^{\frac{2}{3}t} t \qquad \textbf{(2)}$$

> $plot(w_2(t), t = 0 ..5);$



2) Encontre a solução geral da equação diferencial:

$$t^2 y'' + 2\,t\,y' - 2\,y = 0, \qquad\qquad t > 0$$

sabendo que $y_1(t) = t$ é uma solução da equação diferencial.

Solução: Neste caso temos que reescrever a Ed na forma Normal:

$$y'' + \frac{2}{t}\,y' - \frac{2}{t^2}\,y = 0, \qquad\qquad t > 0,$$

assim $p(t) = \dfrac{2}{t}$ e $q(t) = -\dfrac{2}{t^2}$. Usando o fórmula (7) temos

$$z'\,t + \left(2 + \frac{2}{t}\,t\right) z = 0$$

$$t\,z' + 4\,z = 0$$

$$z' + \frac{4}{t} z = 0.$$

Usando variáves separáveis ou fator integrante obtemos,

> $dsolve\left(\left\{diff(z(t), t) + \frac{4}{t} \cdot z(t) = 0\right\}\right);$

$$\left\{z(t) = \frac{\_C1}{t^4}\right\} \tag{3}$$

>

Integrando $z(t)$ com relação a t, obtemos:

> $v := t \rightarrow int\left(\frac{C_1}{t^4}, t\right);$
> $v(t);$

$$v := t \rightarrow \int \frac{C_1}{t^4} \, \mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{3} \frac{C_1}{t^3} \tag{4}$$

>

Assim $y_2(t) = \frac{1}{t^3} t = \frac{1}{t^2}$.

Portanto a solução geral da equação diferencial é dada por:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 t + \frac{C_2}{t^2}.$$

****