3.3 Raizes Complexas da Equação Caracteristica (Boyce 9 ed.)

Considere a equação diferencial

$$y'' + ay' + b\,y = 0. \qquad (1)$$

Sabemos que esta equação admite soluções da forma $y = e^{rt}$. A partir disso obtemos a equação característica:

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Aqui vamos considerar o caso em que as raízes dessa equação são da forma:

$$r_1 = \alpha + i\,\beta \quad \text{e} \quad r_2 = \alpha - i\,\beta\,.$$

Dessa forma, a solução geral da equação diferencial fica escrita como:

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

onde definimos $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_2(t) = e^{r_2 t}$. Como esta solução é complexa e procuramos por soluções reais tentaremos escrever esta solução de maneira um pouco diferente.

Sabemos de Cálculo 1 que

$$e^t = \Sigma\ \frac{t^n}{n!},\ n = 0\,..\,\infty\ e\ \ -\infty < t < \infty$$

Para o caso de uma exponencial complexa teremos:

$$e^{it} = \Sigma\ \frac{(it)^n}{n!},\ n = 0\,..\,\infty\ e\ \ -\infty < t < \infty$$

Abrindo a exponecial teremos:

$$e^{it} = 1 + it + \frac{i^2 t^2}{2!} + \frac{i^3 t^3}{3!} + \frac{i^4 t^4}{4!} + \frac{i^5 t^5}{5!} + \frac{i^6 t^6}{6!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots\right)$$

$$= \cos t + i\,sen\,t$$

A última fórmula é conhecida como fórmula de Euler e iremos usá-la para derivar outros resultados. A partir da fórmula de Euler podemos obter:

.

$$e^{-it} = \cos t - i\,sen\,t$$

Agora,

$e^{r_1 t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + i\, sen\,\beta t\right)$ e

$e^{r_2 t} = e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t}\left(\cos\beta\, t - i\, sen\,\beta t\right).$

Obs.: As regras de derivação continuam valendo para exponenciais complexas. Note também que a solução da equação diferencial continua sendo complexa, mas já temos uma formatação da solução mais próxima de uma solução real.

Um fato importante a ser destacado é que o conjunto $\left\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\right\}$ forma um conjunto fundamental de soluções pois:

$$det\, W = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix}$$

$$= r_2 e^{r_2 t} e^{r_1 t} - r_1 e^{r_1 t} e^{r_2 t} = \left(r_2 - r_1\right) e^{\left(r_2 + r_1\right)t} = -2\, i\, \beta\, e^{\alpha t}.$$

que é diferente de zero para qualquer valor de α e β dado que este último deve ser diferente de zero pois as raízes são complexas. Isso diz que o conjunto $\{y_1(t), y_2(t)\}$ forma um conjunto fundamental de soluções (complexo).

Queremos agora encontrar um conjunto fundamental formado por funções reais. Para isso, faremos uso do **<u>Princípio da Superposição de Soluções</u>** que diz que a combinação linear de duas soluções de uma ED, também é solução. Assim, podemos fazer, por exemplo, as seguintes combinações:

$$y_1(t) + y_2(t) = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + i\, sen\,\beta t\right) + e^{\alpha t}\left(\cos\beta t - i\, sen\,\beta t\right) = 2\, e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$y_1(t) - y_2(t) = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + i\, sen\,\beta t\right) - e^{\alpha t}\left(\cos\beta t - i\, sen\,\beta t\right) = 2\, i\, e^{\alpha t}\, sen\,\beta t$$

A partir dessa combinação obtemos duas soluções reais

$$z_1(t) = \frac{\left(y_1(t) + y_2(t)\right)}{2} = e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$z_2(t) = \frac{\left(y_1(t) - y_2(t)\right)}{2\, i} = e^{\alpha t}\, sen\,\beta t.$$

Resta saber se o conjunto $\{z_1(t), z_2(t)\}$ forma um conjunto fundamental de soluções para a ED. Para saber isso, computamos o determinante do wronskiano, que é dado por:

$$\det W = e^{\alpha t}\cos\beta t\left(\alpha e^{\alpha t}\,sen\,\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t\right) - e^{\alpha t}\,sen\,\beta t\left(\alpha e^{\alpha t}\cos\beta t - \beta e^{\alpha t}\,sen\,\beta t\right)$$

$$= e^{2\alpha t}\cos\beta t\left(\alpha\,sen\,\beta t + \beta\cos\beta t\right) - e^{2\alpha t}\,sen\,\beta t\left(\alpha\cos\beta t - \beta\,sen\,\beta t\right)$$

$$= e^{2\alpha t}\left(\alpha\cos\beta t\,sen\,\beta t + \beta\cos^2\beta t - \alpha\,sen\,\beta t\cos\beta t + \beta\,sen^2\beta t\right)$$

$$= e^{2\alpha t}\,\beta\left(\cos^2\beta t + sen^2\beta t\right)$$

$$= e^{2\alpha t}\,\beta.$$

que é sempre diferente de zero, pois β é diferente de zero.

Dessa forma temos que o conjunto $\{z_1(t), z_2(t)\}$ é um conjunto fundamental de soluções da ED, pois são linearmente independentes e são combinações lineares de $\{y_1(t), y_2(t)\}$.

Portanto, a solução geral da equação diferencial (1), para o caso em que as raízes da equação característica da são complexos é dada por:

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(C_1\cos\beta t + C_2\,sen\,\beta t\right).$$

O comportamento da solução da equação diferencial vai se comportar de acordo com os valores de α e β, mas não vai fugir de um dos casos a seguir:

Caso 1: $\alpha = 0$.

Neste caso, as raízes serão puramente imaginárias e a solução permanece oscilando com amplitude constante para qualquer tempo t..

Exemplo 1: Encontre a solução do PVI

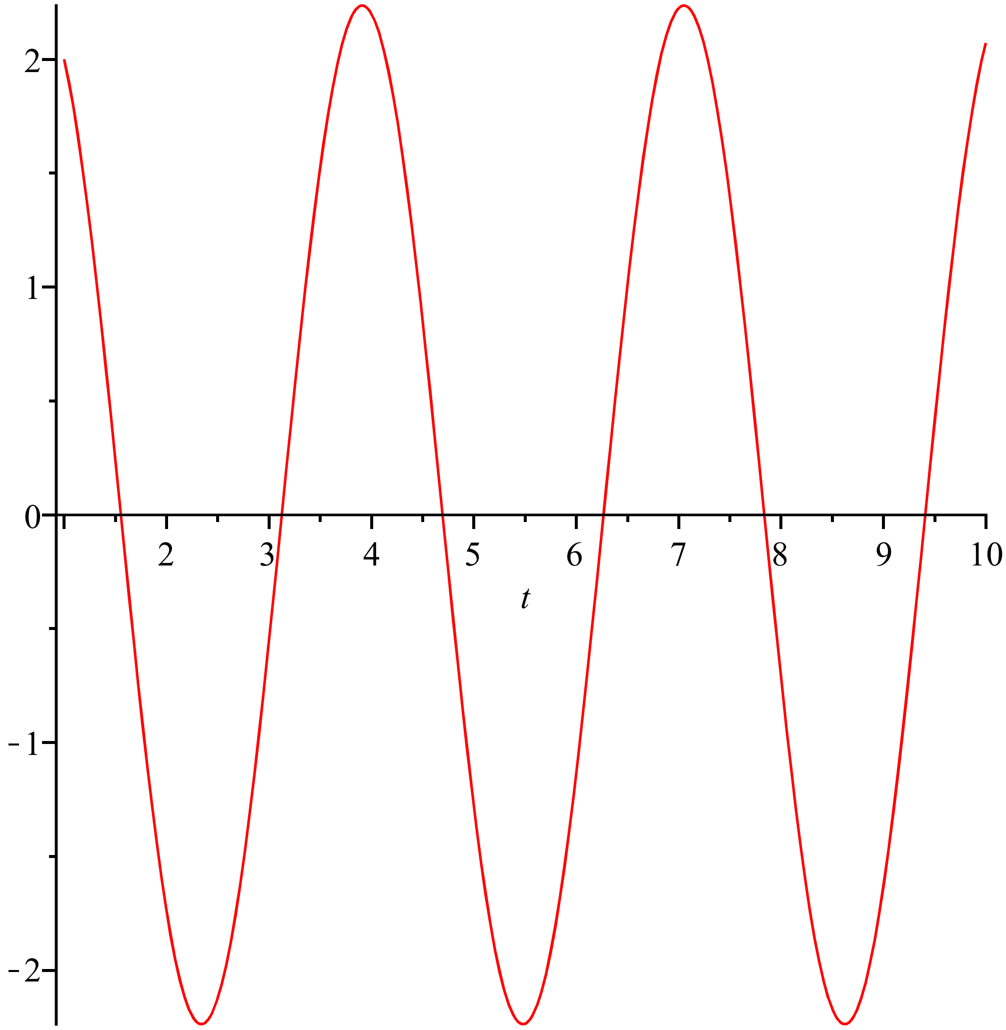
$$y'' + 4y = 0 \qquad com\ \ y(1) = 2 \quad e \quad y'(1) = -2.$$

```
> restart : with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :
> dsolve({diff(y(t), t, t) + 4·y(t) = 0, y(1) = 2., D(y)(1.) = -2.}) :
```

$$w := t \to -\frac{(-2\sin(2)+\cos(2))\sin(2t)}{\sin(2)^2+\cos(2)^2} + \frac{(2\cos(2)+\sin(2))\cos(2t)}{\sin(2)^2+\cos(2)^2};$$

$$w := t \to -\frac{(-2\sin(2)+\cos(2))\sin(2t)}{\sin(2)^2+\cos(2)^2} + \frac{(2\cos(2)+\sin(2))\cos(2t)}{\sin(2)^2+\cos(2)^2} \qquad \textbf{(1)}$$

```
> plot(w(t), t = 1..10);
```



>

Caso 2: $\alpha \underline{<} 0$.

Neste caso, a solução vai oscilar e a amplitude da solução vai diminuir a medida que o tempo passa.

Exemplo 1: Encontre a solução do PVI

$$y'' + y' + 2\,y = 0 \qquad com\ \ y(1) = 2 \quad e \quad y'(1) = -2.$$

> $restart : with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :$

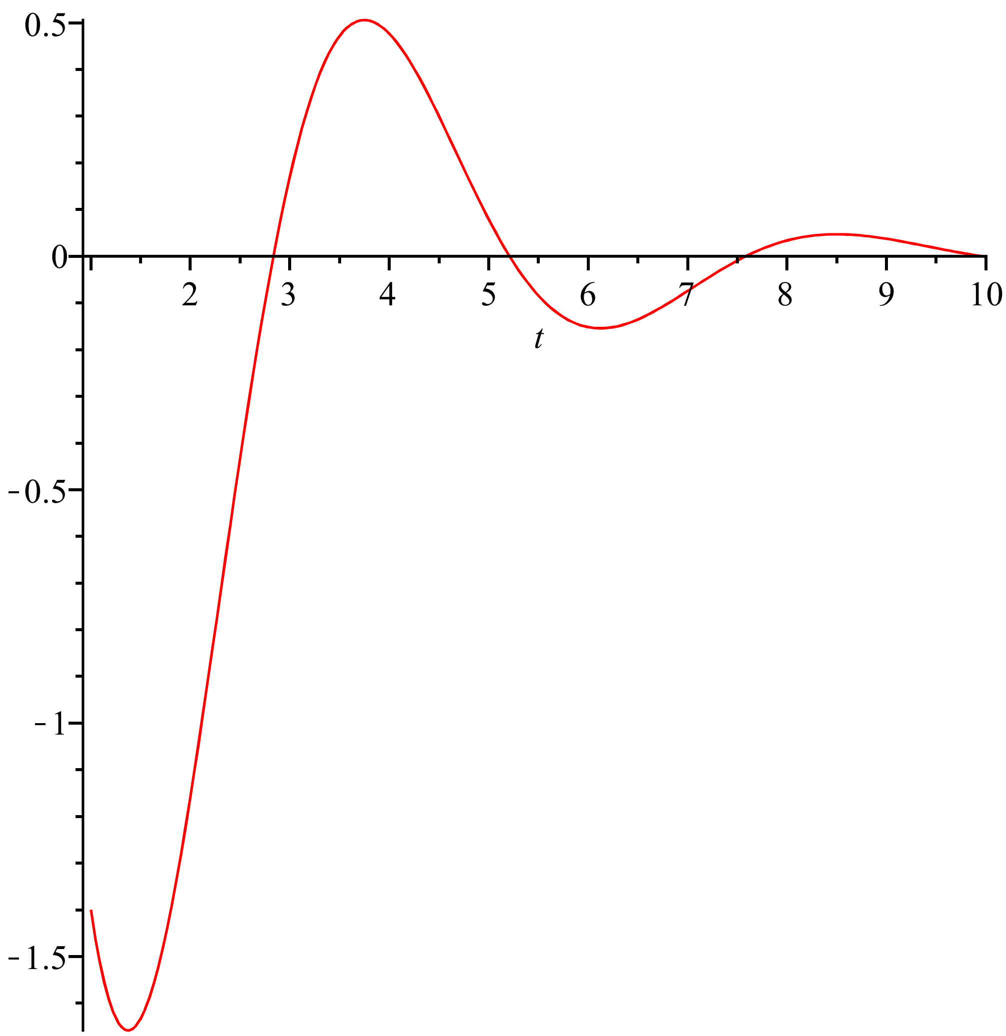
> $dsolve(\{diff(y(t), t, t) + diff(y(t), t) + 2\cdot y(t) = 0, y(1) = 2., \mathrm{D}(y)(1.) = -2.\}) :$

$$w := t \rightarrow -\frac{2}{7}\,\frac{\left(-\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)\sqrt{7}\right)\sqrt{7}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right)}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2 + \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2\right)}$$

$$+\frac{2}{7}\frac{\sqrt{7}\left(\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)+\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)\sqrt{7}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right)}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2+\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2\right)}$$

$$w:=t\to-\frac{2}{7}\frac{\left(-\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)+\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)\sqrt{7}\right)\sqrt{7}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right)}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2+\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2\right)}+\frac{2}{7}\frac{\sqrt{7}\left(\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)+\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)\sqrt{7}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right)}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2+\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2\right)} \quad \textbf{(2)}$$

> $plot(w(t), t=1..10);$



>

Caso 3: $\alpha > 0$.

Neste caso, a solução vai oscilar e a amplitude da solução vai aumentar a medida que o tempo passa.

Exemplo 1: Encontre a solução do PVI

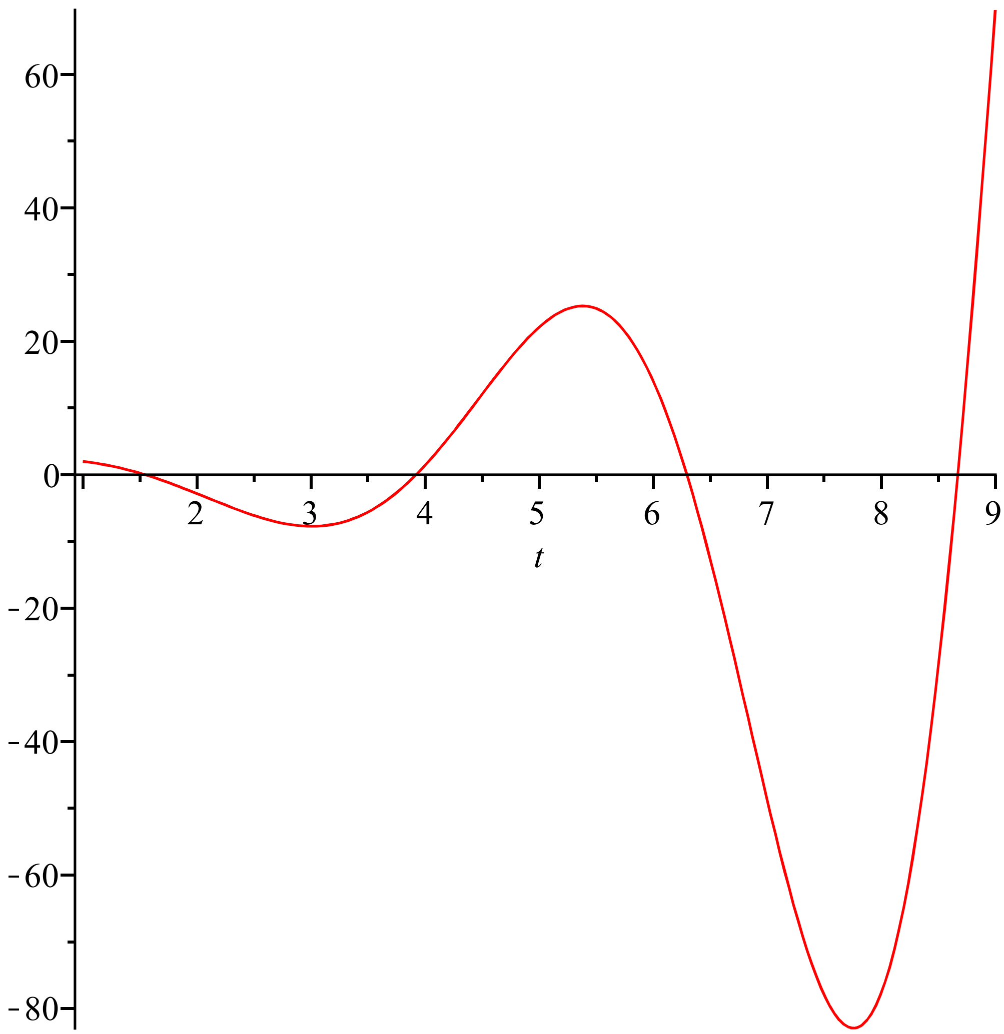
$$y'' - y' + 2\,y = 0 \qquad com\ \ y(1) = 2 \quad e \quad y'(1) = -2.$$

```
> restart : with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :
> dsolve( {diff(y(t), t, t) - diff(y(t), t) + 2·y(t) = 0, y(1) = 2., D(y)(1.) = -2.}) :
```

$$w := t \to -\frac{2}{7}\,\frac{\left(3\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)\sqrt{7}\right)\sqrt{7}\,e^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right)}{e^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2 + \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2\right)} + \frac{2}{7}\,\frac{\sqrt{7}\left(3\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)\sqrt{7}\right)e^{\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right)}{e^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2 + \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2\right)}$$

$$w := t \to -\frac{2}{7}\,\frac{\left(3\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)\sqrt{7}\right)\sqrt{7}\,e^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right)}{e^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2 + \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2\right)} + \frac{2}{7}\,\frac{\sqrt{7}\left(3\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)\sqrt{7}\right)e^{\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t\right)}{e^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2 + \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2\right)} \tag{3}$$


```
> plot(w(t), t = 1..9);
```


60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
2
3
4
5
6
7
8
9
t