2.7 Aproximações Númericas: Método de Euler

Considere o PVI

$$y' = f(t, y) \text{ com } y(t_0) = y_0.$$

Então para f(t,y) e df/dy contínuas a solução do PVI é única (de acordo com o Teorema 2.4.2).

Pergunta: Se não pudermos determinar analiticamente a solução da equação diferencial, então como podemos determinar uma aproximação para a solução do PVI?

A única coisa que conhecemos é a solução da equação diferencial no ponto (x_0, y_0) $e\, f'(x_0, y_0)$. Dessa forma usamos uma forma simples e conhecida para determinar uma aproximação da solução para diversos pontos no intervalo onde a solução da equação diferencial estiver definida (IMD). Assim, uma aproximação para a solução da ED em $t = t_1$ e $t_1 > t_0$ é dada por

$$y(t_1) = y_1 = y_0 + f\ (t_0, y_0)(t_1 - t_0)$$

Agora para determinar uma aproximação da solução em um tempo $t = t_2$ e $t_2 > t_1$ consideramos que a aproximação para a solução em $t = t_1$ é exata e usamos a mesma para computar uma segunda aproximação para a solução da ED e dada por:

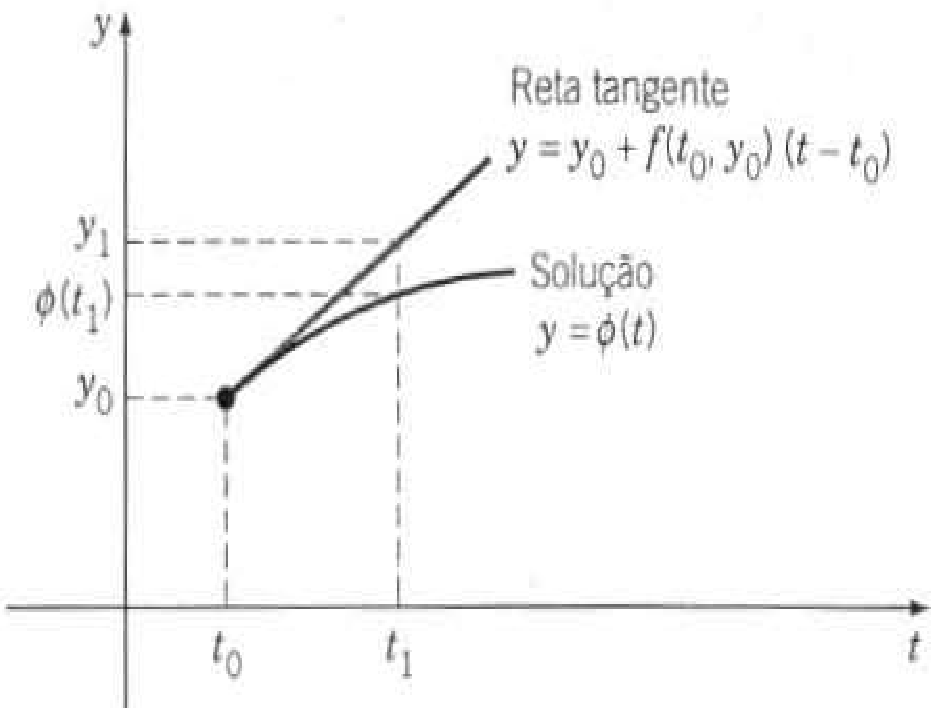
$$y(t_2) = y_2 = y_1 + f\ (t_1, y_1)(t_2 - t_1)$$

Assim podemos calcular várias aproximações para a solução da ED até onde a mesma estiver definida. De forma geral, podemos determinar a solução da equação diferencial para um tempo $t = t_i$ considerando que a aproximação calculada no tempo $t = t_{n-1}$ está correta,

$$y(t_i) = y_i = y_{i-1} + f\ (t_{i-1}, y_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Este método de aproximação da solução da equação diferencial pela reta tangete ao gráfico da solução é conhecido como **Método de Euler.** Este método nos dá um conjunto de pontos que (t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2), ..., (t_n, y_n) formam a solução para a equação diferencial no intervalo (t_0, t_n).

O gráfico abaixo mostra como foi realizada a primeira aproximação para a inicialização do método de Euler:



Podemos observar qur a solução no ponto $t = t_0$ é exata, mas para o ponto $t = t_1$ existe uma diferença entre o valor calculado y_1 e o valor exato $y(t_1)$. Essa diferença também existe para os pontos subsequentes $t_2, t_3, ..., t_n$. A aproximação da solução da equação diferencial vai ser tão melhor quanto menor for o erro em cada uma das aproximações. Normalmente, para facilitar os cálculos, utiliza-se o espaçamento temporal constante, ou seja, $h = t_i - t_{i-1}$.

Erro local x Erro global

Erro local: erro cometido (em valor absoluto) em cada aproximação pelo método de Euler. No tempo $t = t_i$ é o erro local é dado por $e_i = |y(t_i) - y_i|$ $i = 0, 1, 2,..., n$.
Erro global: a soma de todos os erros locais e_i $i = 0, 1, 2,..., n$.

Quanto maior o erro global mais distante estará a solução calculada da solução verdadeira da equação diferencial.

Exemplos:

Para fins de estudo e comparação, aplicaremos o método de Euler para equações diferenciais cuja solução é conhecida.

Exemplo 1 : Resolva o PVI abaixo usando um método visto em aula para resolução da ED e em seguida use o método de Euler para comparar as duas soluções:

$$y' = t + y \qquad \text{e} \qquad y(0) = 2.$$

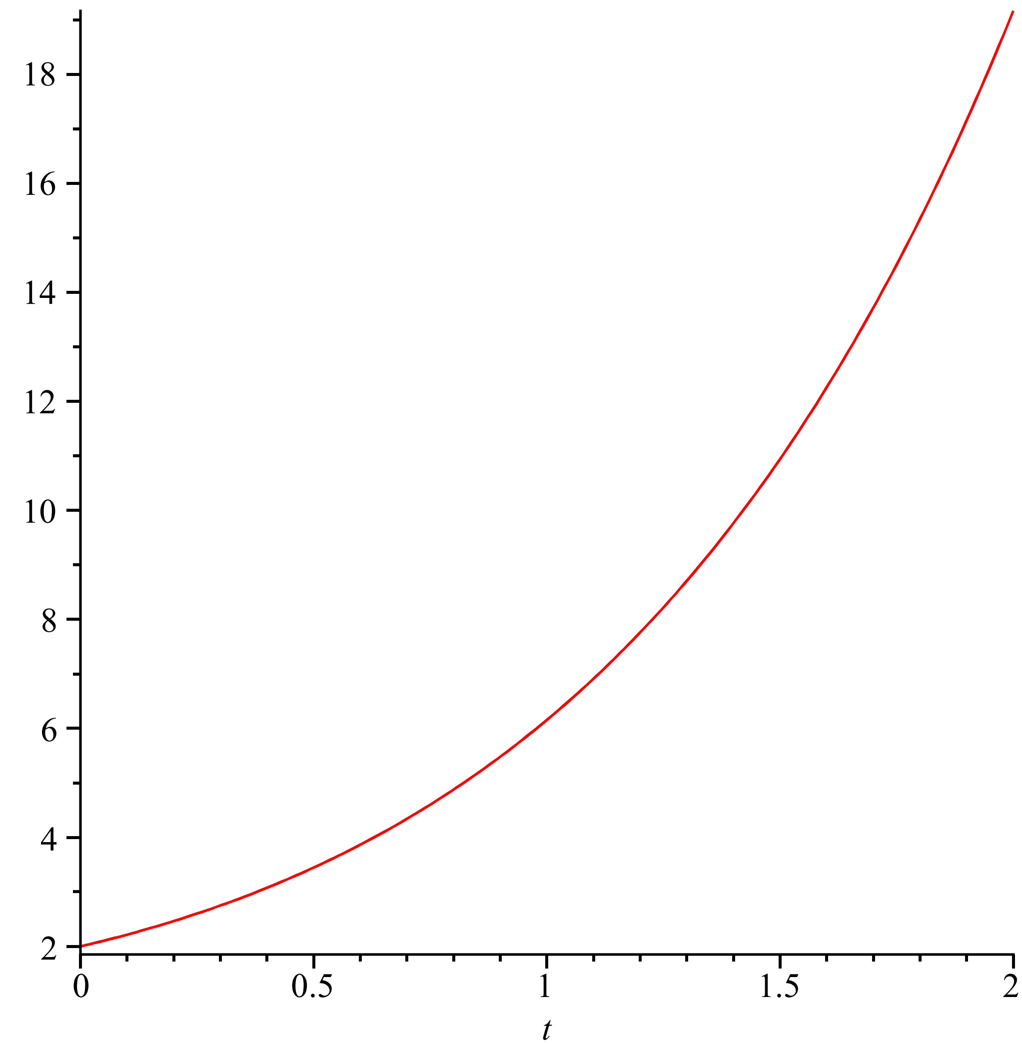
Solução Analítica:

```
> restart : with(DEtools) : with(plots) :
> dsolve({diff(y(t), t) = t + y(t), y(0) = 2});
  w := t → -1 - t + 3·exp(t);
```

$$y(t) = -1 - t + 3\,e^{t}$$

$$w := t \to -1 - t + 3\,e^{t} \qquad \textbf{(1)}$$

```
> plot(w(t), t = 0..2);
```




```
>
```

Solução aproximada pelo método de Euler:

Neste caso: f(t,y) = t +y e a forma geral do método de Euler fica:

$$y_i = y_{i-1} + \left(t_{i-1} + y_{i-1}\right)\left(t_i - t_{i-1}\right)$$

para simplificar os cálculos usaremos $h = t_i - t_{i-1}$. Assim,

$$y_i = y_{i-1} + h\,\left(t_{i-1} + y_{i-1}\right) \; i = 0, 1, 2, 3,.., n.$$

> $restart : with(DEtools) : with(plots) :$

> $h := 0.5;$
$t := array([0, 0.5, 1, 1.5, 2]);$
$y[1] := 2;$

$$h := 0.5$$

$$t := \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 & 1.5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 := 2$$

$$0 \tag{2}$$

> **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 4 **do** $y[i+1] := y\ [i] + h\cdot(t[i] + y[i])$ **end do**

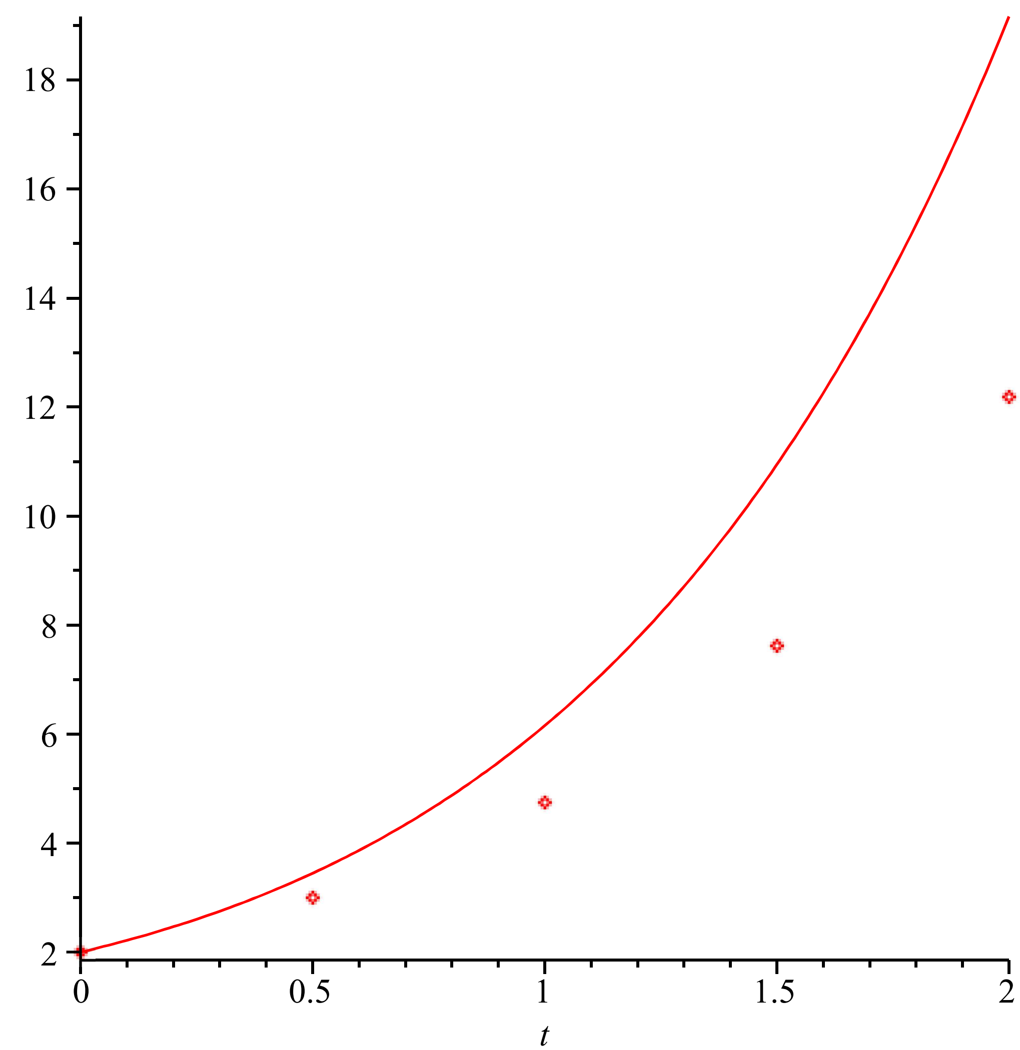
$$y_2 := 3.0$$

$$y_3 := 4.75$$

$$y_4 := 7.625$$

$$y_5 := 12.1875 \tag{3}$$

> $p1 := plot(w(t), t = 0..2) :$
$p2 := plot\left(\langle\langle t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\rangle | \langle y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\rangle\rangle, style = point\right) :$
$display(\{p1, p2\});$



>

Erro Local e Erro Global

> $e[1] := |evalf(subs(t=0.5, w(t))) - y[2]|;$
$e[2] := |evalf(subs(t=1, w(t))) - y[3]|;$
$e[3] := |evalf(subs(t=1.5, w(t))) - y[4]|;$
$e[4] := |evalf(subs(t=2, w(t))) - y[5]|;$

$$e_1 := 0.446163813$$
$$e_2 := 1.404845484$$
$$e_3 := 3.32006721$$
$$e_4 := 6.97966830 \quad \textbf{(4)}$$

>

Diminuindo h

> $restart : with(DEtools) : with(plots) :$

> $h := 0.125;$
$t := array([0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.825, 1, 1.125, 1.25, 1.375, 1.5, 1.625, 1.75, 1.875, 2]);$
$y[1] := 2;$

$$h := 0.125$$

$$t := [0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.825, 1, 1.125, 1.25, 1.375, 1.5, 1.625, 1.75, 1.875, 2]$$

$$y_1 := 2$$

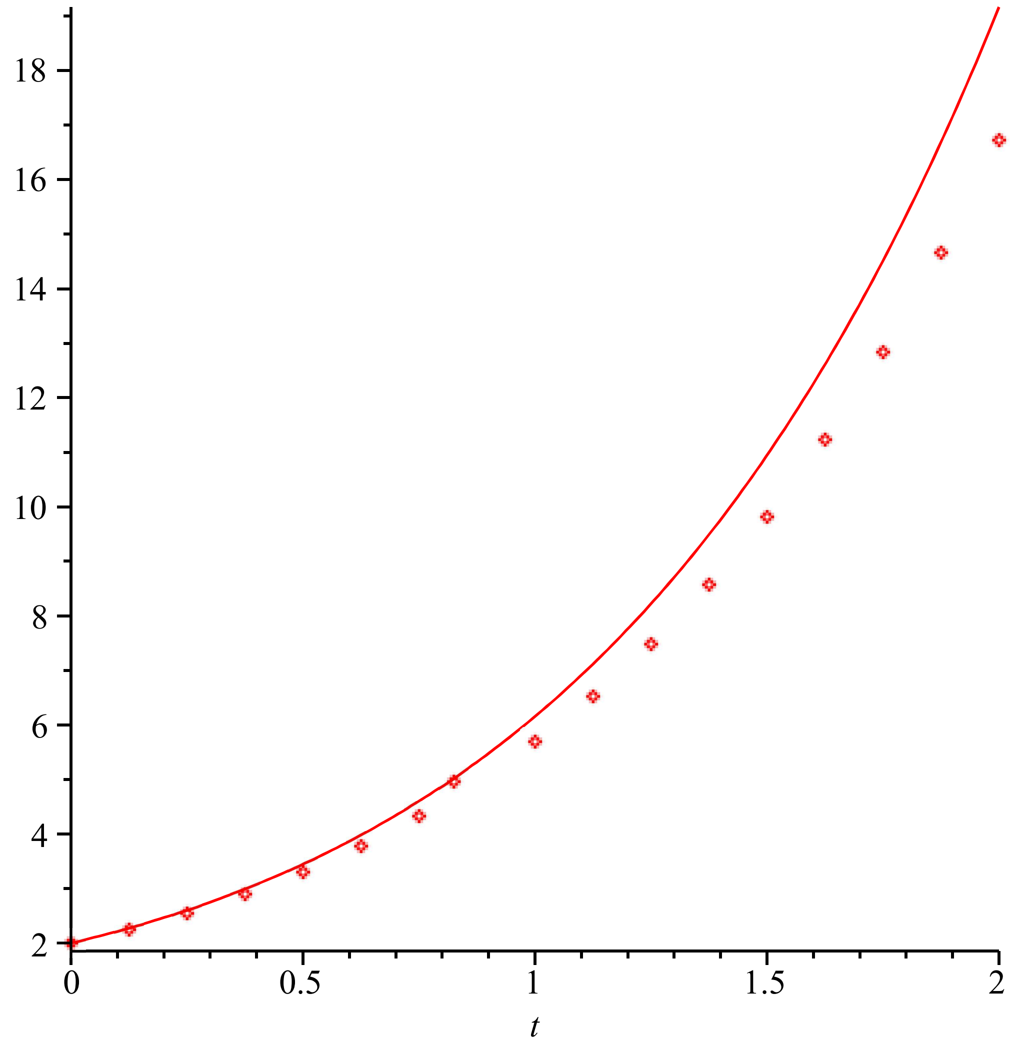
$$1.875 \tag{5}$$

> **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 16 **do** $y[i+1] := y\ [i] + h\cdot(t[i] + y[i])$ **end do**

$$y_2 := 2.250$$
$$y_3 := 2.546875$$
$$y_4 := 2.896484375$$
$$y_5 := 3.305419922$$
$$y_6 := 3.781097412$$
$$y_7 := 4.331859588$$
$$y_8 := 4.967092036$$
$$y_9 := 5.691103540$$
$$y_{10} := 6.527491482$$
$$y_{11} := 7.484052917$$
$$y_{12} := 8.575809532$$
$$y_{13} := 9.819660724$$
$$y_{14} := 11.23461831$$
$$y_{15} := 12.84207060$$
$$y_{16} := 14.66607942$$
$$y_{17} := 16.73371435 \tag{6}$$

> $w := t \rightarrow -1 - t + 3\cdot\exp(t);$
$p1 := plot(w(t), t = 0..2) :$
$p3 := plot\left(\langle\langle t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}, t_{16}, t_{17}\rangle | \langle y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{16}, y_{17}\rangle\rangle, style = point\right) :$
$display(\{p1, p3\});$

$$w := t \rightarrow -1 - t + 3\,\mathrm{e}^{t}$$



>

Exemplo 2: Boyce seção 2.7 exercicio 2

Resolva o PVI abaixo usando um método visto em aula para resolução da ED e em seguida use o método de Euler para comparar as duas soluções:

$$y' = 2\,y - 1 \qquad \text{e} \qquad y(0) = 1.$$

Solução Analítica

> $restart : with(DEtools) : with(plots) :$

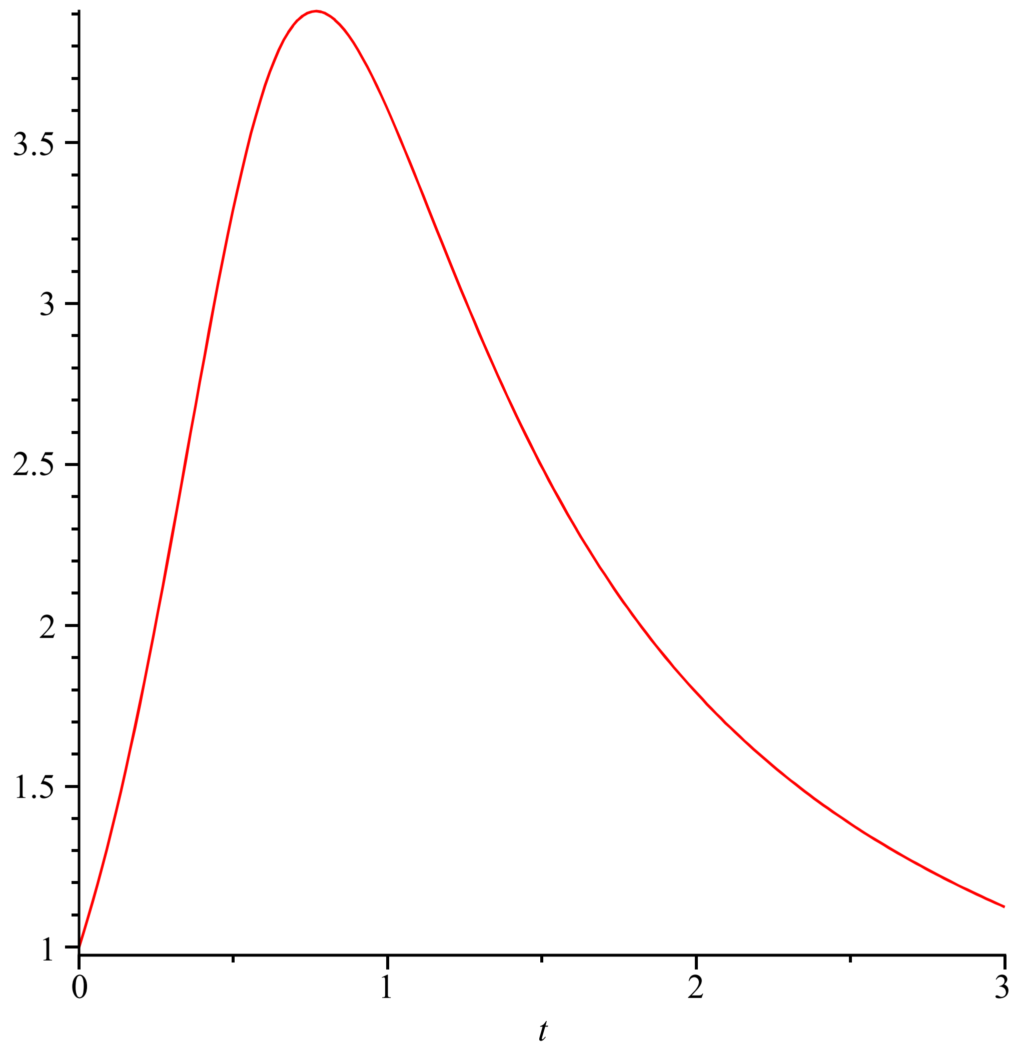
> $dsolve(\{diff(y(t), t) = y(t)\cdot(3 - t\cdot y(t)), y(0) = 1\});$

$w := t \rightarrow \dfrac{9}{-1 + 3\,t + 10\,\mathrm{e}^{-3\,t}};$

$plot(w(t), t = 0..3);$

$$y(t) = \frac{9}{-1 + 3\,t + 10\,\mathrm{e}^{-3\,t}}$$

$$w := t \to \frac{9}{-1 + 3\,t + 10\,\mathrm{e}^{-3\,t}}$$



>

Solução pelo método de Euler com h=0.5 para t no intervalo [0,3]

> $restart : with(DEtools) : with(plots) :$

> $h := 0.5;$
$t := array([0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3]);$
$y[1] := 1;$

$$h := 0.5$$

$$t := \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0.5 & 1 & 1.5 & 2 & 2.5 & 3 \end{array}\right]$$

$$y_1 := 1 \tag{7}$$

> **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 6 **do** $y[i+1] := y\ [i] + h\cdot(y[i]\cdot(3 - t[i]\cdot y[i]))$ **end do**

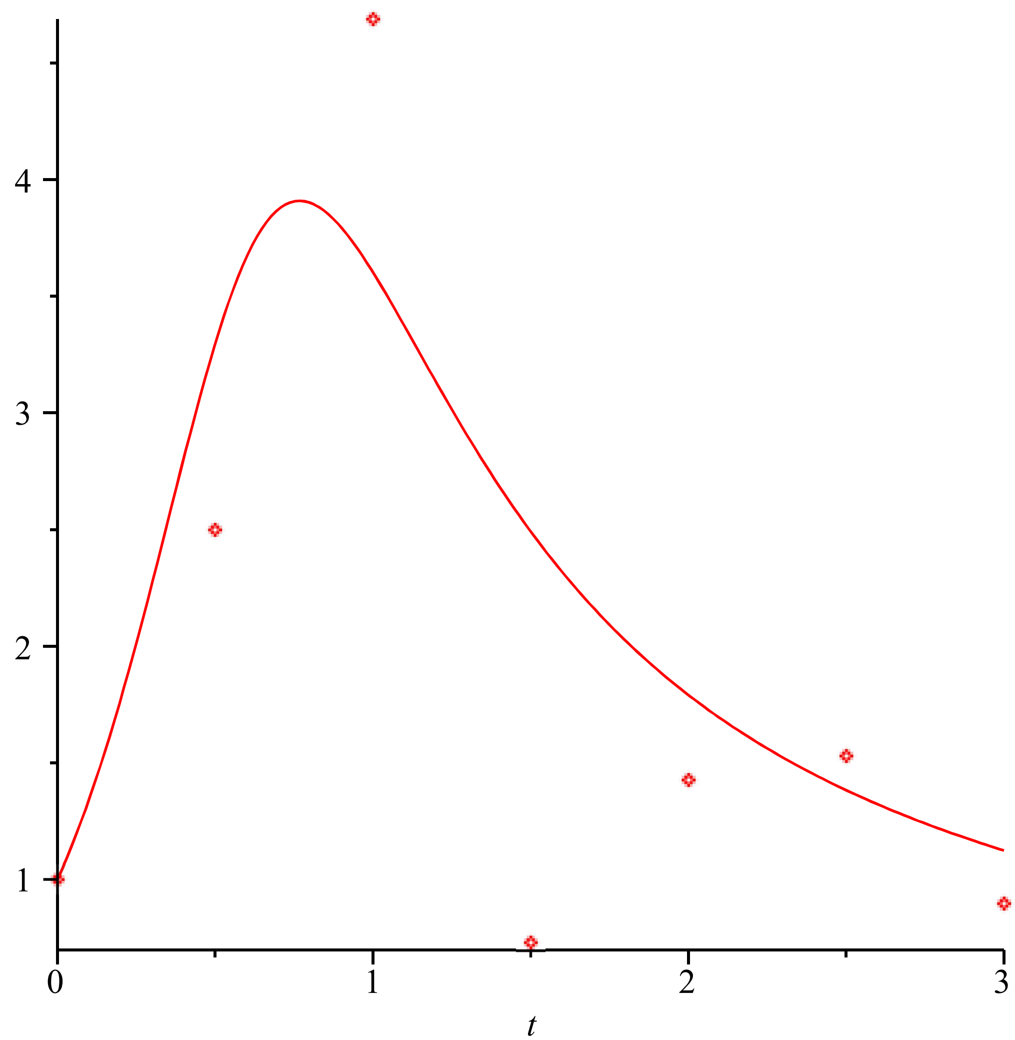
$$y_2 := 2.5$$

$$y_3 := 4.6875$$

$$y_4 := 0.732421875$$
$$y_5 := 1.428723335$$
$$y_6 := 1.530557970$$
$$y_7 := 0.8981353006 \quad \textbf{(8)}$$

> $w := t \rightarrow \frac{9}{-1 + 3\,t + 10\,e^{-3\,t}}$;
> $p4 := plot(w(t), t = 0 ..3)$:
> $p5 := plot(\langle\langle t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\rangle | \langle y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\rangle\rangle, style = point)$:
> $display(\{p4, p5\})$;

$$w := t \rightarrow \frac{9}{-1 + 3\,t + 10\,e^{-3\,t}}$$



>

Agora com h=0.125

> $restart : with(DEtools) : with(plots)$:
> $h := 0.125$;

$t := array([0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.825, 1, 1.125, 1.25, 1.375, 1.5, 1.625, 1.75, 1.875, 2, 2.125, 2.25, 2.375, 2.5, 2.625, 2.75, 2.875, 3]);$
$y[1] := 1;$

$$h := 0.125$$
$$t := [0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.625, 0.75, 0.825, 1, 1.125, 1.25, 1.375, 1.5, 1.625, 1.75, 1.875, 2, 2.125, 2.25, 2.375, 2.5, 2.625, 2.75, 2.875, 3]$$
$$y_1 := 1 \tag{9}$$

> **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 24 **do** $y[i+1] := y\ [i] + h\cdot(y[i]\cdot(3 - t[i]\cdot y[i]))$ **end do**

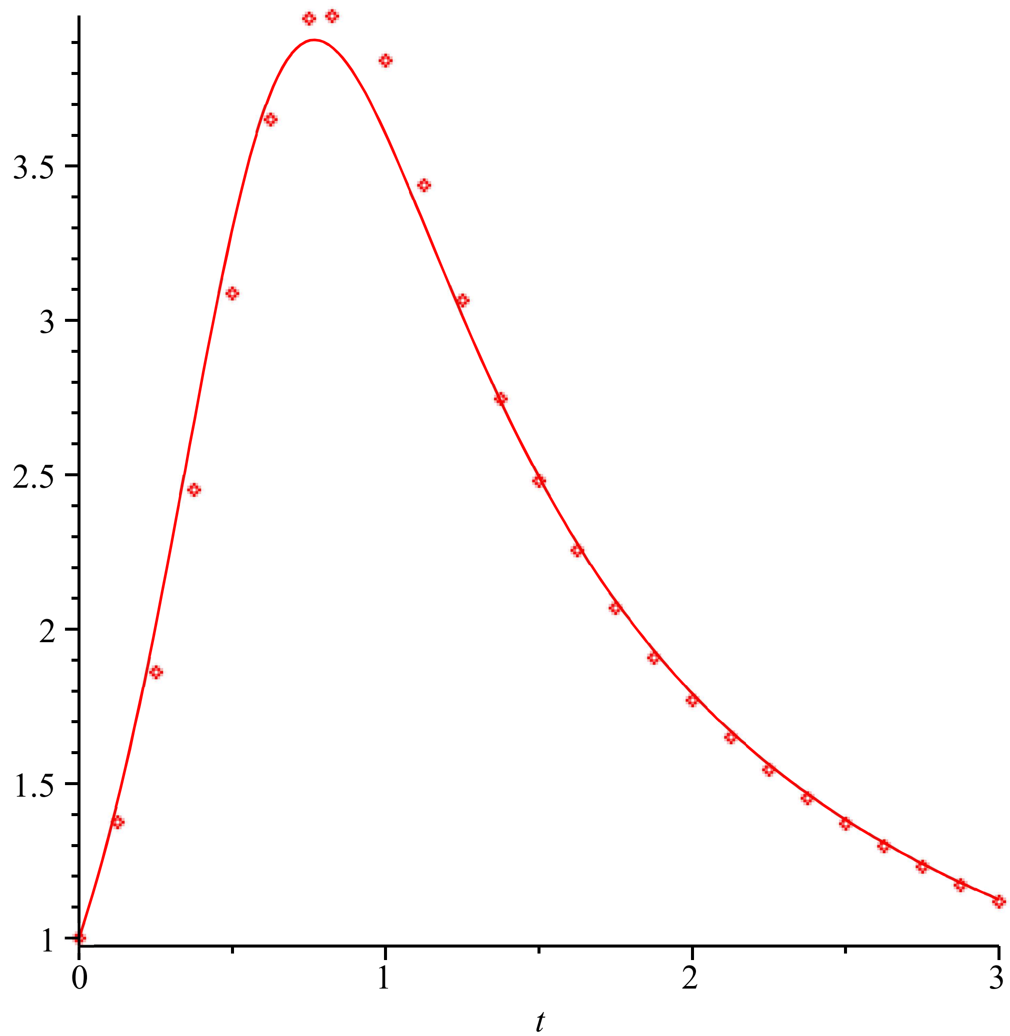
$$y_2 := 1.375$$
$$y_3 := 1.861083984$$
$$y_4 := 2.450751928$$
$$y_5 := 3.088243978$$
$$y_6 := 3.650257290$$
$$y_7 := 3.978136720$$
$$y_8 := 3.986290637$$
$$y_9 := 3.842440468$$
$$y_{10} := 3.437812050$$
$$y_{11} := 3.065007737$$
$$y_{12} := 2.746530572$$
$$y_{13} := 2.479952474$$
$$y_{14} := 2.256778850$$
$$y_{15} := 2.068544980$$
$$y_{16} := 1.908244712$$
$$y_{17} := 1.770383851$$
$$y_{18} := 1.650713050$$
$$y_{19} := 1.545941213$$
$$y_{20} := 1.453500165$$
$$y_{21} := 1.371365979$$
$$y_{22} := 1.297926768$$
$$y_{23} := 1.231885372$$
$$y_{24} := 1.172187472$$
$$y_{25} := 1.117968090 \tag{10}$$

> $w := t \rightarrow \dfrac{9}{-1 + 3\,t + 10\,\mathrm{e}^{-3\,t}};$
$p6 := plot(w(t), t = 0..3):$
$p7 := plot(\langle\langle t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{15}, t_{16}, t_{17}, t_{18}, t_{19}, t_{20}, t_{21}, t_{22}, t_{23}, t_{24}, t_{25}\rangle$

$[\langle y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{16}, y_{17}, y_{18}, y_{19}, y_{20}, y_{21}, y_{22}, y_{23}, y_{24},$
$y_{25}\rangle\rangle, style = point)$:

$display(\{p6, p7\});$

$$w := t \rightarrow \frac{9}{-1 + 3\,t + 10\,\mathrm{e}^{-3\,t}}$$



>