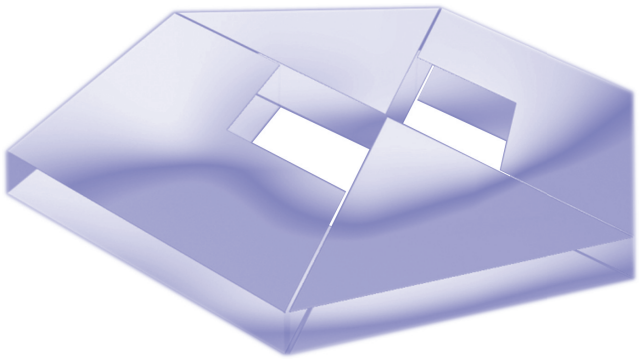
Bacharelado em

ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA



Estatística Aplicada à Administração

Marcelo Tavares

PNAP
PROGRAMA NACIONAL DE FORMAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA

1ª edição – 2011

2ª edição – 2012

T231e Tavares, Marcelo

Estatística aplicada à administração / Marcelo Tavares. – 3. ed. rev. ampl. – Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração / UFSC; [Brasília] : CAPES : UAB, 2014.

214p. : il.

Inclui bibliografia

Bacharelado em Administração Pública

ISBN: 978-85-7988-211-1

1. Administração – Métodos estatísticos. 2. Estatística. 3. Probabilidades. 4. Educação a distância. I. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Brasil). II. Universidade Aberta do Brasil. III. Título.

CDU: 519.2:65

Catalogação na publicação por: Onélia Silva Guimarães CRB-14/071

Ministério da Educação – MEC
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES
Diretoria de Educação a Distância – DED
Universidade Aberta do Brasil – UAB
Programa Nacional de Formação em Administração Pública – PNAP
Bacharelado em Administração Pública

Estatística Aplicada à Administração

Marcelo Tavares

2014
3ª Edição Revisada e Ampliada

PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

COORDENAÇÃO DE APERFEIÇOAMENTO DE PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR – CAPES

DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

DESENVOLVIMENTO DE RECURSOS DIDÁTICOS
Universidade Federal de Santa Catarina

METODOLOGIA PARA EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
Universidade Federal de Mato Grosso

AUTOR DO CONTEÚDO
Marcelo Tavares

EQUIPE TÉCNICA – UFSC

Coordenação do Projeto
Alexandre Marino Costa

Coordenação de Produção de Recursos Didáticos
Denise Aparecida Bunn

Projeto Gráfico
Adriano Schmidt Reibnitz
Annye Cristiny Tessaro

Editoração
Cláudio José Girardi

Revisão Textual
Cláudia Leal Estevão Brites Ramos
Mara Aparecida Andrade R. Siqueira
Sergio Luiz Meira

Capa
Alexandre Noronha

Créditos da imagem da capa: extraída do banco de imagens Stock.xchng sob direitos livres para uso de imagem.

SUMÁRIO

Apresentação

Seja bem-vindo ao estudo da Estatística, que segundo Triola (1999) é uma coleção de métodos para planejar experimentos, obter dados e organizá-los, resumi-los, analisá-los, interpretá-los e deles extrair conclusões.

Esperamos que esta disciplina seja uma experiência interessante e enriquecedora. Pensando nisso, elaboramos o material com cuidado para que você aprenda os principais conceitos associados à Estatística, que vem se tornando cada vez mais importante no competitivo ambiente de negócios e de gestão. Juntos, iremos viajar pelo mundo dos números associados à estatística e suas relações no dia a dia do gestor público.

O nosso principal objetivo é que você tenha a oportunidade de ampliar seu conhecimento sobre o universo da estatística. Dessa forma, não serão feitas neste material deduções e demonstrações matemáticas de expressões, mas, sim, uma abordagem mais abstrata das expressões a serem utilizadas.

Você já deve estar acostumado a utilizar a estatística, ou ferramentas estatísticas, no seu dia a dia, sem saber que a está utilizando. Se você acha que a estatística se resume apenas a números e a gráficos, está redondamente enganado. Dessa forma, estaremos, a partir de agora, entrando em um mundo no qual os números irão sempre lhe falar ou lhe contar alguma coisa. O seu trabalho usando a estatística passará a ser o de ajudar a planejar a obtenção de dados, a interpretar e a analisar os dados obtidos e a apresentar os resultados de maneira a facilitar a sua tomada de decisões como gestor na área pública.

Para gerar tabelas, gráficos e utilizar técnicas estatísticas, temos uma infinidade de *softwares* que fazem isso automaticamente. Entretanto, para que você possa descobrir quais as respostas que os dados podem dar para determinados questionamentos, é necessário

que saiba a teoria estatística e treine suas aplicações por meio de estudos de casos, ou situações.

Sempre surgem, então, perguntas do tipo: quais variáveis devem ser medidas? Como retirar amostras da população que se deseja estudar? Que tipo de análise realizar? Como interpretar os resultados? Esperamos que ao final da leitura deste material você tenha condições de responder de forma clara a essas perguntas e a outras que possam ser feitas.

É necessário termos em mente que a estatística é uma ferramenta para o gestor ou para o executivo, nas respostas aos "porquês" de seus problemas. Contudo, para que ela seja bem utilizada, é necessário conhecer os seus fundamentos e os seus princípios e, acima de tudo, que o gestor desenvolva um espírito crítico e de análise; pois é fácil mentir usando a estatística, difícil é falar a verdade sem usar a estatística.

Atualmente, as empresas têm procurado admitir como gestores profissionais que possuam um alto nível de conhecimento de estatística, o que resulta em diferença significativa nos processos decisórios.

Para estudar na modalidade a distância o conteúdo da disciplina *Estatística Aplicada à Administração é* preciso que você tenha disciplina intelectual, a qual, para desenvolver, somente praticando; e, ainda, uma postura crítica, sistemática. Ou seja, ao invés de você atuar como um sujeito passivo e concordar com tudo o que diz o texto, você deve **duvidar, contestar, criticar, comentar e descobrir o que o autor quer dizer.** O ato de estudar exige que você **faça exercícios** e **entenda o que está fazendo**, não sendo apenas um mero executor de fórmulas. Isso implica o entendimento dos conceitos apresentados neste material.

Uma vez que a leitura é uma atividade, você deve ser um sujeito ativo. Tenha certeza de que um estudante consegue aprender mais do que outro à medida que se aplica mais e é capaz de uma atividade maior de leitura. E aprende melhor se exigir mais de si mesmo e do texto que tem diante de si.

Para facilitar o seu estudo, dividimos o livro em seis Unidades. Na Unidade 1, você irá ver as fases do método estatístico e os conceitos de populações, de amostras e de métodos de amostragem.

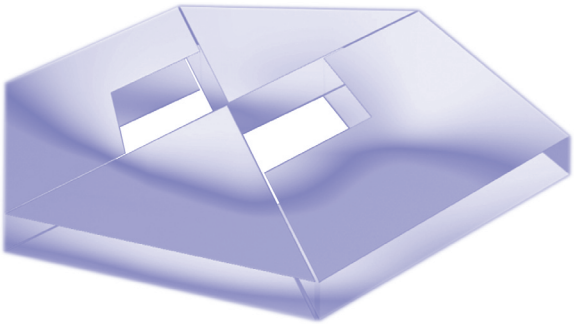
Nas Unidades 2 e 3, você irá aprender a descrever um conjunto de dados por meio de distribuições de frequências, de medidas de posição e de dispersão. Já nas Unidades 4 e 5, você irá conhecer e estudar conceitos relacionados a probabilidades, a distribuições discretas e contínuas, além de noções de estimação. E, por fim, na última Unidade, você irá aprender como tomar decisões baseadas nos chamados testes de hipóteses.

Desejamos a você bons estudos!

Professor Marcelo Tavares

UNIDADE 1

Fases do Método Estatístico, População e Amostra



Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade, você deverá ser capaz de:

- Entender as relações entre as fases do método estatístico e aplicá-las no desenvolvimento de seus projetos;
- Compreender conceitos básicos relacionados à estatística, como variáveis, estimadores, estimativas, parâmetros, população, amostras; e
- Entender os diversos tipos de amostragem e saber como aplicá-los quando for desenvolver qualquer tipo de projeto em que sejam utilizados planos amostrais.

Fases do Método Estatístico

Caro estudante,

Vamos iniciar nossos estudos de estatística para que você tenha condições de identificar a forma pela qual podemos utilizá-la, seja dentro da pesquisa científica ou na estruturação de projetos, ou na tomada de decisões.

Além disso, trabalharemos as definições de população e de amostra, bem como a forma de retirar as amostras de uma população; temas de fundamental importância para que você consiga desenvolver trabalhos com resultados de campo de alto nível.

Na preparação e execução de um projeto, torna-se necessário conhecer as fases do método estatístico, bem como a forma pela qual os elementos serão sorteados para compor a amostra. Um bom exemplo é a definição do perfil das pessoas a serem atendidas em um hospital público. Após a leitura desta Unidade, você terá condições de identificar esses itens no exemplo citado.

Vamos então aprender esses assuntos? Boa leitura e, qualquer dúvida, não hesite em consultar o seu tutor.

Para realizarmos um estudo estatístico, normalmente, existem várias etapas a serem realizadas, as chamadas fases do método estatístico. Quando você tiver bem definidas essas fases, e tiver condições de realizá-las de forma adequada, a chance de sucesso em um trabalho estatístico ou que envolva estatística será muito maior. Para isso, então, você irá conhecer tais fases ou etapas de forma mais detalhada.

As fases do método estatístico são:

- definição do problema;
- planejamento do processo de resolução;
- coleta dos dados;
- organização e apresentação dos dados;
- análise e interpretação dos resultados.

Agora, você verá de forma minuciosa cada uma dessas fases. Ao longo da apresentação, iremos detalhando-as, inserindo-as passo a passo, para que ao final você tenha uma ideia das relações entre elas.

Definição do Problema

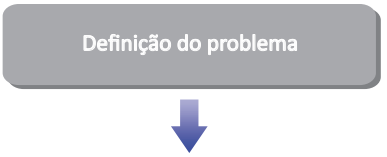
A primeira fase consiste na definição e na formulação correta do problema a ser estudado. Para isso, você deve procurar outros estudos realizados sobre o tema escolhido, pois, assim, evitará cometer erros que outros já cometeram. Para exemplificar esta fase, podemos considerar um estudo para prever os resultados das eleições governamentais antes da votação. Neste caso o problema consiste em determinar os percentuais de cada candidato com uma certa margem de erro.

Essa primeira fase pode responder à definição de um problema ou, simplesmente, dar resposta a um interesse de profissionais. Em alguns casos, podem estar envolvidas variáveis qualitativas e quantitativas, por exemplo:

Veremos esses conceitos mais adiante nesta Unidade.

- a receita do Imposto Territorial e Predial Urbano (IPTU) de cada um dos bairros de uma cidade em vários anos;
- medidas de desempenho dos funcionários de um setor de uma prefeitura ao longo de alguns meses;
- a quantidade de residências em uma cidade que atrasam o pagamento do IPTU em 1, 2, 3, 4, 5 ou mais meses; e
- o tempo necessário entre o pedido de reparo de uma via pública e a realização do serviço.

Mas não para por aí! Existem outros problemas relacionados à gestão pública que merecem ser resolvidos.

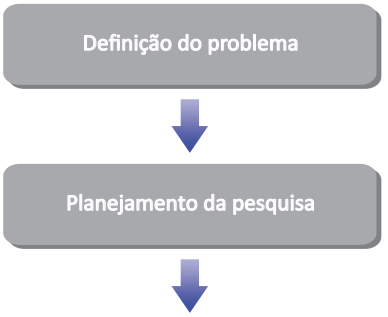


Planejamento da Pesquisa

Após você definir o problema, é preciso determinar um processo para resolvê-lo e, em especial, a forma de como obter informações sobre a variável ou as variáveis em estudo. É nessa fase que deve decidir pela observação da população ou de uma amostra. Portanto, você precisa:

- determinar os procedimentos necessários para resolver o problema, em especial, como levantar informações sobre o assunto objeto do estudo;
- planejar o trabalho tendo em vista o objetivo a ser atingido;
- escolher e formular corretamente as perguntas;
- definir o tipo de levantamento – censitário ou por amostragem; e
- definir o cronograma de atividades, os custos envolvidos, o delineamento da amostra etc.

Considerando o exemplo das previsões eleitorais, nesta fase de planejamento, devemos definir pontos importantes como as perguntas a serem incluídas num questionário de intenção de voto, o procedimento de aplicação do questionário, ou seja, de coleta de dados, o tipo e tamanho da amostra de eleitores a serem entrevistados, bem como o procedimento de projeção dos resultados a partir das opiniões coletadas.



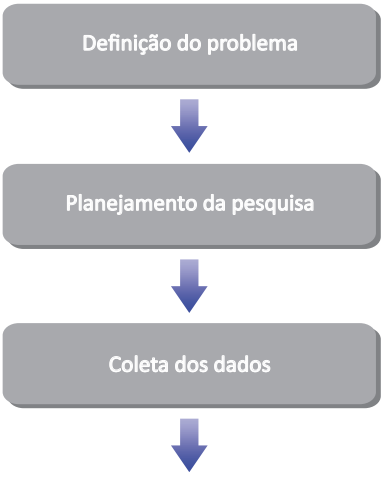
Coleta dos Dados

Agora que você já planejou o seu trabalho, vamos para a terceira etapa, que consiste na coleta de dados. Essa fase deve ser seguida com cuidado, pois dados mal coletados resultam em estatísticas inadequadas ou que não refletem a situação que você deseja estudar.

Os dados podem ser coletados, por exemplo, por meio de:

- questionário;
- observação;
- experimentação; e
- pesquisa bibliográfica.

A coleta de dados que você vai fazer pode ser realizada de forma direta com base nos elementos de registros ou pelo próprio pesquisador através de questionários. Voltando ao exemplo das previsões eleitorais, nesta fase de coleta dos dados temos a aplicação de questionários, por exemplo, através de pesquisadores que farão as perguntas e registrarão as respostas de eleitores selecionados.



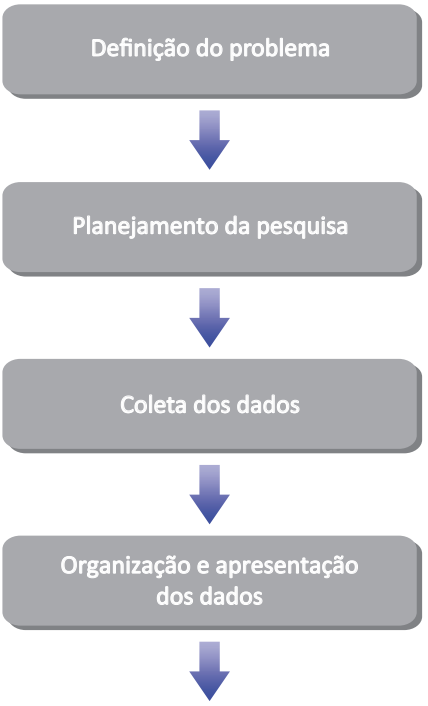
Organização e Apresentação dos Dados

Agora que você já tem os dados precisa organizá-los e apresentá-los, pois somente coleta-los dados não é suficiente. A organização

e a apresentação consistem em "resumir" os dados através da sua contagem e agrupamento, por meio de estatísticas, gráficos e tabelas. Desse modo, obtemos um conjunto de informações que irão conduzir ao estudo do **atributo estatístico***. Geralmente, essa organização é feita em planilhas eletrônicas (tipo Excel) para posterior **tratamento estatístico***. Considerando a previsão das eleições, os dados coletados deverão ser contados e organizados em planilhas eletrônicas. Os votos indicados pelos eleitores entrevistados deverão ser contados e organizados em tabelas.

*Atributo estatístico – é toda medida estatística. Por exemplo: média. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

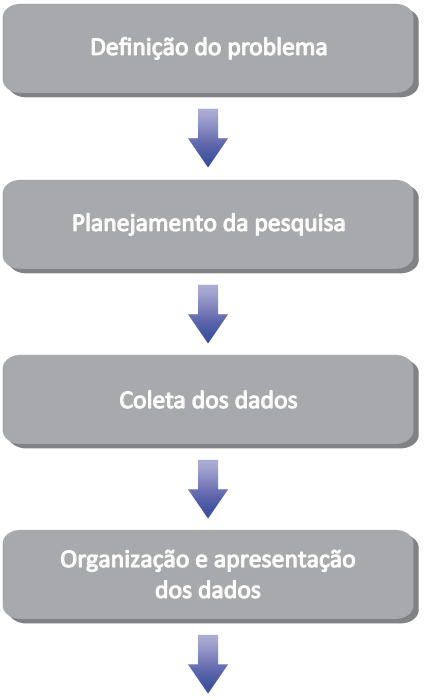
*Tratamento estatístico – implica analisar os dados utilizando técnicas estatísticas. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.



Agora que você tem os dados organizados, precisa apresentá-los e, para tanto, existem duas formas que não se excluem mutuamente, a saber:

- apresentação por tabelas; e
- apresentação por gráficos.

Essas formas permitem sintetizar uma grande quantidade de dados (números), tornando mais fácil a compreensão do atributo em estudo e uma futura análise.



Na Unidade 2, ampliaremos nossa discussão quanto à forma de apresentação dos dados, ou seja, detalharemos como montar essas tabelas de distribuição de frequências e quais os tipos de gráficos mais adequados para cada situação que você venha a ter.

Análise e Interpretação de Dados

Nesta etapa, você irá calcular novos números com **médias*** embasadas nos dados coletados. Esses novos números permitem fazer uma descrição do fenômeno em estudo, evidenciando algumas das suas características particulares. Nessa fase, ainda é possível, por vezes, "arriscar" alguma generalização, a qual envolverá sempre algum grau de incerteza.

Na análise e na interpretação dos dados, você precisa, ainda, estar muito atento ao significado das medidas estudadas,

***Médias** – são os resultados obtidos por meio da soma de todos os valores, divididos pela quantidade de ítens que você somou. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

Você irá aprender na Unidade 5 a quantificar esse grau de incerteza.

por exemplo, média e **moda*** e ao porquê de as utilizarmos. Para verificar as relações entre essas medidas, você deve estar de mente aberta; e, para tanto, é necessário que conheça a estrutura e o cálculo dessas medidas.

*Moda – valor que mais se repete em um conjunto de observações. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

Imagine que você esteja envolvido em um estabelecimento de conjecturas e na comunicação da informação de uma forma convincente através da elaboração de relatórios, de textos e de artigos que incluam, por exemplo, gráficos e tabelas. As pessoas que se utilizam da estatística como ferramenta devem ser sensibilizadas para perceberem a influência que poderá ter o modo de apresentação da informação na comunicação de resultados, a utilização de diferentes gráficos e/ou de diferentes escalas.

No exemplo da pesquisa eleitoral, aplicam-se fórmulas para calcular os intervalos de confiança dos resultados projetados para os candidatos, ou seja, seu percentual de votos esperados, associados a uma margem de erro prevista. A forma de calcular esses intervalos de confiança, você irá aprender na Unidade 5.

Para compreender a nossa conversa, analise a Figura 1, que apresenta um resumo de todas essas fases:

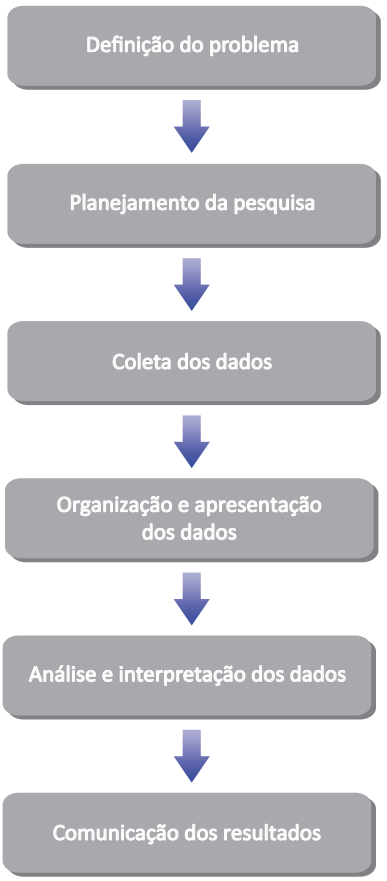


Figura 1: Fases do método estatístico
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Por fim, é importante destacarmos que para a realização dessa fase de análise é necessário que você tenha o domínio da utilização de planilhas tipo Excel e de *softwares* estatísticos. Na fase final de "Comunicação dos Resultados", as projeções de votos de candidatos são apresentadas na forma de tabela ou gráfico, os quais serão estudados na próxima Unidade.

Se diversas amostras são coletadas ao longo do tempo, pode ser apresentado um gráfico demonstrando a evolução temporal das previsões de votos por candidato.

População e Amostras

Antes, você precisa entender o que é uma população e o que é uma amostra. Se considerarmos somente os habitantes de uma cidade que contribuem com o pagamento do IPTU (apenas as pessoas de cada domicílio as quais tem o imóvel registrado em seu nome), essas pessoas constituem a população, pois apresentam características em comum, nesse caso, o fato de que elas estão na mesma cidade e contribuem, todas, com o imposto do IPTU.

Suponha, todavia, que você queira trabalhar com apenas uma parte dessa população, ou seja, uma porção ou fração da população dos elementos que a integram.

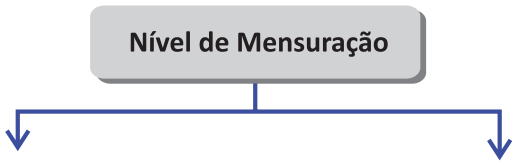
Nessa população, geralmente, você poderá medir uma variável, por exemplo, a renda dessas pessoas. Assim, você poderá querer calcular a renda média da população de pessoas que contribuem com o IPTU (média populacional (μ) que corresponde, geralmente, a um valor desconhecido chamado de parâmetro). Você deve lembrar-se sempre de que essas medidas numéricas de uma população são convencionalmente representadas por letras gregas, como apresentado na frase anterior. Como você normalmente não vai medir toda a população, pode obter uma amostra que a represente. Estudando a amostra, você terá condições de calcular a média amostral ($\overline{x}$) que corresponde ao estimador, e o resultado obtido (valor numérico) corresponderá à estimativa. Para entender melhor essa relação, observe a Figura 2.

Figura 2: Relações entre estimadores, parâmetros e estimativa
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

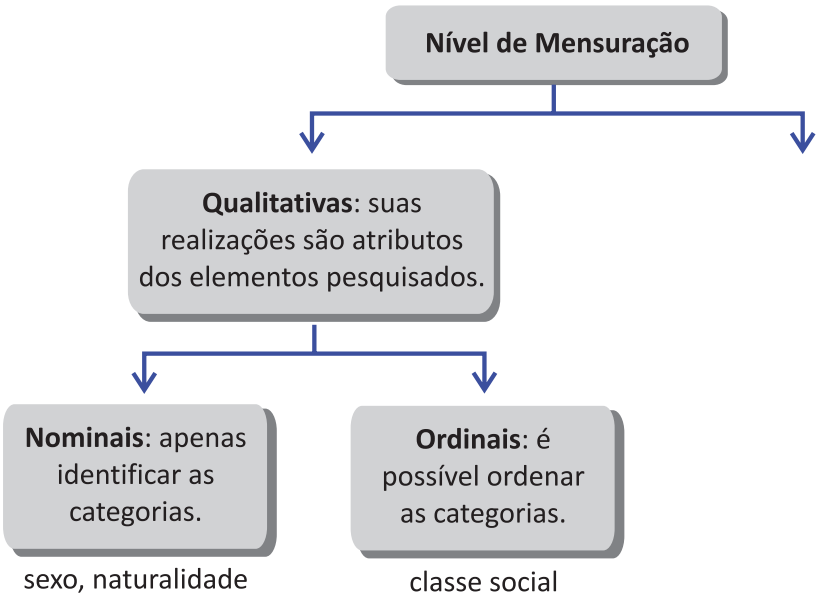
Para você entender melhor essa figura, verifique que μ (média populacional) e σ (desvio padrão populacional) correspondem aos parâmetros (população), que *x* corresponde ao estimador (amostra) e que R$ 587,00 corresponde à estimativa da renda média populacional (aproximação numérica do valor da população).

Portanto, quando você está estudando uma população inteira (censo) ou realizando uma amostragem, a classificação da variável que está trabalhando será muito importante. Em relação à sua natureza, as variáveis podem ser classificadas como: qualitativas (ordinais ou nominais) e quantitativas (discretas ou contínuas). Essa classificação permitirá, por exemplo, que você defina, posteriormente, o tipo de teste estatístico a ser utilizado ou o tipo de distribuição de probabilidade que necessitará aplicar para a variável em questão.

Sendo assim, você precisa entender a classificação das variáveis. Então, mãos à obra! Eis a classificação:



- **Variável qualitativa:** faz referência a observações relacionadas a atributos que não apresentam estrutura numérica, como cor dos olhos, classe social, estado civil, nome da empresa etc. Essa variável qualitativa pode ser classificada em:
  - **Nominal:** quando as observações não apresentam nenhuma hierarquia ou ordenamento, como o sexo dos funcionários de uma prefeitura, número do CPF ou de identidade, estado civil, naturalidade etc.
  - **Ordinal:** quando as observações apresentam uma hierarquia ou um ordenamento, por exemplo, cargo do funcionário de uma empresa (diretor, gerente, supervisor etc.); posição das empresas em relação ao nível de faturamento (primeira, segunda, terceira etc.).



- **Variável quantitativa:** está relacionada às observações que apresentam uma estrutura numérica associada a contagens ou a mensurações, como quantidade de energia elétrica consumida por uma prefeitura em um mês; número de pessoas atendidas por hora em um determinado setor público etc. Essa variável quantitativa pode ser classificada em:
  - **Discreta:** observações de estrutura numérica estão associadas a valores fixos, ou seja, na maioria dos casos, números inteiros e positivos associados a contagens, como o número de pessoas que pagam seus impostos em dia, número de pessoas residentes em uma cidade, etc.
  - **Contínua:** são todas as observações que representam valores numéricos que podem assumir qualquer valor dentro de um intervalo, ou seja, correspondem a números reais, por exemplo, o tempo que pessoas ficam na fila aguardando para serem atendidas; peso dos funcionários de uma prefeitura etc.

Para melhor visualizar essa classificação das variáveis, observe a Figura 3.

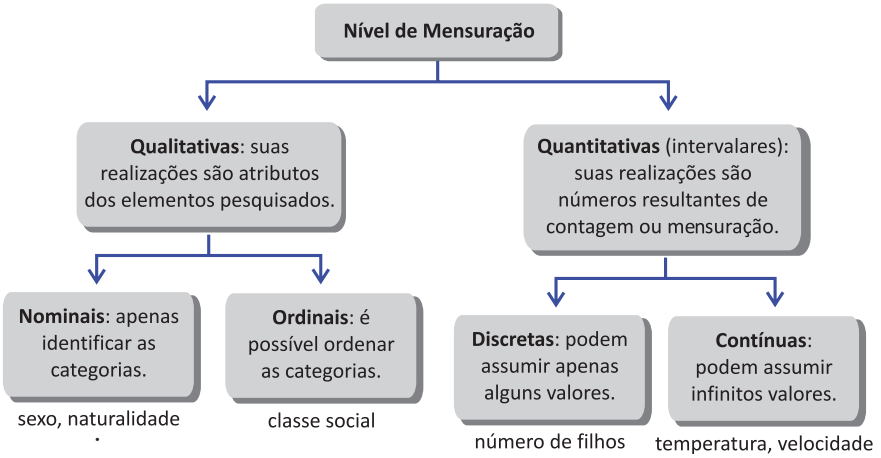


Figura 3: Classificação das variáveis
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Agora que você já conhece e compreendeu a classificação das variáveis, vamos voltar à relação entre amostragens e populações. A amostragem é a seleção de elementos de uma população, de modo que sejam representativos desta. Refere-se também ao tipo e processo de obtenção das amostras.

As principais vantagens da utilização do estudo por **amostras representativas*** em relação ao **censo*** são:

- Ocorre uma redução no custo, pois sendo os dados obtidos apenas de uma fração da população, as despesas são menores do que as oriundas de um censo. Tratando-se de grandes populações, podemos obter resultados suficientemente precisos, para serem úteis, de amostras que representam apenas uma pequena fração da população.
- Na prática ou no dia a dia das organizações, é necessário que os resultados sejam obtidos com a maior rapidez possível. Portanto, com a amostragem, você pode apurar os dados e sintetizá-los mais rapidamente do que em uma

***Amostras representativas** – são as amostras que mantêm as características da população de onde ela foi retirada. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

***Censo** – avaliação de todos os elementos da população. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

análise de todos os elementos populacionais. Esse é um fator primordial quando se necessita urgentemente das informações. Se o resultado de uma pesquisa for conhecido muito tempo depois, é bem possível que a situação que você pretendia resolver seja, no momento da apresentação, completamente diferente da que existia no momento da coleta dos dados.

- Outra vantagem corresponde a maior amplitude e flexibilidade. Em certos tipos de investigação, como ocorre em pesquisas de mercado, temos que utilizar pessoal bem treinado e equipamento de alta tecnologia, cuja disponibilidade é limitada para a obtenção de dados. O censo torna-se impraticável e resta a escolha de obter as informações por meio de amostras. Portanto, com número reduzido de entrevistadores, por exemplo, o treinamento a ser aplicado a eles tende a ser de qualidade muito maior do que se fosse aplicado a um grupo maior.
- A última vantagem a ser citada aqui é a maior exatidão dos resultados. Em virtude de se poder empregar pessoal de melhor qualidade e mais treinado, e por se tornar exequível a supervisão mais cuidadosa do campo de trabalho e do processamento de dados, favorecendo à redução no volume de trabalho, uma amostragem "pode", na realidade, proporcionar melhores resultados do que o censo.

Dessa forma, podemos dizer que as amostras a serem trabalhadas devem apresentar uma característica importante: a **representatividade**. Para que as conclusões da teoria de amostragem sejam válidas, as amostras devem ser escolhidas de modo a serem representativas da população.

Antes de darmos continuidade, reflita: como você faria para retirar uma amostra de 300 pessoas que estão em um cadastro de prefeitura que tem 60.000 pessoas? Essa amostra seria representativa da população?

Uma vez que você tenha decidido realizar a pesquisa selecionando uma amostra da população, é preciso elaborar o **plano de amostragem*** que consiste em definir as **unidades amostrais***, a maneira pela qual a amostra será retirada (o tipo de amostragem), e o próprio tamanho da amostra.

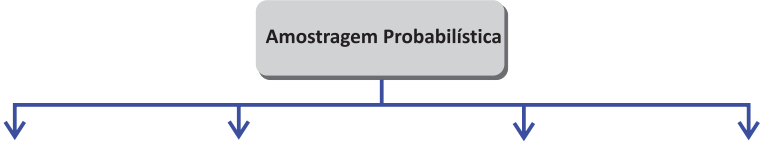
Plano de amostragem – plano de como será feita a retirada da amostra da população. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

Unidades amostrais – correspondem às unidades selecionadas. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

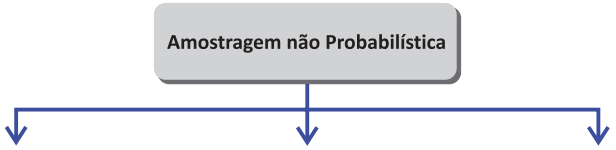
Essas unidades amostrais podem corresponder aos próprios elementos da população, quando há acesso direto a eles ou qualquer outra unidade que possibilite chegar até eles. Você pode considerar como população os domicílios de uma cidade da qual se deseja avaliar o perfil socioeconômico. A unidade amostral será cada um dos domicílios, que corresponderá aos elementos da população. Caso a unidade amostral seja definida como os quarteirões, a unidade amostral não corresponderá aos elementos populacionais.

Temos dois tipos principais de amostragem: as probabilísticas e as não probabilísticas. Vejamos:

- **Amostragem probabilística:** ocorre quando todos os elementos da população tiverem uma probabilidade ou a chance conhecida e diferente de zero de pertencer à amostra. Por exemplo, imagine que temos 50 funcionários de uma prefeitura em uma atividade de treinamento e você deve selecionar 10 funcionários. Na amostragem probabilística, você deverá sortear 10 indivíduos da lista de 50 funcionários. A realização desse tipo de amostragem somente é possível se a população for finita e totalmente acessível.



- **Amostragem não probabilística:** é assim denominada sempre que não conhecemos a probabilidade ou a chance de um elemento da população pertencer à amostra. Por exemplo, quando somos obrigados a colher a amostra na parte da população a que temos acesso, os elementos da população a que não temos acesso não têm chance de serem sorteados para compor a amostra. No caso anterior da escolha de 10 entre 50 funcionários, uma amostragem não probabilística seria, por exemplo, a escolha de nomes conforme o julgamento de mérito e não por sorteio.



Você pode intuir que, no geral, a utilização de uma amostra probabilística é melhor para garantir a representatividade da amostra, pois o acaso seria o único responsável por eventuais discrepâncias entre população e amostra. Essas discrepâncias são levadas em consideração nas inferências estatísticas e cálculos de possíveis margens de erro de previsão.

Vamos, então, detalhar os tipos de amostragens probabilísticas.

Amostragens Probabilísticas

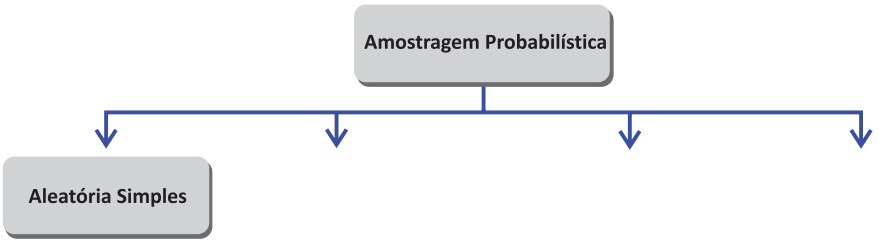
Como já dito, essa amostragem é caracterizada pela chance conhecida de mensurarmos uma amostra. Os principais métodos de amostragem são: aleatória (casual) simples, sistemática, estratificada e conglomerado. Veja a seguir a descrição de cada uma delas.

Amostragem Aleatória (Casual) Simples

Devemos utilizar a Amostragem Aleatória Simples (AAS) somente quando a população for homogênea em relação à variável que se deseja

estudar. Geralmente, atribuímos uma numeração a cada indivíduo da população e, através de um **sorteio com reposição,** os elementos que irão compor a amostra são selecionados. Todos os elementos da população têm a mesma probabilidade de pertencer à amostra e as extrações dos n elementos são independentes. É importante que você se atenha ao fato de que no caso de populações pequenas e em que não há reposição, a condição de independência não é satisfeita. A amostra resultante tem maior valor, porém é necessário um ajuste no cálculo do erro-padrão da média amostral.

Imagine que você queira amostrar um número de pessoas que estão fazendo um determinado concurso com N = 10.000 inscritos. Como a população é finita, devemos enumerar cada um dos N candidatos e sortear n = 1.000 deles.



Amostragem Sistemática

Em algumas situações, como amostrar pessoas que ficam em uma fila, é conveniente retirar da população os elementos que irão compor a amostra de forma cíclica (em períodos), por exemplo, quando os elementos da população se apresentam ordenados. Porém, é de fundamental importância que a variável de interesse não apresente ciclos de variação coincidentes com os ciclos de retirada, pois esse fato tornará a amostragem não representativa. Essa técnica de amostragem é o que denominamos de amostragem sistemática.

Para entender melhor, vamos imaginar que você queira retirar uma amostra dos currículos apresentados pelos candidatos em um processo seletivo, e a variável de interesse corresponde à idade deles. Pode ocorrer que pessoas de uma determinada faixa etária deixem para entregar o currículo no último dia. Então, se pegássemos de forma aleatória, poderíamos estar subestimando ou superestimando a idade média. Nessa situação, foram recebidos 500 currículos ordenados

por ordem de entrega. Considerando que amostrar 50 currículos é o suficiente para estimar a idade média dos candidatos, utilizamos a técnica de amostragem sistemática, pois pode ocorrer que um grupo de pessoas da mesma faixa etária tenha feito a inscrição em grupo e, assim, na ordem de inscrição, teremos diversas pessoas com a mesma idade. Devemos considerar então que as idades estejam aleatoriamente distribuídas na população, levando em conta a ordem de chegada, ou seja, sem qualquer ciclo de repetição ou padrão relacionado à ordem de entrega dos currículos.

Para tanto, é necessário, antes, que enumeremos a população de 1 a 500 e calcularemos uma constante (K) que servirá como fator de ciclo para a retirada dos currículos amostrados. Assim, podemos dividir os 500 currículos pelo tamanho da amostra (50) que desejamos trabalhar e, então, teremos uma constante igual a 10 e os elementos serão amostrados a cada 10 elementos. Generalizando, teremos que a constante (K) será dada por K= N/n, em que N é o tamanho da população e n o tamanho da amostra.

Após a definição do valor de K, fazemos o sorteio de um ponto inicial da amostragem (PIA), ou seja, um dos elementos do primeiro intervalo constituído pelos elementos populacionais numerados de 1 até 10. Na sequência, devemos escolher o próximo que será o elemento de ordem (i + K), e assim por diante, sempre somando K à ordem do elemento anterior até completar a escolha dos n elementos que irão compor a amostra. Um esquema é apresentado na Figura 4 no caso em que K = 5.

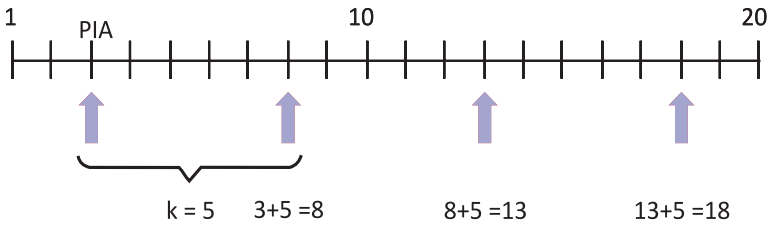


Figura 4: Exemplo de amostra sistemática
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Para fixar os conceitos de amostragem sistemática, vamos fazer, juntos, um esquema de amostragem para saber a opinião dos usuários de um banco em relação ao tempo de atendimento.

Imagine um Banco X com uma listagem de 33.400 clientes em uma determinada cidade. A pesquisa será feita por telefone, utilizando uma estrutura de call center. Desejando-se que a pesquisa seja realizada com uma amostra de 300 clientes, como seria organizada a amostragem sistemática?

Antes, você deve dividir o número total de clientes, 33.400, por 300, que é o tamanho da amostra.

$$K = \frac{N}{n} = \frac{33400}{300} = 111{,}33$$

Como encontramos um valor com casas decimais, então, você irá utilizar um K de aproximadamente 111.

Agora, do primeiro cliente da lista até o de numero 111, você irá sortear um número. Vamos considerar que sorteou o cliente número 10.

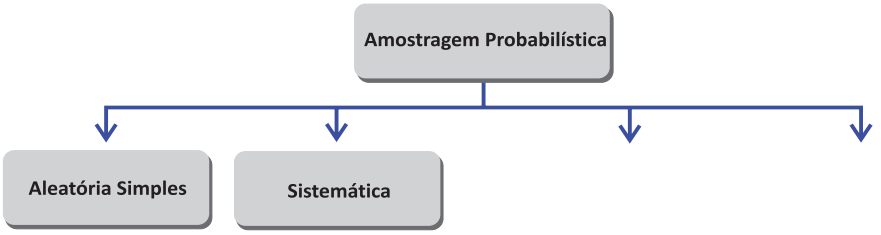
Logo, esse será o primeiro elemento da amostra.

O próximo elemento da amostra será dado pela soma do primeiro sorteado (10º cliente) ao valor de K (111).

Então, o próximo cliente sorteado será o 121º cliente (10 + 111).

Para o sorteio do próximo cliente que irá compor a amostra, teremos o 121º cliente mais o valor de K = 111, ou seja, o 232º cliente.

E, desse modo, você continua até que obtenha todos os elementos da amostra (n = 300 clientes).



Amostragem Estratificada

Quando a variável de interesse apresenta uma heterogeneidade na população e essa heterogeneidade permite a identificação de grupos homogêneos, você pode dividir a população em grupos (estratos) e

fazer uma amostragem dentro de cada um deles, garantindo, assim, a representatividade de cada estrato na amostra.

Podemos verificar que pesquisas eleitorais apresentam uma grande heterogeneidade em relação à intenção de votos quando consideramos, por exemplo, a faixa salarial ou o nível de escolaridade. Então, se fizéssemos uma AAS, poderíamos incluir na amostra uma maior quantidade de elementos de um grupo, embora, proporcionalmente, esse grupo seja pequeno em relação à população. Dessa forma, não teríamos uma amostra representativa da população a ser estudada. Portanto, podemos dividir a população em grupos (estratos) que são homogêneos para a característica que estamos avaliando, ou seja, nesse caso a intenção de votos.

Como estamos dividindo a população em estratos (grupos) que são homogêneos dentro de si, podemos caracterizar a amostragem estratificada. Para efetuarmos esta amostragem de forma proporcional, precisamos, primeiramente, definir a **proporção do estrato em relação à população**.

A proporção do estrato h será igual ao número de elementos nele presentes (N_h) dividido pelo total da população (N) ➔ (N_h/N).

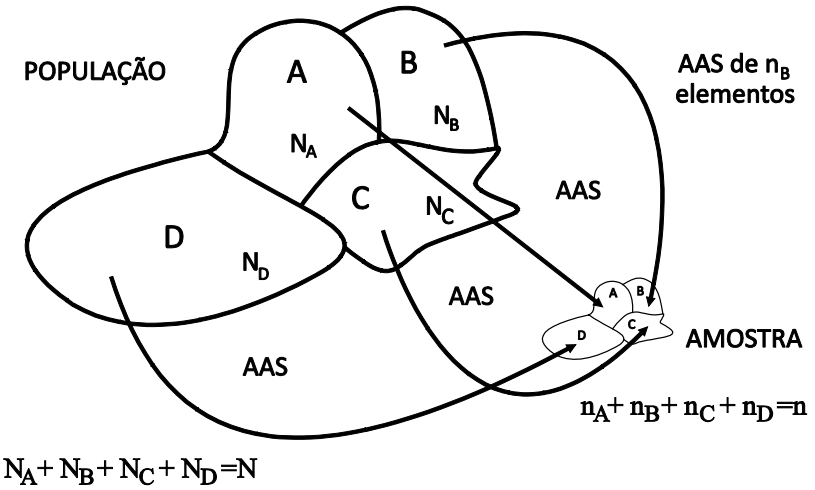


Figura 5: População dividida em estratos
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Após você obter essa proporção do estrato em relação à população, deve multiplicar o tamanho total da amostra (n) pela proporção de cada estrato na população (N_h/N).

Dessa maneira, teremos um tamanho de amostra em cada estrato proporcional ao tamanho do estrato em relação à população. A Figura 5 mostra uma população dividida em estratos (grupos) e como é feita a escolha dos elementos de cada um deles (A, B, C, D). Logo, dentro de cada um, você pode fazer amostragem usando AAS devido aos estratos serem homogêneos individualmente, considerando a variável de interesse.

Perceba que a quantidade de elementos que irá sortear dentro de cada estrato é proporcional ao tamanho de cada estrato na população, pois o desenho da amostra é o mesmo da população, porém menor, já que você irá pegar somente uma parte de cada estrato para compor a amostra final.

Para você fixar melhor os conceitos de amostragem estratificada, vamos resolver juntos a seguinte questão: imagine que o governo federal deseja fazer uma pesquisa de satisfação das pessoas em relação a serviços prestados por prefeituras. Estudos anteriores mostram uma relação entre a satisfação das pessoas e o tamanho da cidade. A população a ser considerada diz respeito às cidades de um determinado estado. Essas cidades foram divididas em três grupos (estratos) levando em conta o seu tamanho (pequena, média e de grande porte). Considere que vamos trabalhar com uma amostra de tamanho n = 200 cidades e, com as informações a seguir, faça o esquema de uma amostragem estratificada.

ESTRATOS	TAMANHO DO ESTRATO (N° DE CIDADES)
Pequeno porte	$N_1 = 700$
Médio porte	$N_2 = 100$
Grande porte	$N_3 = 27$

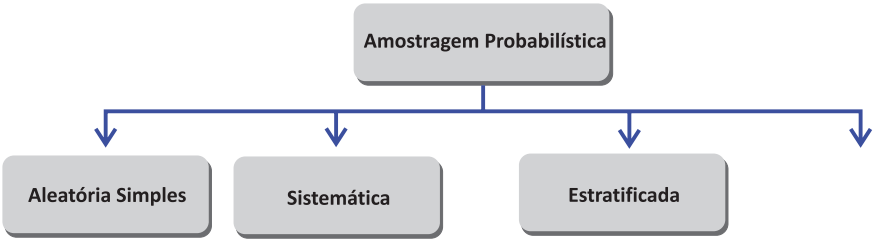
Calcule, antes, a proporção de cada estrato na população, dividindo o tamanho do estrato pelo tamanho da população (700+100+27 = 827).

ESTRATOS	TAMANHO DO ESTRATO (N° DE CIDADES)	PROPORÇÃO
Pequeno porte	$N_1 = 700$	$\frac{N_1}{N} = \frac{700}{827} = 0{,}8464$
Médio porte	$N_2 = 100$	$\frac{N_2}{N} = \frac{100}{827} = 0{,}1209$
Grande porte	$N_3 = 27$	$\frac{N_3}{N} = \frac{27}{827} = 0{,}0326$

A quantidade de cidades que será amostrada na população será dada por meio da proporção de cada estrato multiplicado pelo tamanho total da amostra (n=200), como é visto a seguir:

ESTRATOS	TAMANHO DO ESTRATO (N° DE CIDADES)	PROPORÇÃO	N° DE CIDADES AMOSTRADAS EM CADA ESTRATO
Pequeno porte	$N_1 = 700$	$\frac{N_1}{N} = \frac{700}{827} = 0{,}8464$	$n_1 = 0{,}8464.200 = 169{,}28 \cong 170$
Médio porte	$N_2 = 100$	$\frac{N_2}{N} = \frac{100}{827} = 0{,}1209$	$n_2 = 0{,}1209.200 = 24{,}18 \cong 24$
Grande porte	$N_3 = 27$	$\frac{N_3}{N} = \frac{27}{827} = 0{,}0326$	$n_3 = 0{,}0326.200 = 6{,}52 \cong 6$

Então, na nossa amostra, teremos 170 cidades de porte pequeno, 24 de porte médio e 6 de grande porte.



Amostragem por Conglomerados

Apesar de a amostragem estratificada apresentar resultados satisfatórios, a sua implementação é dificultada pela falta de informações sobre a população para fazer a estratificação. Para poder contornar esse problema, podemos trabalhar com o esquema de amostragem chamado amostragem por conglomerados.

Os conglomerados são definidos em razão da experiência do gestor ou do pesquisador. Geralmente, podemos definir os conglomerados por fatores geográficos, como bairros e quarteirões. A utilização da amostragem por conglomerados possibilita uma redução significativa do custo no processo de amostragem. Portanto, um conglomerado é um subgrupo da população que, individualmente, a reproduz. Esse tipo de amostragem é muito útil quando a população é grande, por exemplo, no caso de uma pesquisa em nível nacional.

Você pode estar se perguntando: como realizar uma amostragem por conglomerados?

Apesar de a amostragem por conglomerados, nesse tipo de amostragem, ser utilizada para uma população grande, é simples calculá-la. Primeiramente, definimos o conglomerado e, assim, dividimos a população nele. Sorteamos os conglomerados por meio de um processo aleatório e avaliamos todos os indivíduos presentes neles; isso é chamado de amostragem por conglomerados em um estágio. Caso façamos um sorteio de elementos dentro de cada conglomerado, teremos uma amostragem por conglomerados em dois estágios. Para entender melhor esse cálculo, observe a Figura 6, que mostra uma amostragem por conglomerados em um único estágio. Cada quadrado corresponde a uma residência. Analise.

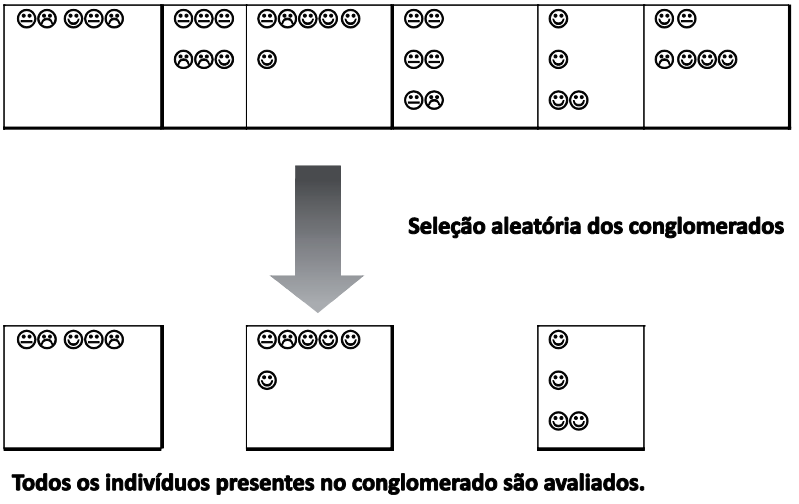
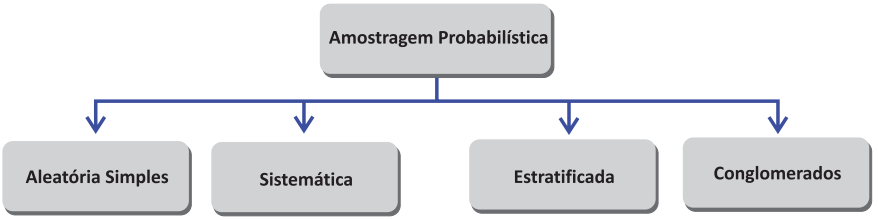


Figura 6: Amostra por conglomerados
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Um exemplo prático de utilização dessa amostra é a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), feita por conglomerados em três estágios.

Para saber mais sobre essa pesquisa acesse <www.ibge.com.br>. Acesso em: 20 jan. 2014.



O cálculo do tamanho amostral será visto em conjunto com a parte de intervalos de confiança, na Unidade 5.

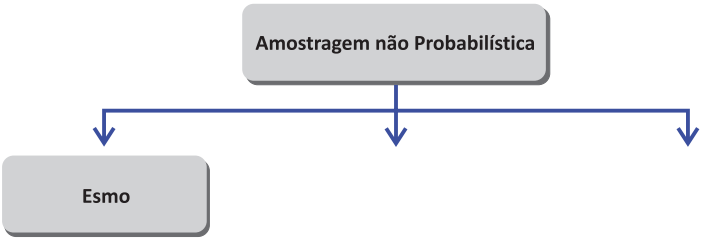
Amostragem não Probabilística

Quando trabalhamos com a amostragem não probabilística, não conhecemos *a priori,* isto é, com antecedência, a probabilidade que um elemento da população tem de pertencer à amostra. Nesse caso, não é possível calcular o erro decorrente da generalização dos resultados das análises estatísticas da amostra para a população de onde essa amostra foi retirada. Então, utilizamos geralmente a amostragem não probabilística, por simplicidade ou por impossibilidade de se obter uma amostra probabilística como seria desejável.

Os principais tipos de amostragem não probabilística que temos são: amostragem sem norma, ou a esmo; intencional; e por cotas.

Amostragem a Esmo

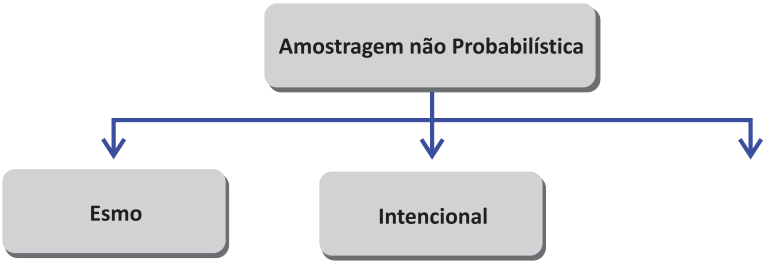
Imagine uma caixa com 1.000 parafusos. Enumerá-los ficaria muito difícil e a AAS tornar-se-ia inviável. Então, em situações desse tipo, supondo que a população de parafusos seja homogênea, escolhemos a esmo a quantidade relativa ao tamanho da amostra. Quanto mais homogênea for a população, mais podemos supor a equivalência com uma AAS. Dessa forma, os parafusos serão escolhidos para compor a amostra de um determinado tamanho sem nenhuma norma ou a esmo. Daí vem o nome desse tipo de amostragem.



Amostragem Intencional

A amostragem intencional corresponde àquela em que o amostrador deliberadamente escolhe certos elementos para pertencer à amostra por julgá-los bem representativos da população.

Um exemplo desse tipo de amostragem corresponde à situação em que desejamos saber a aceitação de uma nova marca de *whisky* a ser inserida no mercado de uma cidade. Somente entrarão para compor a amostra pessoas que façam uso da bebida e que tenham condições financeiras de comprar essa nova marca (classe social de maior poder aquisitivo).

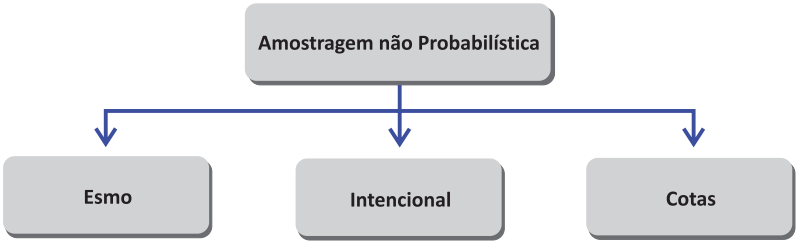


Amostragem por Cotas

Nesse tipo de amostragem, a população é dividida em grupos e, na sequência, é determinada uma cota proporcional ao tamanho de cada grupo. Entretanto, dentro de cada grupo não é feito sorteio, mas, sim, os elementos são procurados até que a cota de cada grupo seja cumprida; a escolha em vez do sorteio é o que difere a amostragem por cotas da amostragem estratificada. Por exemplo, suponha que numa população haja 53% de homens e 47% de mulheres. Numa amostra de 100 indivíduos dessa população, por cotas de gênero, procuraríamos 53 homens e 47 mulheres.

Encontramos esse tipo de amostra em pesquisas eleitorais quando a divisão de uma população ocorre em grupos; considerando, por exemplo, o sexo, o nível de escolaridade, a faixa etária e a renda, que podem servir de base para a definição dos grupos, partindo da suposição de que essas variáveis definem grupos com comportamentos diferenciados no processo eleitoral.

Para termos uma ideia do tamanho desses grupos, podemos recorrer a pesquisas feitas anteriormente pelo IBGE.



Juntando todos os desenhos dos vários tipos de amostragem que fizemos, teremos, então, a Figura 7:

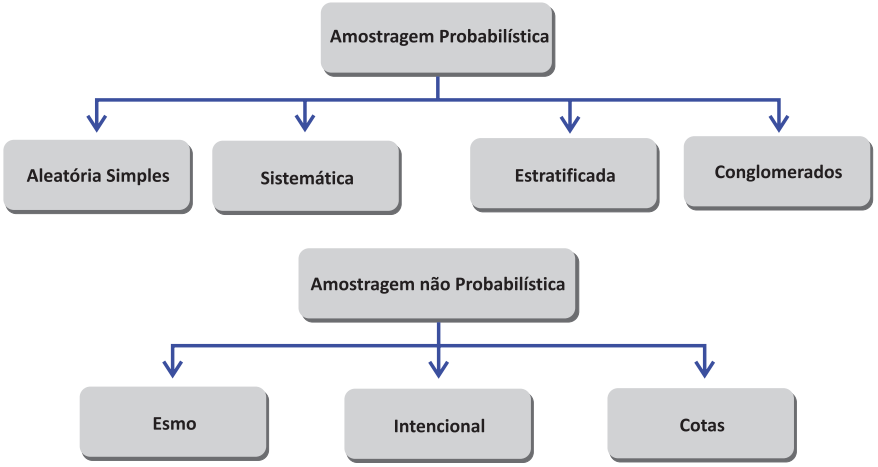


Figura 7: Tipos de amostragem
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

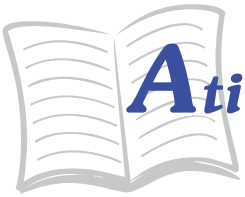
Complementando

Lembre-se de que a construção do conhecimento é um processo que deve ser cíclico e renovado a cada dia; para tanto, procure descobrir mais acerca desse mundo estatístico seguindo esta orientação:

- *Programa estatístico Bioestat*. Disponível em: <http://www.mamiraua.org.br/downloads/programas>. Acesso em: 20 jan. 2014. Esse programa permite que você realize os métodos de amostragem, apresentados aqui, computacionalmente.

Resumindo

Nesta Unidade, você conheceu conceitos básicos relacionados à estatística e aprendeu a retirar amostras de populações. Esses conceitos serão importantes para a compreensão de novas informações contidas nas próximas Unidades.



Atividades de aprendizagem

Depois de ter visto todos os conceitos das fases do método estatístico, a classificação de variáveis e os diferentes planos amostrais, resolva as atividades a seguir. Lembre-se de que as respostas de todas as atividades de aprendizagem estão no final do livro. Em caso de dúvidas, você deve consultar seu tutor.

1. Imagine a situação de um pesquisador que deseje estudar o uso semanal da internet por estudantes de uma escola do Ensino Fundamental. Diferentes perguntas poderiam ser feitas. Leia os exemplos e classifique-os em variáveis qualitativa nominal ou ordinal e quantitativa discreta ou contínua.
    a) Você usa internet durante a semana? (sim ou não).
    b) Qual a intensidade de uso da internet durante a semana? (nenhuma, pequena, média ou grande).
    c) Quantas vezes você usa a internet durante a semana?
    d) Por quantas horas completas ou não você usa a internet durante a semana?
2. Identifique o tipo de amostragem utilizada nas situações a seguir:
    a) Uma empresa seleciona a próxima pilha após cada 300 pilhas produzidas em sua linha de produção para a realização de testes de qualidade, a fim de conseguir vencer uma licitação pública.
    b) Um pesquisador de empresa aérea seleciona aleatoriamente dez voos para entrevistar todos os passageiros desses voos.
    c) Uma prefeitura testa uma nova estratégia de cobrança selecio-

nando aleatoriamente 250 consumidores com renda inferior a R$ 300,00 e 250 consumidores com renda de ao menos R$ 300,00.

d) Um eleitor indeciso resolve escolher seu candidato da seguinte forma: escreve o nome de cada um deles em cartões separados, mistura-os e extrai um nome, no qual irá votar.

e) Um pesquisador ficou em um ponto de checagem da polícia (esquina), onde, a cada cinco carros que passavam, era feito um teste de bafômetro para checar a sobriedade dos motoristas.

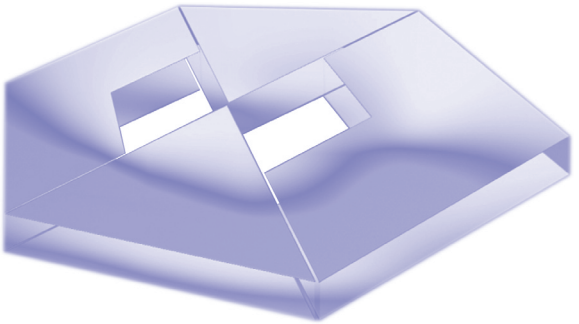
f) Em uma pesquisa com 1.000 pessoas, estas foram selecionadas usando-se como critério os números de seus telefones, gerados por computador.

g) Uma prefeitura, para não perder uma fábrica montadora de carros, auxiliou em uma pesquisa na qual a montadora dividiu seus carros em cinco categorias: subcompacto, compacto, médio, intermediário e grande; e está entrevistando 200 proprietários de cada categoria para saber da satisfação desses clientes e, assim, ajudar a melhorar as vendas.

h) Motivada pelo fato de um estudante ter morrido por excesso de bebida, a direção de uma universidade fez um estudo sobre o hábito de beber dos estudantes e, para isso, selecionou dez salas de aula e entrevistou os estudantes que lá estavam.

UNIDADE 2

Distribuições de Frequências e Representação Gráfica



Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade, você deverá ser capaz de:

- Descrever e apresentar os resultados de um conjunto de observações a partir de uma distribuição de frequências;
- Compreender os tipos de gráficos existentes;
- Utilizar os gráficos de forma adequada; e
- Interpretar os resultados apresentados em um gráfico de forma clara, objetiva e passando o máximo de informações possíveis.

Distribuições de Frequências

Caro estudante,

Vamos dar início à segunda Unidade de nossa disciplina e. Nela, você encontrará conceitos relacionados à distribuição de frequências e à representação gráfica que lhe permitirão sintetizar uma grande quantidade de dados em tabelas e em gráficos representativos.

Quando coletamos informações, sejam de populações ou de amostras, como vimos na Unidade anterior, geralmente trabalhamos com uma quantidade grande de observações. Mas, como vamos apresentar esses resultados? Precisamos, então, aprender como sintetizar esses dados e colocá-los de modo que as pessoas possam entender as informações obtidas.

Uma forma de fazermos isso é utilizando distribuições de frequências e análises gráficas, as quais aprenderemos a partir de agora, já que entraremos no mundo da estatística, que se preocupa com a forma de apresentação dos dados.

Vamos começar?

Quando coletamos os dados para uma pesquisa, as observações realizadas são chamadas de **dados brutos***. Um exemplo de dados brutos corresponde ao percentual dos trabalhadores que contribuíram com o Instituto Nacional de Seguro Social (INSS) em 20 cidades de uma determinada região do Brasil no ano de 2008 (dados simulados pelo autor a partir de um caso real). Os dados são apresentados na Tabela 1 na forma em que foram coletados; e por esse motivo são denominados dados brutos. Geralmente, esse tipo de dado traz pouca ou nenhuma informação ao leitor, sendo necessário organizá-lo, com o intuito de aumentar sua capacidade de informação.

***Dados brutos** – dados na forma em que foram coletados, sem nenhum tratamento. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

Tabela 1: Percentual dos trabalhadores que contribuíram para o INSS em 20 cidades de uma determinada região do Brasil no ano de 2008

45	51	50	58
50	44	46	57
42	41	60	58
41	50	54	60
52	46	52	51

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Se fizermos uma ordenação desse conjunto de dados brutos (do menor para o maior, em colunas da esquerda para a direita), teremos dados elaborados como mostra a Tabela 2.

Tabela 2: Percentual ordenado dos trabalhadores que contribuíram para o INSS em 20 cidades de uma determinada região do Brasil, no ano de 2008

41	46	51	57
41	46	51	58
42	50	52	58
44	50	52	60
45	50	54	60

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

***Rol** – dados classificados em forma crescente ou decrescente. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

Com base nessa tabela, podemos observar que a simples organização dos dados em um **rol*** aumenta muito o nível de informação destes. Na Tabela 2, você pode verificar ainda que o menor percentual foi 41% e o maior 60%, o que nos fornece uma **amplitude total*** da ordem de 19%.

***Amplitude total** – diferença entre o maior e o menor valor observado. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

Outra informação que podemos obter dos dados por meio da Tabela 2 (organizada em rol crescente) é que nas cidades avaliadas, o valor 50, correspondente à percentagem de trabalhadores que contribuíram para o INSS, ocorre com maior frequência, ou seja, é o que mais se repete.

Com base em nossa discussão, reflita: como organizar os dados de uma variável quantitativa contínua de forma mais eficiente, na qual se possa apresentar uma quantidade maior de informações? A resposta a essa pergunta será apresentada na próxima seção. Fique atento e, em caso de dúvidas, lembre-se de que você não está sozinho, basta solicitar o auxílio de seu tutor.

Distribuição de Frequências de uma Variável Quantitativa Contínua

Uma maneira de organizar os dados de uma variável quantitativa contínua (por exemplo, medidas de comprimento de uma amostra de 500 peças), tal que você possa melhor representá-la, é a **tabela de distribuição de frequências**, isto é, a tabela em que são apresentadas as frequências de cada uma das classes.

Distribuindo os dados observados em **classes*** e contando o número de observações contidas em cada classe, obtemos a **frequência de classe**. A disposição tabular dos dados agrupados em classes, juntamente com as frequências correspondentes, é o que denominamos de distribuição de frequência.

*Classes – intervalos nos quais os valores da variável analisada são agrupados. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

Sendo assim, para identificarmos uma classe, devemos conhecer os valores dos **limites inferior e superior da classe** que delimitam o **intervalo de classe**.

Você pode estar se perguntando: como se constituem esses intervalos?

Vimos, no início do curso, os tipos de intervalos na Unidade 1 da disciplina *Matemática Básica*. Vamos relembrar rapidamente como é essa classificação dos intervalos:

- **Intervalos abertos**: os limites da classe (inferior e superior) não pertencem a mesma.
- **Intervalos fechados**: os limites da classe (superior e inferior) pertencem à classe em questão.
- **Intervalos mistos**: um dos limites pertence à classe e o outro não.

Você pode utilizar qualquer um deles. Porém, o intervalo mais utilizado e que usaremos como padrão na resolução dos problemas, é o intervalo misto, o qual é apresentado da seguinte forma:

$$43{,}5 \vdash 48{,}5$$

(o 43,5 está incluído e o 48,5 não está incluído no intervalo)

Esses valores de 43,5 e 48,5 foram escolhidos aleatoriamente, somente para demonstrar o formato do intervalo.

Para você entender melhor, acompanhe o exemplo a seguir, a partir dos dados da porcentagem de trabalhadores que contribuíram para o INSS. Com esses dados iremos construir uma distribuição de frequência e, ao longo desse exemplo, identificar, também, os conceitos presentes nessa distribuição.

Para darmos início a esse entendimento, é importante, antes, considerarmos que existem diversos critérios para a construção das classes das distribuições de frequências apresentados na literatura. No nosso caso, utilizaremos os critérios apresentados a seguir.

Para elaborar uma distribuição de frequência é necessário, inicialmente, determinar o **número de classes** (k) em que os dados serão agrupados. Por questões de ordem prática e estética, sugerimos utilizar de 5 a 20 classes. O número de classes (k) a ser utilizado pode ser calculado em função do número de observações (n), conforme é mostrado para você a seguir:

$$k = \sqrt{n}, \text{ para } n \leq 100$$
$$k = 5 \log n, \text{ para } n > 100$$

Retomemos o exemplo dos percentuais de trabalhadores que contribuíram para o INSS (Tabelas 1 e 2).

Considerando que nessa pesquisa $n = 20$ percentuais de trabalhadores que contribuem como INSS em 20 cidades, temos, então, o número de classes definido por $k = \sqrt{n} = \sqrt{20} = 4{,}47$. Como o número de classes é inteiro, usaremos 5 classes. O arredondamento utilizado nesse material é o padrão de algarismos significativos (como

foi aprendido no segundo grau). O número de classes pode também ser definido de uma forma arbitrária, sem o uso dessa regra.

Após determinarmos o número de classes (k) em que os dados serão agrupados, determinamos a **amplitude do intervalo de classe (c)**. E, para calcularmos essa amplitude, vamos, primeiramente, calcular a **amplitude total dos dados (A)**, **que corresponde à diferença entre o maior valor e o menor valor observados**.

No nosso caso (usando dados da Tabela 2), teremos A = 60 – 41 =19%.

Com base nesse valor da amplitude total (A) calculado iremos obter a amplitude do intervalo de classe (c), como é mostrado a seguir:

$$c = \frac{A}{k-1}$$

Onde:

c = amplitude de classe;

A= amplitude total; e

k = número de classes.

Substituindo os valores já encontrados nessa expressão e considerando o caso do exemplo que estamos resolvendo, teremos:

$$c = \frac{19}{5-1} = 4{,}75 \cong 5\,\%$$

Mas atenção: existem outros procedimentos para a determinação da amplitude do intervalo de classe que podem ser encontrados na literatura.

Conhecida a amplitude de classes, devemos determinar os intervalos de classe. O limite inferior e superior das classes deve ser escolhido de modo que o menor valor observado esteja localizado no **ponto médio (PM)** da primeira classe. O ponto médio da classe corresponde à soma dos limites inferior e superior dividida por dois.

Partindo desse raciocínio, o limite inferior da primeira classe será:

$$\text{Limite inf. } 1^{a} \text{ classe} = \text{menor valor} - \frac{c}{2}$$

No nosso caso, substituindo os valores que encontramos anteriormente, teremos:

$$\text{Limite inf. } 1^{a} \text{ classe} = 41\% - \frac{5\%}{2} = 38{,}5\ \%$$

Definindo, então, o limite inferior da primeira classe, basta, para obtermos as classes da nossa distribuição, somarmos a amplitude do intervalo de classe (c = 5) a cada limite inferior.

Assim, teremos:

38,5 ⊢ 43,5 ➔ primeira classe;
43,5 ⊢ 48,5 ➔ segunda classe;
48,5 ⊢ 53,5 ➔ terceira classe;
53,5 ⊢ 58,5 ➔ quarta classe;
58,5 ⊢ 63,5 ➔ quinta classe.

Com base nesse cálculo, podemos obter uma organização dos dados conforme mostra a Tabela 3:

Tabela 3: Distribuição de frequências do percentual dos trabalhadores que contribuem com o INSS em 20 cidades de uma determinada região do Brasil no ano de 2008

Classes (%)	Frequência
38,5 ⊢ 43,5	?
43,5 ⊢ 48,5	?
48,5 ⊢53,5	?
53,5 ⊢ 58,5	?
58,5 ⊢ 63,5	?
Total	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Na Tabela 3 aparece uma nova denominação chamada "frequência", em que abaixo dela há uma coluna repleta de interrogações (?). Vamos aprender a calcular valores no lugar dessas interrogações. Podemos obter frequências chamadas de **frequência absoluta** (fa), **frequência relativa** (fr) e **frequência acumulada** (fac).

A **frequência absoluta (fa)** corresponde ao número de observações que temos em uma determinada classe ou em um determinado atributo de uma variável qualitativa. A **frequência relativa (fr)** corresponde à proporção do número de observações em uma determinada classe em relação ao total de observações que temos. Essa frequência pode ser expressa em termos percentuais. Para isso, basta multiplicar a frequência relativa obtida por 100.

O cálculo da frequência relativa é obtido por meio da seguinte expressão:

$$fr_i = \frac{fa_i}{\sum_{i=1}^{n} fa_i}$$

Sendo:

fa_i = frequência absoluta da classe i.

$\sum_{i=1}^{n} fa_i$ somatório das frequências absolutas para i variando de 1 até n classes, ou seja, soma as frequências de cada uma das classes $(fa_1 + fa_2 + fa_3 + ... + fa_n)$, obtendo-se o total de observações.

Apresentando os dados na forma de distribuição de frequência, você consegue sintetizar as informações contidas neles, além de facilitar sua visualização. Considerando essa discussão, elaboramos a Tabela 4, que traz as frequências (fa e fr) relacionadas à variável analisada.

Tabela 4: Distribuição de frequências do percentual dos trabalhadores que contribuíram para o INSS em 20 cidades de uma determinada região do Brasil, no ano de 2008

Classes (%)	FA (cidades)	FR (proporção de cidades)
38,5 ⊢ 43,5	3	0,15
43,5 ⊢ 48,5	4	0,20
48,5 ⊢ 53,5	7	0,35
53,5 ⊢ 58,5	4	0,20
58,5 ⊢ 63,5	2	0,10
Total	20	1,00

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Para calcularmos a primeira proporção de 0,15, precisamos dividir a frequência da primeira classe (3) pelo total de observações (20). De forma similar, são calculadas as proporções das outras classes.

Então, como ficaria a interpretação da distribuição de frequências?

Se considerarmos ainda a Tabela 4, podemos dizer que os municípios com a porcentagem de trabalhadores que contribuíram para o INSS entre 43,5% e 58,5%, dentre os 20 avaliados, totalizam 15 (4+7+4), e estão concentrados nas classes segunda, terceira e quarta.

A apresentação dos dados em forma de distribuição de frequência facilita o cálculo manual de várias medidas estatísticas de interesse e facilita, também, a apresentação gráfica dos dados.

Além das frequências absolutas e relativas, muitas vezes podemos estar interessados na quantidade de observações que existe acima ou abaixo de um determinado ponto na distribuição.

Dessa forma, poderemos trabalhar com a **frequência acumulada**, como sugere a Tabela 5, que apresenta as frequências acumuladas da percentagem de trabalhadores que contribuíram para o INSS nas 20 cidades avaliadas.

A **frequência acumulada** corresponde à soma da frequência de uma classe às frequências de todas as classes abaixo dela.

A frequência acumulada apresentada na Tabela 5 pode ser obtida da seguinte forma: abaixo do limite superior da primeira classe (43,5), temos três pessoas presentes nela, como vimos na Tabela 3 da distribuição de frequências absolutas. Quando consideramos a segunda classe (43,5 ⊢ 48,5), a frequência acumulada corresponde ao número de pessoas que temos abaixo do limite superior dessa classe (48,5),

ou seja, pessoas das quatro cidades da segunda classe mais as três cidades da primeira classe, totalizando sete cidades abaixo de 48,5%. Para as outras classes, o raciocínio é semelhante.

Tabela 5: Distribuição de frequência acumulada dos trabalhadores que contribuem com o INSS em 20 cidades de uma determinada região do Brasil no ano de 2008

Classes (%)	Freq. acumulada	Freq. acumulada (relativa)
38,5 ⊢ 43,5	3	0,15
43,5 ⊢ 48,5	7	0,35
48,5 ⊢53,5	14	0,70
53,5 ⊢ 58,5	18	0,90
58,5 ⊢ 63,5	20	1,00
Total		

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Já o valor da frequência acumulada relativa da segunda classe (0,35) é dado pela soma da frequência relativa da primeira classe (0,15) e da frequência relativa da segunda classe (0,20).

Os valores das frequências que você usou para somar estão na Tabela 3. Em caso de dúvida, reveja a tabela.

Distribuição de Frequências de uma Variável Qualitativa

Quando você trabalha com variáveis qualitativas, os atributos são as variações nominativas da variável. A construção da tabela consiste em contar as ocorrências dos níveis de cada atributo. O resultado da contagem define a frequência absoluta do atributo. Para podermos entender isso, tomemos como exemplo uma pesquisa na qual se procurou avaliar as frequências de cada gênero (homem ou mulher) de uma determinada cidade, que considera os serviços prestados pela prefeitura como satisfatórios, em uma amostra de 50 pessoas. Esses resultados são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6: Distribuição de frequências do gênero de pessoas que consideram os serviços prestados pela prefeitura como satisfatórios

GÊNERO	FA	FR
Masculino	20	0,40
Feminino	30	0,60
Total	50	1,00

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Distribuição de Frequências de uma Variável Quantitativa Discreta

Vimos esse conceito na Unidade 1. Em caso de dúvida, retorne e faça uma releitura atenciosa.

Tomando-se como exemplo o caso de uma variável aleatória discreta (v.a), realizou-se uma pesquisa durante 30 dias de um determinado mês com relação ao número de reclamações (N.R.) no setor de tributos de uma prefeitura considerada um modelo de gestão em tributos. Os resultados encontrados você pode acompanhar na Tabela 7, a seguir:

Tabela 7: Dados referentes ao número de reclamações (NR) por dia no setor de tributos de uma prefeitura ao longo de 30 dias

DIA	N.R.	DIA	N.R.	DIA	N.R.	DIA	N.R.	DIA	N.R.
1	0	7	1	13	0	19	1	25	0
2	2	8	2	14	0	20	0	26	3
3	1	9	2	15	1	21	0	27	4
4	5	10	3	16	2	22	2	28	0
5	3	11	0	17	3	23	0	29	2
6	2	12	3	18	5	24	4	30	1

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Dispondo esses dados em um rol (crescente) temos:

0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 5 5

Podemos apresentar, a seguir, esses dados em uma distribuição de frequências. Nesse caso, não é necessário definir intervalos de classes porque a variação dos valores é pequena (varia de 0 a 5) e a variável é discreta.

Quando a variável é discreta, mas você tem uma quantidade muito grande de valores que ocorrem na amostra, então, você irá trabalhar com uma distribuição de frequências em classes.

Na Tabela 8, você pode visualizar a distribuição de frequências do número de reclamações. Os cálculos das frequências absoluta e relativa são obtidos de forma semelhante à que foi vista anteriormente.

Tabela 8: Número de reclamações ocorridas diariamente durante certo mês

Número de reclamações por dia	Número de dias (fa)	Freq. relativa
0	9	0.3
1	5	0.17
2	7	0.23
3	5	0.17
4	2	0.07
5	2	0.07
Total	30	1

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Observe que esses valores da variável discreta correspondem a cada uma das classes.

Será que as tabelas de distribuição de frequências são a única forma que você tem de apresentar um conjunto de dados?

Para descobrir a resposta à sua curiosidade, continue lendo o livro, pois essa resposta está na próxima seção.

Para você construir gráficos e distribuições de frequência, baixe o programa estatístico Bioestat, que, além de ser gratuito, traz um livro na opção "ajuda". Para isso, visite o *site*: <http://www.mamiraua.org.br/downloads/programas>. Acesso em: 20 jan. 2014.

Representação Gráfica

Na tentativa de responder ao seu questionamento anterior, vamos falar um pouco sobre algumas formas de representação gráfica de tabelas de frequência. Logicamente, dependendo do tipo de variável, temos um gráfico mais adequado. Os diferentes tipos de gráficos (histogramas, polígonos de frequência, ogivas, gráficos de setores, pictogramas e outros) permitem melhor visualização de resultados. Esses gráficos podem ser obtidos utilizando-se planilhas eletrônicas, como o Excel ou a planilha Calc do OpenOffice.

Para saber como utilizar a planilha Calc do pacote OpenOffice nas distribuições de frequências e de gráficos, acesse o *site*: <http://www.ufpa.br/dicas/open/calc-ind.htm>. Acesso em: 20 jan. 2014.

Os **histogramas** são gráficos constituídos por um conjunto de retângulos com as bases assentadas sobre um eixo horizontal, tendo o centro delas no ponto médio da classe que as representa e cuja altura é proporcional à frequência da classe. Esses gráficos são utilizados para representar tabelas intervalares.

Na Figura 8, temos o histograma da porcentagem de trabalhadores que contribuíram para o INSS em cada uma das 20 cidades analisadas. Os dados utilizados nesse gráfico são os da distribuição de frequências apresentados na Tabela 5, que indica o percentual de trabalhadores que contribuíram para o INSS em 20 cidades de uma determinada região do Brasil em 2008.

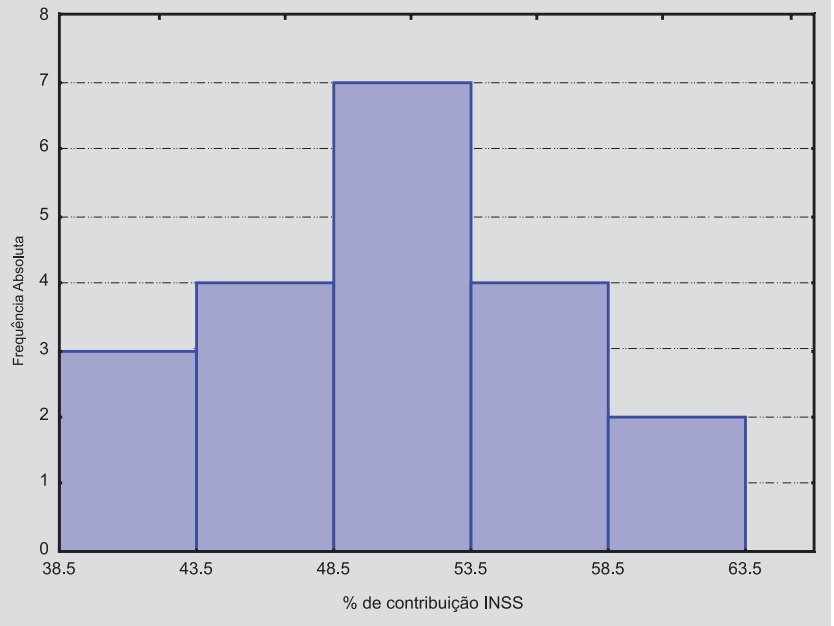


Figura 8: Histograma representativo da distribuição de frequências do percentual dos trabalhadores que contribuíram para o INSS em 2008
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Quanto ao **polígono de frequência**, você pode obtê-lo pela simples união dos pontos médios dos topos dos retângulos de um histograma. Para completar o polígono é necessário unir as extremidades da linha que une os pontos representativos das frequências de classe aos pontos médios das classes imediatamente anteriores e posteriores às classes extremas, que têm frequência nula.

A Figura 9 mostra o polígono de frequências do percentual dos trabalhadores que contribuíram para o INSS em 20 cidades de uma determinada região do Brasil em 2008.

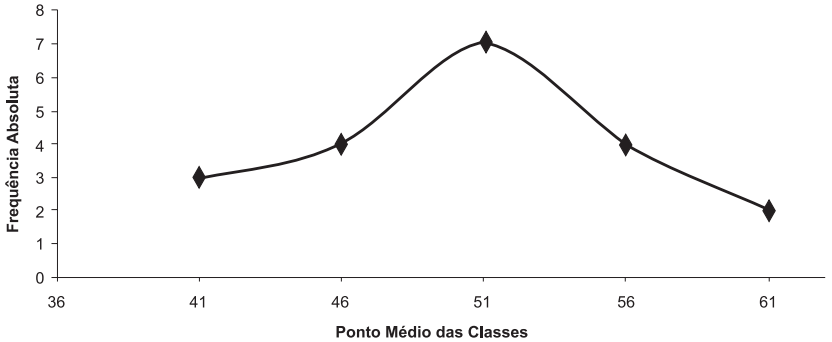


Figura 9: Polígono de frequências do percentual dos trabalhadores que contribuíram para o INSS em 2008
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Quando você tem uma tabela que é trabalhada com uma variável qualitativa, o tipo de gráfico adequado para apresentar os resultados é o gráfico de setores, também popularmente conhecido como gráfico tipo pizza (Figura 10). Sua construção é simples: sabemos que o angulo de 360º equivale a 100% da área da circunferência; assim, para obtermos o ângulo do setor cuja área representa uma determinada frequência, basta resolvermos uma regra de três simples, como a apresentada a seguir:

360º _____ 100%

xº _____ Frequência relativa (percentual)

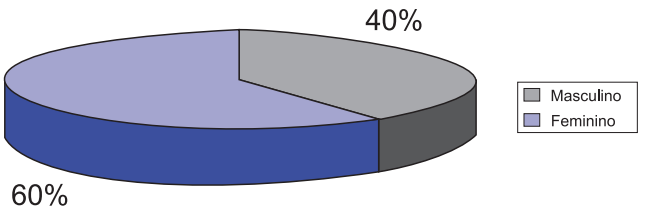


Figura 10: Gráfico do gênero de pessoas que consideram os serviços da prefeitura satisfatórios
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

No gráfico de pizza anterior, a fatia do gênero masculino corresponde a um ângulo de 144^0 e a do gênero feminino a um ângulo de 216^0.

Com respeito aos gráficos chamados de **ogivas**, estes correspondem a um polígono de frequências acumuladas, no qual estas são localizadas sobre perpendiculares levantadas nos limites superiores das classes, sendo os pontos unidos para formar o polígono que representa as frequências. Observe o modelo apresentado na Figura 11.

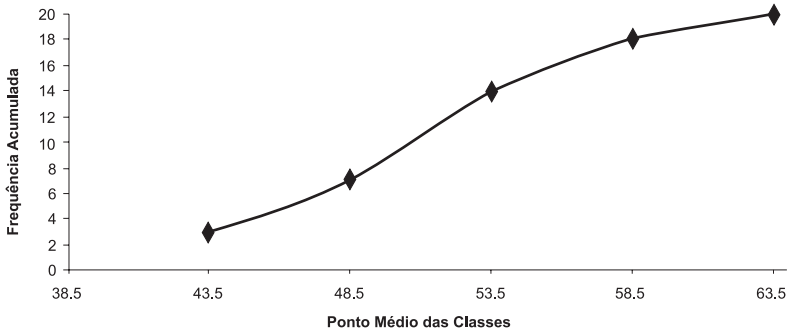


Figura 11: Ogiva "abaixo de" do percentual dos trabalhadores que contribuíram para o INSS em 20 cidades de uma determinada região do Brasil em 2008
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Após o estudo da construção de distribuições de frequências e gráficos, você deve ser capaz de organizar um conjunto de dados, por meio de uma distribuição de frequências (absoluta, relativa e acumuladas), e representá-lo graficamente. Para tanto, propomos a você um exemplo comentado para melhor fixar os conhecimentos adquiridos.

Para você fazer cálculos de distribuições de frequências e gráficos, utilize a planilha Calc do pacote OpenOffice disponível no *site*: <http://www2.ufpa.br/dicas/open/oo-ind.htm>. Acesso em: 20 jan. 2014.

Exemplo

Uma amostra de valores de IPTU de uma determinada região da cidade de Arapongas, no ano passado, revelou valores iguais a: {68,98; 72,92; 89,19; 98,57; 123,34; 134,80; 141,34; 153,59; 158,59; 165,92; 169,21; 175,76; 177,79; 178,07; 180,38; 181,99; 185,95; 188,83; 194,88; 208,09; 214,66; 251,94; 265,70; 271,90; 276,59; 280,56; 303,99; 318,33}. Com base nos dados fornecidos, vamos construir a tabela de distribuição de frequência.

Para construí-la, primeiro precisamos encontrar: o número de classes, a amplitude total, a amplitude de classe e o limite inferior da primeira classe.

O número de classes é dado por: $k = \sqrt{n}$, pois o tamanho da amostra é menor ou igual a 100. Como n = 28, temos:

$k = \sqrt{28} \cong 6$

Nesse caso, aproximamos para seis classes e não para cinco, pois com cinco teremos valores superiores que podem ficar sem classe.

A amplitude total (A) é a diferença entre o maior valor e o menor valor observados. Substituindo os valores, encontraremos:

$$A = 318{,}33 - 68{,}98 = 249{,}35$$

Sendo assim, a amplitude de classe será:

$c = \dfrac{A}{k-1}$ e, substituindo os valores correspondentes, teremos:

$$c = \frac{249{,}35}{6-1} = 49{,}87$$

Logo, o limite inferior da primeira classe é dado por:

$$LI_{1^a} = menor\ valor - \frac{c}{2}$$

$LI_{1^a} = 68{,}98 - \dfrac{49{,}87}{2} = 44{,}04$ (esse é o primeiro valor a ser colocado na tabela).

Agora, a partir desse limite inferior, podemos construir a tabela de distribuição de frequência. Para preencher a coluna classes, começamos com o limite inferior da primeira classe, lembrando que para encontrar o limite superior das classes basta somar a amplitude de classe (c) ao limite inferior. **Agora é com você.** Termine de calcular os limites de cada uma das classes.

44.04 + 49,87 = 93,91

93,91 + 49,87 = 143,78

↓

293,39 + 49,87 = 343,26

Após esse cálculo, vamos encontrar os valores da coluna frequência absoluta (Fa) e, para tanto, temos que contar quantos elementos da amostra pertencem a cada classe que acabamos de construir. Vamos lá:

- **Primeira classe**: 44,04 (inclusive) a 93,91 (exclusive). Do conjunto de dados, os valores que pertencem a esse intervalo são: 68,98; 72,92; 89,19; ou seja, três valores.
- **Segunda classe**: 93,91 (inclusive) a 143,78 (exclusive). Do conjunto de dados, os valores que pertencem a esse intervalo são: 98,57; 123,34; 134,80; 141,34; ou seja, quatro valores.

E, assim, procedemos até encontrarmos as frequências das seis classes. Feita essa operação, é hora de calcularmos a coluna da frequência relativa da classe i (Fri), onde temos:

$$F_{ri} = \frac{F_i}{n}$$

$$F_{r1} = \frac{3}{28} \cong 0{,}11$$

$$F_{r2} = \frac{4}{28} = 0{,}14$$

Você deve proceder da mesma forma até a última classe e, após todos os cálculos, deve terminar de completar os valores para a montagem final da distribuição de frequências. Lembre-se de que o preenchimento da coluna frequência acumulada (Fac) corresponde à

soma da frequência daquela classe às frequências de todas as classes anteriores a ela. Observe a Tabela 9.

Tabela 9: Distribuição de frequências de valores de IPTU de uma determinada região da cidade de Arapongas

Classes			Fa	Fr_i	Fac
44,04	⊢	93,91	3	0,11	3
93,91	⊢	143,78	4	0,14	7
143,78	⊢	193,65	-	-	-
193,65	⊢	243,52	-	-	-
243,52	⊢	293,39	-	-	-
293,39	⊢	343,26	-	-	-
Total			28	1,0	

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Exemplo

Imagine que a área de supervisão de atendimento de controle de uma prefeitura verificou a quantidade de materiais que foram rejeitados em quilograma (kg) da fábrica Manda Brasa S.A., que havia vencido uma licitação conforme os resultados apresentados na Tabela 10.

Tabela 10: Frequência dos materiais rejeitados da fábrica Manda Brasa S.A.

Rejeitos (em kg)			F_i
2	⊢	8	3
8	⊢	14	7
14	⊢	20	18
20	⊢	26	15
26	⊢	32	4
32	⊢	38	3
Total			50

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Com base nos dados, vamos construir o histograma para as frequências apresentadas. Para tanto, basta colocarmos no eixo x os intervalos de classe e no eixo y as frequências, como mostra a Figura 12.

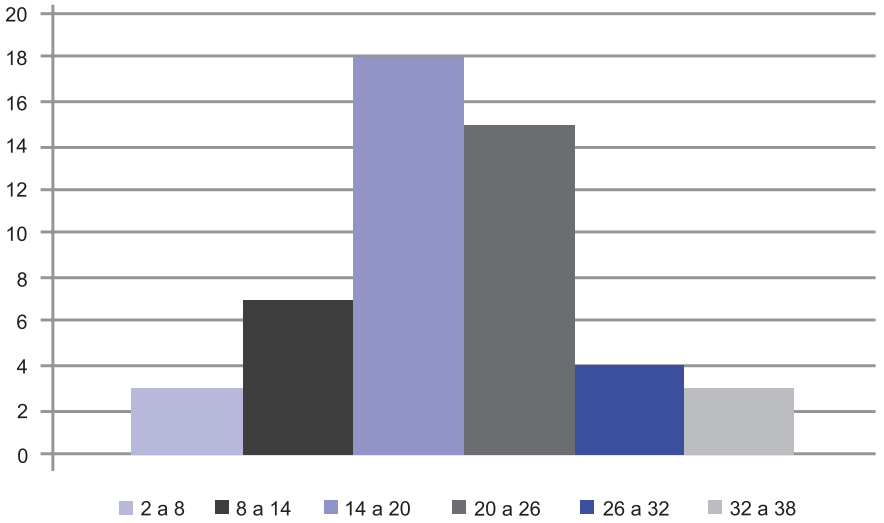


Figura 12: Histograma da frequência de materiais rejeitados da fábrica Manda Brasa S.A.
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Resumindo

Nesta Unidade, você aprendeu a representar um conjunto de observações e resumi-lo em tabelas e gráficos. Esses conceitos serão importantes na compreensão e no entendimento de um conjunto de dados.

Atividades de aprendizagem

Agora que você já viu os conceitos relacionados a distribuições de frequências e a representação gráfica de um conjunto de observações, faça a atividade proposta a seguir. Em caso de dúvida, lembre-se de que você tem um tutor pronto a lhe auxiliar.

1. Dado o tempo, em minutos, de reuniões em um setor de uma prefeitura, conforme mostra a tabela, responda às questões a seguir:

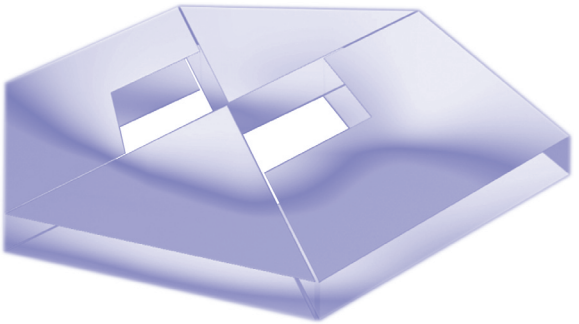
60	55	42	57
40	28	44	28
40	30	55	35
25	55	40	38
50	55	40	60

   a) Construa a distribuição de frequências absoluta, relativa e acumulada.

   b) Faça o histograma e o polígono de frequências da distribuição.

UNIDADE 3

Medidas de Posição e Dispersão



Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade, você deverá ser capaz de:

- Calcular e interpretar as medidas de posição média, moda e mediana;
- Entender como as medidas de posição influenciam na forma da distribuição dos dados;
- Calcular e interpretar as medidas de dispersão, amplitude total, variância, desvio padrão e coeficiente de variação;
- Entender as propriedades da média e o desvio padrão; e
- Calcular e interpretar resultados de medidas separatrizes.

Medidas de posição

Caro estudante,

A partir de agora você vai conhecer uma nova forma de caracterizar um conjunto de observações. Para isso, vai aprender novos conceitos de medidas de posição e de dispersão.

Para o entendimento dessas medidas de posição e de dispersão, serão utilizadas as duas situações apresentadas a seguir. Sempre que mencionarmos as situações, você deve vir até esta página para entender como estão sendo realizados os cálculos.

Preparado para mais esse desafio?

Então, vamos lá!

Vamos iniciar nossa discussão pelas duas situações que utilizaremos como base.

- Para facilitar um projeto de aplicação da rede de esgoto de certa região de uma cidade, os engenheiros da Prefeitura Municipal tomaram uma amostra de 52 ruas, (tamanho total da amostra ou a soma de todas as frequências absolutas) contando o número de casas por rua. Os dados referentes a uma pesquisa de mercado foram agrupados como constam na Tabela 11:

Tabela 11: Distribuição de frequências do número de casas por rua de certa região de uma cidade

Número de casas por rua	Frequência absoluta
0 ⊢ 2	5
2 ⊢ 4	7
4 ⊢ 8	11
8 ⊢ 12	16
12 ⊢ 16	8
16 ⊢ 20	5

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

- Taxa de efetivação da cobrança de um determinado tributo que se apresentava atrasado em uma prefeitura após uma campanha realizada para que ele fosse saldado. Esses resultados são diários e correspondem a percentuais de cobranças bem-sucedidas, conforme mostra a Tabela 12.

Tabela 12: Taxa de efetivação da cobrança

44	46	51	54	54	55	56	56	56
58	59	60	61	61	61	62	63	63

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Convém destacarmos ainda que as medidas de posição ou de tendência central constituem uma forma mais sintética de apresentar os resultados contidos nos dados observados, pois representam valores centrais, em torno dos quais os dados se concentram. As medidas de tendência central mais empregadas são a média, a mediana e a moda. A seguir, veremos cada uma delas.

Para você fazer cálculos de medidas de posição e de dispersão utilize o programa estatístico Bioestat 5.0 e, também, planilhas eletrônicas visitando o *site*: <http://www.juliobattisti.com.br/tutoriais/celsonunes/openoffice007.asp>. Acesso em: 20 jan. 2014.

Média

Das três medidas de posição mencionadas, a **média aritmética** é a mais usada por ser a mais comum e mais compreensível delas e pela relativa simplicidade do seu cálculo, além de prestar-se bem ao tratamento algébrico.

É importante termos claro que a **média aritmética** ou simplesmente média de um conjunto de n observações, x_1, x_2, ..., x_n, é definida por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Onde o somatório ($\sum$) corresponde à soma de todos os valores obtidos. Por exemplo, considerando o caso da taxa de efetivação (%) da cobrança de um determinado tributo que está atrasado em uma prefeitura (ver Tabela 12), se somarmos todos os valores do número das taxas e dividi-los pelo total de dias avaliados, teremos, então, a **média aritmética** (x), a taxa de efetivações de cobrança por dia. Logo, o valor obtido será: x = 56,67% (Obs.: Essa média é um percentual porque é a média de percentuais diários).

Como podemos, então, fazer a interpretação da média?

Poderíamos interpretar o resultado da média como sendo o número de efetivações diárias, caso este percentual fosse igual nos 20 dias avaliados. Na prática, em cada dia, podem ocorrer taxas maiores, menores ou até iguais ao valor médio encontrado.

Portanto, de uma forma mais geral, podemos interpretar a média como sendo um valor típico do conjunto de dados que pode assumir um valor que não pertence a esse conjunto, pois nos dados utilizados para cálculo (exemplo anterior) não existe um taxa de efetivação diária de 56,67%.

Todavia, se os dados estiverem agrupados na forma de uma distribuição de frequência em classes, lançamos mão da **Hipótese Tabular Básica*** para o cálculo da média.

Então, você irá calcular a média por meio da seguinte expressão:

***Hipótese Tabular Básica** – todas as observações contidas em uma classe são consideradas iguais ao ponto médio da classe. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i fa_i}{\sum_{i=1}^{n} fa_i}$$

Onde:

x_i é o ponto médio da classe i;

fa_i representa frequência absoluta da classe i; e

considerando a situação do número de casas na rua (Tabela 11), a média será dada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i fa_i}{\sum_{i=1}^{n} fa_i} = \frac{(1\times.5)+(3\times 7)+\ldots+(18\times 5)}{5+7+\ldots+5} = 8{,}73 \ casas$$

O valor de 1, apresentado na expressão, corresponde ao ponto médio da primeira classe, que foi obtido pela soma dos limites superior e inferior (0 + 2) dividida por dois, ou seja, a média aritmética. Os pontos médios das outras classes são obtidos de forma similar.

Antes de darmos continuidade, é muito importante você saber que, em relação à notação matemática, quando calculamos a média a partir dos dados de uma população, devemos utilizar a letra μ para designar a média populacional; e para média amostral a notação a ser utilizada é $\bar{x}$. Na grande maioria dos casos, iremos trabalhar com amostras. A forma de cálculo é a mesma nas duas situações, mas as notações são diferentes, ou seja:

Média populacional ➔ μ

Média amostral ➔ $\bar{x}$

As médias são comumente utilizadas e apresentam propriedades específicas. As principais propriedades são:

- A soma dos **desvios*** de um conjunto de dados em relação a sua média é nula, ou seja, igual a zero.

***Desvios** – diferenças entre cada valor e um valor padrão, que pode ser a média. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

Para entender essa propriedade, tomemos como exemplo a quantidade consumida de arroz do tipo A em um refeitório de uma prefeitura: 10, 14, 13, 15, 16, 18, 12 quilos, nas quais o consumo médio diário encontrado foi de 14 quilogramas (Kg).

A soma dos desvios será:

$$(10 - 14) + (14 - 14) + (13 - 14) + (15 - 14) + (16 - 14) + (18 - 14) + (12 - 14) = 0$$

- Com a soma ou a subtração de uma constante (c) a todos os valores de uma variável, a média do conjunto fica aumentada ou diminuída dessa constante. Assim, voltando ao caso do consumo de arroz, apresentado no tópico anterior, se somarmos 2 a cada um dos valores (10, 14, 13,...), teremos a seguinte nova média:

$$Y = (12 + 16 + 15 + 17 + 18 + 20 + 14) / 7 = 16 \text{ kg ou}$$
$$Y = 14 + 2 = 16 \text{ kg}$$

- Na multiplicação ou na divisão de todos os valores de uma variável por uma constante (c), a média do conjunto fica multiplicada ou dividida por essa constante. Novamente pensando no caso do consumo de arroz, se multiplicarmos por 3 cada um dos valores, teremos nova média:

$$Y = (30 + 42 + 39 + 45 + 48 + 54 + 36) / 7 = 42 \text{ kg ou}$$
$$Y = 14 \cdot 3 = 42 \text{ kg}$$

Existem outros tipos de médias que podemos utilizar: média ponderada (utilizada quando existe algum fator de ponderação); e media geométrica (quando os dados apresentam uma distribuição que não é simétrica), entre outras.

Às vezes, podemos, ainda, associar às observações $X_1, X_2, ..., X_n$ determinadas ponderações, ou pesos, $W_1, W_2, ..., W_n$ que dependem da importância atribuída a cada uma das observações. Nesse caso, a média ponderada será dada por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \, w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Para entender melhor, imagine um processo de avaliação de funcionários públicos que foi divido em três etapas. Nessa avaliação, suponha que um dos colaboradores apresentou as seguintes notas durante a avaliação: 1ª etapa = 90; 2ª etapa = 70; 3ª etapa = 85; e os pesos de cada etapa são: 1, 1 e 3, respectivamente. Qual o escore médio final do funcionário público?

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \, w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{(1 \times 70) + (1 \times 90) + (3 \times 85)}{1 + 1 + 3} = \frac{415}{5} = 83$$

Outro tipo de média é a geométrica (Mg), calculada pela raiz enésima do produto de um conjunto de n observações, X_1, X_2, ... , X_n, associadas às frequências absolutas f_1,f_2,..., f_n (número de vezes que aquele valor acontece), e respectivamente dada por:

$$Mg = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \ldots \times x_n^{f_n}}$$

Este tipo de média você irá utilizar na disciplina *Matemática Financeira e Análise de Investimentos*, que trabalharemos no próximo módulo.

Sendo assim, considerando o caso da taxa de efetivação para pagamento do tributo atrasado (exemplo apresentado anteriormente), teremos:

$$Mg = \sqrt[18]{44^1 \times 46^1 \times 51^1 \times 54^2 \times \ldots\ldots\ldots \times 61^3 \times 62^1 \times 63^2} = 56{,}40\%$$

Moda

Em algumas situações, você verá que é necessária a informação do número de observações que mais ocorre em um conjunto de dados. No caso da taxa de efetivação da cobrança, verificamos que as taxas que mais ocorrem são 56 e 61. Assim, podemos definir a

moda (Mo) como sendo o valor em um conjunto de dados que ocorre com maior frequência. Um conjunto de dados pode ser em relação à moda:

- unimodal ➔ possui apenas uma moda;
- amodal ➔ não possui moda, pois não existe nenhum valor que ocorre com maior frequência; e
- multimodal ➔ possui mais de uma moda.

Na situação comentada anteriormente, a distribuição é multimodal ou bimodal, pois apresenta duas modas, ou seja, dois valores com maior frequência, 56 e 61.

Quando os dados não estão em intervalos de classes, basta olhar o valor que ocorre com maior frequência.

Para dados agrupados em intervalos de classes, você pode calcular a moda por meio do método de Czuber, que se baseia na influência das classes adjacentes na moda deslocando-se no sentido da classe de maior frequência. A expressão que você utilizará é:

$$Mo = L_i + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times c$$

Onde:

L_i : limite inferior da classe modal;

d_1 : diferença entre a frequência da classe modal e a frequência da classe imediatamente anterior;

d_2 : diferença entre a frequência da classe modal e a frequência da classe imediatamente posterior; e

c : amplitude da classe modal.

No caso em que, para facilitar um projeto de aplicação da rede de esgoto de certa região de uma cidade, os engenheiros da Prefeitura Municipal tomaram uma amostra de 52 ruas, contando o número de casas (Tabela 11), veremos que a classe modal é a **quarta**, pois apresenta maior frequência (valor igual a 16). Utilizando a expressão mostrada anteriormente, teremos:

$$Mo = L_i + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times c = 8 + \frac{5}{5+8} \times 4 = 9,54 \ casas$$

Uma característica importante da moda é que ela não é afetada pelos valores extremos da distribuição, desde que esses valores não constituam a classe modal.

Dessa forma, a moda deve ser utilizada quando desejamos obter uma medida rápida e aproximada de posição ou quando a medida deva ser o valor mais frequente da distribuição.

Mediana

Outra medida de posição que você pode utilizar é a **mediana (Md)**, que consiste em um conjunto de valores dispostos segundo uma ordem (crescente ou decrescente). A mediana é o valor situado de tal forma no conjunto ordenado que o separa em dois subconjuntos de mesmo número de elementos, ou seja, 50% dos dados são superiores à mediana e 50% são inferiores.

O símbolo da mediana é dado por Md ou $\tilde{x}$, e a sua posição é dada por meio da expressão:

E (elemento central) = (n+1) / 2

Considerando um conjunto de dados com número ímpar de elementos (1, 2, 5, 9, 10, 12, 13), a posição da mediana será dada pela metade do número de elementos mais um e esta soma dividida por dois, por exemplo (7 + 1)/2 = 4ª posição. Portanto, a partir dos dados ordenados, o número que se encontra na 4ª posição é o 9 e, assim, a mediana será igual a 9 (temos três valores abaixo e três valores acima, ou 50% acima da mediana e 50% abaixo).

E, caso o número de elementos do conjunto de dados seja par, por exemplo, (1, 2, 6, 8, 9, 12, 11, 13) a posição da mediana será:

E = (8 + 1)/2 = 4,5ª posição

Como a posição 4,5ª está entre a 4ª e a 5ª posição, calculamos a média aritmética entre os valores que ocupam essas posições.

Nesse caso, o valor da mediana é de 8,5, porque é a média dos valores encontrados na 4ª e a 5ª posições, ou seja, vem de (8 + 9)/2.

Quando os dados estão agrupados, devemos encontrar a classe mediana. Se os dados estão agrupados em intervalos de classe, como no caso do número de casa por rua, utilizaremos a seguinte expressão:

$$Md = li + \left(\frac{(n/2) - f_{antac}}{f_{med}} \right) \times c$$

Onde:

li : limite inferior da classe mediana;

n : número total de elementos;

f_{antac} : frequência acumulada anterior à classe mediana;

f_{med} : frequência absoluta da classe mediana; e

c : amplitude da classe mediana.

Portanto, resolvendo o caso em que, para facilitar um projeto de aplicação da rede de esgoto de certa região de uma cidade, os engenheiros da Prefeitura Municipal tomaram uma amostra de 52 ruas, contando o número de casas por rua, veremos que a posição da mediana será dada por:

E = (52+1)/2 = 26,5º elemento, o qual está na quarta classe (8 ⊢ 12), que corresponde à classe mediana.

$$Md = li + \left(\frac{(n/2) - f_{antac}}{f_{med}} \right) \times c = 8 + \left(\frac{(52/2) - 23}{16} \right) \times 4 = 8{,}75 \ casas$$

Em um conjunto de dados, a mediana, a moda e a média não necessariamente devem apresentar o mesmo valor. Uma informação importante é que a mediana não é influenciada pelos valores extremos. Assim, para termos noção dos salários de uma empresa, é normalmente melhor usarmos a mediana dos salários, porque salários muito altos, apesar de mais raros, tendem a elevar muito a média salarial, tornando essa média menos representativa dos salários de um grupo de trabalhadores do que a mediana. Comparando os resultados encontrados para uma amostra em relação às medidas de posição estudadas e verificando

a inter-relação entre elas, podemos concluir que seus valores podem nos dar um indicativo da natureza da distribuição dos dados, em face das regras definidas pela Figura 13:

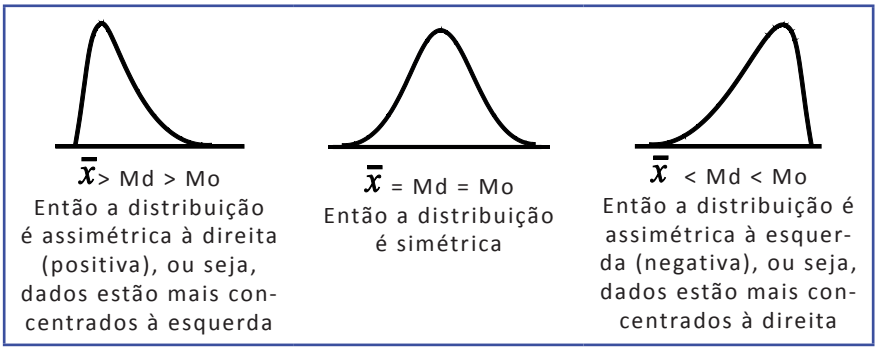


Figura 13: Natureza de distribuição de dados
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Baseando-se nas distribuições da figura 13, pense e responda:

1) Qual delas corresponde à distribuição típica dos salários de uma empresa?

2) Qual delas corresponde à distribuição de notas de qualidade de serviços de uma empresa em que a maioria dos avaliadores atribui notas altas, próximas do máximo da escala?

3) Qual delas corresponde à distribuição de alturas das pessoas na população humana?

Separatrizes

A principal característica das medidas separatrizes consiste na separação da série de dados ordenados em partes iguais que apresentam o mesmo número de valores. As principais são os quartis, os decis e os percentis.

Os **quartis** são valores que dividem um conjunto de dados ordenados em quatro partes iguais. São necessários, portanto, três quartis (Q_1, Q_2 e Q_3) para dividir um conjunto de dados ordenados em quatro partes iguais.

Q_1 : deixa 25% dos elementos abaixo dele.

Q_2 : deixa 50% dos elementos abaixo dele e coincide com a mediana.

Q_3 : deixa 75% dos elementos abaixo dele.

A Figura 14 mostra bem a divisão dos quartis. Observe.

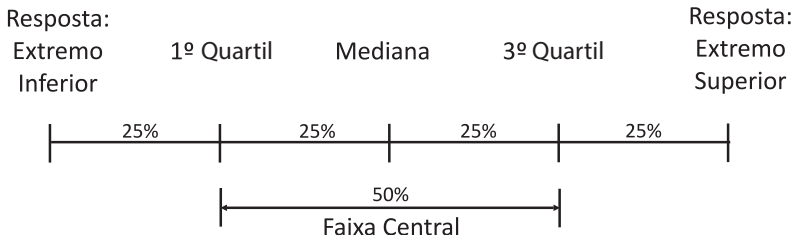


Figura 14: Representação dos quartis
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Se considerarmos a situação da taxa de efetivação da cobrança de um determinado tributo, que estava atrasado em uma prefeitura, após uma campanha realizada para que ele fosse saldado, teremos, de forma semelhante à Figura 14, a Figura 15:

Mínimo	Q_1	Q_2	Q_3	*Máximo*
44	54	57	61	63

Figura 15: Quartis da taxa de efetivação da cobrança de um determinado tributo
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Sendo assim, temos o cálculo da posição do elemento quartil dado por:

$$EQi = i.n/4 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Sendo n o número de elementos observados, a regra para obtenção dos valores dos quartis, a partir da posição encontrada, será dada por:

- quando n é ímpar, o arredondamento deve ser para cima da posição encontrada; e
- quando n é par, devemos fazer a média do valor encontrado e do subsequente.

Para melhor entendimento, elaboramos um exemplo para realizarmos juntos. Para tanto, considere a seguinte sequência de números para cálculo dos quartis: (5, 2, 6, 9, 10, 13, 15).

Agora precisamos ordenar o conjunto de dados e, então, temos: (2, 5, 6, 9, 10, 13, 15). Observe que temos um número ímpar de observações (n=7).

Sendo assim, obtemos a posição e, olhando no conjunto ordenado de dados, encontramos os valores dos quartis, conforme você pode observar a seguir.

$$EQ1 = 1.7/4 = 1{,}75 \cong 2^a \text{ posição} \Rightarrow Q1 = 5$$
$$EQ2 = 2.7/4 = 3{,}5 \cong 4^a \text{ posição} \Rightarrow Q2 = 9$$
$$EQ3 = 3.7/4 = 5{,}25 \cong 6^a \text{ posição} \Rightarrow Q3 = 13$$

Agora vamos a outro exemplo, e para tanto considere um conjunto de dados com uma quantidade par de observações, a saber: (1, 1, 2, 3, 5, 5, 6, 7, 9, 9, 10, 13) $\Rightarrow$ já ordenados. Então, temos:

$$EQ1 = 1.12/4 = 3^a \text{ posição} \Rightarrow Q1 = (2 + 3) / 2 = 2{,}5$$
$$EQ2 = 2.12/4 = 6^a \text{ posição} \Rightarrow Q2 = (5 + 6) / 2 = 5{,}5$$
$$EQ3 = 3.12/4 = 9^a \text{ posição} \Rightarrow Q3 = (9 + 9) / 2 = 9$$

Os **decis** são valores que dividem um conjunto de dados ordenados em dez partes iguais.

O cálculo de cada decil será obtido de forma semelhante ao dos quartis, sendo diferente apenas a expressão de sua obtenção, que será dada por:

Posição do elemento decil ➔ $EDi = i.n/10 \quad (i = 1, 2, \ldots, 9)$

Os **percentis** são valores que dividem um conjunto de dados ordenados em 100 partes iguais.

A posição de cada percentil será dada pela expressão a seguir, que é semelhante a dos quartis e a dos decis:

Posição do elemento percentil ➔ $EPi = in/100 \quad (i = 1, 2, \ldots, 99)$

Essas medidas separatrizes são importantes quando queremos dividir um conjunto de dados em parte iguais; por exemplo, em quatro partes; e, assim, você terá os quartis. Essa separação permite uma formação de grupos que podem apresentar um mesmo padrão,

quando, então, poderemos identificar perfis importantes para serem utilizados em diversas áreas da Administração.

Se nós calcularmos a média de cada cidade, teremos:

A ➔ $\bar{x}$ = 121 mil pessoas;
B ➔ $\bar{x}$ = 121 mil pessoas; *e*
C ➔ $\bar{x}$ = 121mil pessoas.

Note que as três cidades (A, B, C) apresentam médias iguais, apesar de serem bem diferentes entre si, pois enquanto na cidade B os dados são todos iguais, os das demais cidades apresentam certa variação, que é maior no conjunto C. Portanto, devemos associar medidas de posição e de dispersão para obtermos informações mais precisas de um conjunto de dados, ou seja, observar como esses dados se comportam em torno da medida de posição em questão.

Medidas de Dispersão

Como vimos anteriormente, é possível sintetizar um conjunto de observações em alguns valores representativos, como média, mediana, moda e separatrizes. Em várias situações, é necessário visualizar como os dados estão dispersos.

Tomando como exemplo algumas funções da área de Administração Pública que apresentem salários médios iguais, podemos concluir que sua contribuição social (% do salário) será a mesma?

A resposta é sim somente com base no salário médio; mas estaríamos chegando a uma conclusão errada, pois a variação em termos de faixas salariais pode ser diferente, apesar de apresentarem a mesma média.

Suponhamos três cidades: A, B e C, que foram avaliadas durante cinco anos quanto ao número de declarantes na distribuição de patrimônio na faixa de renda mensal de 8 a 10 mil reais. Esses números estão "em milhares" de pessoas.

A = {120, 122, 118, 124, 121}
B = {121, 121, 121, 121, 121}
C = {116, 125, 124, 120, 120}

Se nós calcularmos a média de cada cidade, teremos:

A ➔ $\bar{x}$ = 121 mil pessoas
B ➔ $\bar{x}$ = 121 mil pessoas
C ➔ $\bar{x}$ = 121mil pessoas

Note que as três cidades (A, B, C) apresentam médias iguais, apesar de serem bem diferentes entre si, pois enquanto na cidade B os dados são todos iguais, os das demais cidades apresentam certa variação, que é maior no conjunto C. Portanto, devemos associar medidas de posição e de dispersão para obtermos informações mais precisas de um conjunto de dados, ou seja, observar como esses dados se comportam em torno da medida de posição em questão.

Amplitude Total

A amplitude total é a diferença entre o maior e o menor valor observado, como vimos na Unidade 2.

Sendo assim, retomando nossos exemplos das cidades A, B e C, temos:

$A_A = 124 - 118 = 6$ mil pessoas
$A_B = 121 - 121 = 0$ mil pessoas
$A_C = 125 - 116 = 9$ mil pessoas

Desse modo, podemos identificar que a amplitude do conjunto C é bem maior do que a dos demais; e o conjunto B apresenta amplitude igual a zero.

Essa medida apresenta a vantagem de ser facilmente calculada. Entretanto, o seu inconveniente é ser é muito afetada pelos valores extremos, pois no seu cálculo não são consideradas todas as observações.

Variância

Uma boa medida de dispersão deve ter as seguintes características:

- estar baseada em todos os dados;
- ser facilmente calculada;
- ser compreensível; e

- servir bem ao tratamento algébrico.

Portanto, podemos afirmar que uma medida de dispersão deve utilizar todas as observações considerando os desvios de cada observação em relação à média (chamados erros ou desvios):

$$e_i = x_i - \bar{x}$$

Para obter um único número que represente a dispersão dos dados, pensamos, inicialmente, em obter a média desses desvios, mas devemos lembrar de que a soma dos desvios de um conjunto de dados em relação a sua média é nula.

Para resolver esse problema, utilizamos a soma dos quadrados dos desvios, pois, ao elevarmos cada desvio ao quadrado, eliminamos o sinal negativo que estava trazendo complicações e fazendo com que, no somatório, os desvios se anulassem.

Posteriormente, dividimos a soma dos quadrados dos desvios pelo número de observações para obtermos a variância populacional, chamada de σ^2. A variância é uma medida quantitativa da dispersão de um conjunto de dados em torno da sua média, além do fato de essa soma de quadrados de desvios ser mínima, uma vez que estes desvios são calculados em relação à média. Variâncias baixas, próximas de zero, correspondem a dados observados distribuídos próximos da média. Variâncias altas, dados dispersos longe da média.

Sendo assim, temos a expressão para cálculo da variância populacional, conforme mostrada a seguir:

$$V(x) = \sigma^2 = \frac{SQD}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i-1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

E não para por aí! Na maioria das vezes, trabalhamos com amostras e, nesse caso, a variância amostral (s^2) será obtida pela expressão:

$$S^2 = \frac{SQD}{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Veja que nesse caso a soma do quadrado dos desvios é dividida por n – 1, onde n corresponde ao tamanho da amostra. Esse valor n – 1 (número de observações menos um) é denominado de **grau de liberdade***.

O grau de liberdade é um estimador do número de categorias independentes em um teste particular ou experiência estatística. Assim, no caso das cidades teremos:

$$s_A^2 = \frac{(120-121)^2 + (122-121)^2 + \ldots\ldots + (121-121)^2}{4} = 5\ mil\ pessoas^2$$

$$s_B^2 = \frac{(121-121)^2 + (121-121)^2 + \ldots\ldots + (121-121)^2}{4} = 0\ mil\ pessoas^2$$

$$s_C^2 = \frac{(116-121)^2 + (125-121)^2 + \ldots\ldots + (120-121)^2}{4} = 13\ mil\ pessoas^2$$

Para que você entenda melhor, veja a seguir algumas das principais propriedades da variância:

- A variância de uma constante k é nula.

  $V(k) = 0$, k = constante.

- Ao somar ou ao subtrair uma constante k a todos os dados, a variância não se altera.

  $x' = x \pm k$

  $V(x') = V(x)$

- Multiplicando todos os dados por uma constante k, a variância é multiplicada por k^2.

  $x' = x.\ k$

  $V(x') = k^2.V(x)$

*Grau de liberdade – é o número de determinações independentes (dimensão ou tamanho da amostra) menos o número de parâmetros estatísticos a serem avaliados na população. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

Desvio Padrão

Um inconveniente da variância é que ela é expressa em unidades ao quadrado, ou seja, caso você esteja trabalhando com milhares de reais, o resultado será expresso em "milhares de reais²", o que causa algumas dificuldades de interpretação.

Para resolver esse problema, você pode utilizar o desvio padrão, que é definido como a raiz quadrada positiva da variância, sendo expresso na mesma unidade em que os dados foram coletados.

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (desvio padrão populacional)

$s = \sqrt{s^2}$ (desvio padrão amostral)

Para o exemplo em questão, temos:

$$s_A^2 = \sqrt{\frac{(120-121)^2 + (122-121)^2 + ...+ (121-121)^2}{4}} = 2{,}24 \ mil \ pessoas$$

$$s_B^2 = \sqrt{\frac{(121-121)^2 + (121-121)^2 + ... + (121-121)^2}{4}} = 0 \ mil \ pessoas$$

$$s_C^2 = \sqrt{\frac{(116-121)^2 + (125-121)^2 + ... + (120-121)^2}{4}} = 3{,}60 \ mil \ pessoas$$

Interpretando, vemos que: o desvio padrão de 3,60 mil pessoas nos indica a variação dos dados em torno da média, que é de 121 mil pessoas. Quanto menor for o desvio padrão, menor será a variabilidade, ou a variação.

No caso de dados agrupados em classes, a expressão utilizada para cálculo do desvio padrão será:

$$s^2 = \sqrt{\frac{SQD}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 . f_{ai}}$$

Para que você entenda melhor, vamos imaginar uma situação em que, para facilitar um projeto de aplicação da rede de esgoto de certa região de uma cidade, os engenheiros da Prefeitura Municipal tomaram uma amostra de 52 ruas (Tabela 11), contando o número de casas por rua, na qual os dados estão agrupados em classes. Iremos calcular o desvio padrão da seguinte maneira:

$$s^2 = \sqrt{\frac{1}{52-1}\left((1-8{,}73)^2 5 + (3-8{,}73)^2 7 + ... + (18-8{,}73)^2 5\right)} = 5{,}075 \ casas$$

Com base nessa resolução, os números 1, 3 e 18 correspondem aos pontos médios das classes primeira, segunda e última, respectivamente.

Já os números 5 e 7 correspondem às frequências absolutas das classes; e o número 52 corresponde ao tamanho da amostra.

Existem algumas propriedades que precisamos saber sobre desvio padrão. São elas:

- Ao somar ou ao subtrair uma constante k a todos os dados, o desvio padrão não se altera.

  $x' = x \pm k$

  $\sigma(x') = \sigma(x)$

- Multiplicando todos os dados por uma constante k, o desvio padrão fica multiplicado por k

  $x' = x.k$

  $\sigma(x') = k.\ \sigma(x)$

Coeficiente de Variação

A variância e o desvio padrão são medidas de dispersão absolutas; e apenas podem ser utilizados para comparar a variabilidade de dois ou mais conjuntos de dados quando estes apresentarem:

- mesma média;
- mesmo número de observações; e
- estiverem expressos nas mesmas unidades.

Então, para você comparar qualquer conjunto de dados em relação à sua variabilidade quando, pelo menos, uma dessas condições não é satisfeita, é necessário lançar mão de uma medida de dispersão relativa, como o **coeficiente de variação** (CV), que expressa a variabilidade dos dados em relação à sua média de forma percentual. Sua expressão é dada por:

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100$$

Para melhor entendimento, vamos elaborar um exemplo para você.

Exemplo

Imagine uma situação referente ao número de documentos falsificados que aparecem em um determinado setor da prefeitura e o valor arrecadado por hora de um tipo de multa em reais. Em qual das duas variáveis ocorre maior variabilidade ou variação?

	Documentos falsificados (nº)	Multa (reais)
Média	22	800
Desvio padrão	5	100

Utilizando o desvio padrão para comparar a variabilidade, você pode, a princípio, considerar que a multa apresenta maior variabilidade, já que tem maior desvio padrão. Entretanto, se utilizar o desvio padrão para comparar a variabilidade entre amostras, vai perceber que as médias são diferentes e também as unidades.

Calculando, então, o coeficiente de variação, teremos os valores apresentados, a seguir:

$$CV_{DOC} = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{5}{22} \cdot 100 = 22{,}7\%$$

$$CV_{MULTA} = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{100}{800} \cdot 100 = 12{,}5\%$$

Perceba, então, que estávamos concluindo erroneamente que a multa é mais variável do que o número de documentos falsificados, além de termos cometido o disparate de comparar numericamente duas variáveis expressas em unidades diferentes.

Portanto, o número de documentos falsificados apresentou maior dispersão do que a multa, já que seu coeficiente de variação foi maior, mudando assim a conclusão anterior.

Vamos ver agora outros exemplos de situações com a resolução comentada para você fixe melhor os conceitos desta Unidade.

Exemplo 1

Considere as idades dos funcionários do programa *Jovens que aprendem uma profissão*, de duas prefeituras, apresentadas a seguir.

Prefeitura A: {16; 15; 18; 15; 16; 16; 17; 18; 19; 17; 16}
Prefeitura B: {15; 17; 19; 19; 17; 18; 19; 18; 18; 17; 16}

Encontre a média, moda e mediana de cada prefeitura e identifique qual das prefeituras apresenta maior variabilidade na idade de seus jovens aprendizes.

Prefeitura A

- Média: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{16+15+....+16}{11} = 16{,}64$
- Mediana: Md = 16, lembrando que, para encontrar a mediana, os dados devem estar ordenados.
- Moda: Mo = 16, valor que aparece com maior frequência.

Prefeitura B

- Média: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{15+17+...+16}{11} = 17{,}54$
- Mediana: Md = 18 (lembrando: para encontrar a mediana, os dados devem estar ordenados).
- Moda: Mo = 17, 18 e 19 (distribuição multimodal, pois apresenta mais de duas modas).

Para sabermos quem tem maior variabilidade, temos de calcular o coeficiente de variação, pois, como os valores das médias são diferentes, não podemos usar o desvio padrão para comparar a variabilidade. Para encontrarmos o desvio padrão, precisamos primeiramente encontrar a variância usando a fórmula:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Prefeitura A

- Variância:

$$s^2 = \frac{(16-16{,}64)^2 + (15-16{,}64)^2 + ... + (16-16{,}64)^2}{11-1} = 1{,}654$$

- Desvio padrão: $s = \sqrt{1{,}654} = 1{,}2862$

- Coeficiente de variação:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}.100 = \frac{1{,}2862}{16{,}64}.100 = 7,7\%$$

Prefeitura B

- Variância:

$$s^2 = \frac{(15-17{,}54)^2 + (17-17{,}54)^2 + ... + (16-17{,}54)^2}{11-1} = 1{,}6726$$

- Desvio padrão: $s = \sqrt{1{,}6726} = 1{,}2933$

- Coeficiente de variação:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}.100 = \frac{1{,}2933}{17{,}54}.100 = 7{,}3\%$$

Como os coeficientes de variação apresentam valores muito próximos, podemos concluir que a variabilidade na idade dos funcionários do programa *Jovens que aprendem uma profissão*, das duas prefeituras, é praticamente a mesma.

Exemplo 2

Considerando os dados apresentados a seguir, que são referentes ao percentual de gastos com planejamento e com administração em cidades de diferentes portes, identifique as medidas de posição e de dispersão dos dados.

Gasto	Frequência (F_i)
5 ⊢ 15	2
15 ⊢ 25	7
25 ⊢ 35	20
35 ⊢ 45	5
45 ⊢ 55	4
55 ⊢ 65	2
Soma	40

Primeiramente, temos de encontrar os valores de x_i (ponto médio), pois eles são indispensáveis no cálculo da média, variância etc. Logo, temos:

$$X_i = 10; 20; 30; 40; 50; 60$$

(soma: limite inferior + limite superior dividido por 2).

Feita essa conta, vamos calcular a frequência acumulada. Acompanhe:

$$F_{ac} = 2; 9; 29; 34; 38; 40.$$

Na sequência, com os valores do ponto médio, podemos calcular a média:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \times f_i}{\sum fa} = \frac{10.2 + 20.7 + 30.20 + ... + 60.2}{40} = 32$$

Para encontrar a mediana, primeiramente temos de encontrar a classe mediana. Como n é par: $x_{n/2} = x_{40/2} = x_{20}$, a qual classe pertence o elemento de posição 20ª (3ª classe)?

$$Md = Li + \left(\frac{\frac{n}{2} - f_{antac}}{f_{md}} \right) . c = 25 + \left(\frac{\frac{40}{2} - 9}{20} \right) . 10 = 30,5$$

Vamos agora calcular a moda e, para tanto, precisamos encontrar a classe modal, aquela com maior frequência absoluta (3ª classe).

$$Mo = LI_{mo} + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) . \ c = 25 + \left(\frac{13}{13+15} \right) . 10 = 29,6$$

Fique atento, pois as classes mediana e modal não necessariamente vão pertencer à mesma classe.

Por fim, devemos fazer o cálculo das medidas de dispersão:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \times f_i}{n-1} = \frac{(10-32)^2 \times 2 + ... + (60-32)^2 \times 2}{40-1} = \frac{5240}{39} = 134,3590$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{134,3590} = 11,5913$$

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} \times 100 = 36,22\%$$

Observe que, com as medidas de dispersão calculadas, podemos verificar que a dispersão obtida foi média (36,22% em torno da média), ou seja, tanto para cima quanto para baixo. Se esse valor fosse bem menor, poderíamos considerar que os gastos com planejamento e com transportes seriam mais uniformes.

Exemplo 3

Considerando as séries de dados apresentadas pelos gastos com transportes em relação ao total gasto em várias prefeituras, conforme descrição a seguir, imagine que você precise efetuar uma estimativa com base nesses dados. Sobre qual série é mais fácil fazer estimativas precisas? Por quê?

Série A: {3,96; 3,17; 3,55; 3,61; 4,11; 4,57; 4,97; 5,91; 5,99; 5,74}
Série B: {1,46; 2,09; 3,04; 5,12; 7,80; 8,25; 9,95; 15,24; 17,40; 21,74}

Série A

- Média: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{3,96 + 3,17 + ... + 5,74}{10} = 4,558$
- Variância:
  $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(3,96 - 4,558)^2 + ... + (5,74 - 4,558)^2}{10-1} = 1,0939$
- Desvio padrão: $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{1,0939} = 1,0459$
- Coeficiente de variabilidade: $CV = \frac{S}{\bar{x}} \times 100 = 22,9\%$

Série B

- Média: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1,46 + 2,09 + ... + 21,74}{10} = 9,206$
- Variância:
  $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(1,46 - 9,206)^2 + ... + (21,74 - 9,206)^2}{10-1} = 47,748$
- Desvio padrão: $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{47,748} = 6,91$
- Coeficiente de variabilidade: $CV = \frac{S}{\bar{x}} \times 100 = 75\%$

Observe que na série A é mais fácil fazermos estimativas precisas, pois ela apresenta menor dispersão.

Resumindo

Nesta Unidade, você aprendeu conceitos básicos sobre as medidas de posição e de dispersão, e já pode caracterizar um conjunto de observações. Esses conceitos são de extrema importância para as inferências estatísticas, para os testes de hipóteses e para as informações contidas nas próximas Unidades desta disciplina.

Atividades de aprendizagem

Agora que você já sabe como calcular e como utilizar as principais medidas de posição e de dispersão, exercite-as fazendo as atividades a seguir, que serão importantes na consolidação dos conhecimentos adquiridos. Em caso de dúvida, lembre-se de consultar seu tutor por meio do AVEA.

1. Considere a sequência numérica apresentada, que mostra as idades de motociclistas e de seus caronas na época em que morreram em acidentes fatais de trânsito.

7	38	27	14	18	34	16
42	28	24	40	20	23	31
37	21	30	25	17	28	33
25	23	19	51	18	29	

   Calcule a média, moda, mediana, variância, desvio padrão e o coeficiente de variação para os dados não agrupados.

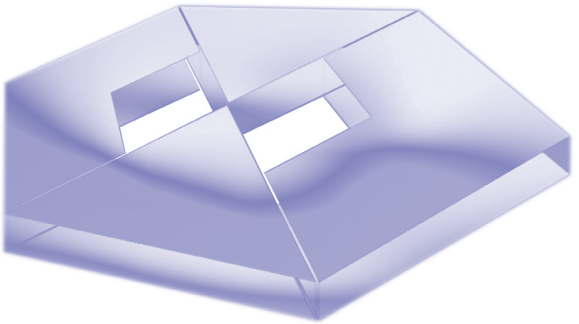
2. Imagine um determinado setor de uma prefeitura que esteja apresentando problemas com o afastamento de funcionários por motivos de saúde durante períodos muito longos. Uma amostra de dez casos apresentou os seguintes números de dias afastados em um semestre:

   23, 21, 10, 14, 16, 12, 39, 45, 10 e 20

   Calcule as medidas de posição e de dispersão em relação ao número de dias em que os servidores ficaram afastados.

UNIDADE 4

Probabilidade



Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade, você deverá ser capaz de:

- Definir o termo probabilidade;
- Descrever as abordagens clássicas das frequências relativa e subjetiva da probabilidade;
- Entender os termos experimento, espaço amostral e evento;
- Definir os termos probabilidade condicional e probabilidade conjunta; e
- Calcular probabilidades aplicando as regras da adição e da multiplicação.

Introdução

Caro estudante,

Vamos iniciar mais uma Unidade e nela veremos o conceito de probabilidade. É importante que você esteja atento aos exercícios resolvidos e, à medida que for avançando, relembre os conceitos aprendidos já.

Preparado para mais esse desafio?

Então, vamos juntos!

A origem da Teoria das Probabilidades está relacionada aos jogos de azar desde o século XVII, pois surgiu da necessidade de um método racional para calcular os riscos dos jogadores em jogos de cartas, de dados etc.

Posteriormente, essa teoria passou a auxiliar governos, empresas e organizações profissionais em seus processos de decisões, ajudando a desenvolver estratégias. Na área da Gestão, passou a ser uma ferramenta para a tomada de decisões e para a análise de chances e de riscos. Por exemplo, para decidir por um ou por outro procedimento médico, é essencial conhecermos as chances de cada um dar certo; isso vale também na escolha de alternativas decisórias de um sistema de gestão. Até para sabermos os riscos de uma exposição pública afetar a imagem de um político, temos de conhecer a probabilidade de ela causar dano ou não.

Para que você possa entender melhor os principais conceitos de probabilidade, destacamos dois tipos de fenômenos:

- **Fenômenos determinísticos**: aqueles que invariavelmente dão o mesmo resultado se repetidos essencialmente sob as mesmas condições específicas. Um exemplo é a aceleração da gravidade atuante sobre um corpo em queda livre na ausência de ar (vácuo). Nesse caso, a aceleração sempre será a mesma, pois não temos variações que venham a influenciar o resultado.
- **Fenômenos aleatórios**: aqueles que, mesmo repetidos sob as mesmas condições, apresentam potencialmente variações nos resultados. Pense na reação de um cliente quando ele não é atendido no horário marcado ou no resultado do lançamento de um dado. Em cada uma dessas situações os resultados nem sempre serão os mesmos. São aleatórios, ou seja, não há resultado certo ou predeterminado.

São nos fenômenos aleatórios que a Teoria das Probabilidades auxilia na análise e na previsão de um resultado futuro. Quando você pensa em probabilidade, quer identificar a chance de ocorrência de um determinado resultado de interesse em situações nas quais não é possível calcular com exatidão o valor real do **evento (fenômeno aleatório)**, ou seja, trabalha com chances ou probabilidades.

Uma situação que exemplifica esse fato está associada à seguinte pergunta: qual o grau de certeza de que um funcionário público cumprirá sua meta de trabalho na semana que vem?

Para responder a essa e a outras perguntas, você poderá aplicar alguns conceitos apresentados a seguir.

Experimento Aleatório

Para você calcular a probabilidade de um resultado, é necessário que ele esteja associado a um experimento aleatório, ou seja, a qualquer processo que tenha um resultado incerto ou casual.

Um processo é considerado um experimento aleatório se tiver as seguintes características:

- cada experimento pode ser repetido indefinidamente sob as mesmas condições (n);
- não se conhece *a priori*, ou seja antecipadamente, o resultado do experimento, mas pode-se descrever todos os possíveis resultados; e
- quando o experimento for repetido inúmeras vezes, surgirá uma regularidade dos resultados possíveis, isto é, haverá uma estabilidade da fração $f = \frac{r}{n}$ (frequência relativa) da ocorrência de um particular resultado, em que r corresponde ao número de vezes em que um determinado resultado aconteceu nas n vezes em que o experimento aleatório foi repetido.

Para ilustrar, podemos considerar que um processo aleatório corresponde ao lançamento de uma moeda não viciada (aquela em que as chances de sair cara ou coroa são iguais) jogada inúmeras vezes. Não conhecemos o resultado de cada lançamento, mas conhecemos os possíveis resultados (cara ou coroa). Quando você lança a moeda três mil vezes, por exemplo, ocorre a estabilização da frequência relativa de cada resultado em 0,5 ou probabilidade de 0,5. A Figura 16 mostra que no início a frequência relativa não é tão próxima de 0,5, como acontece após 1.000 jogadas.

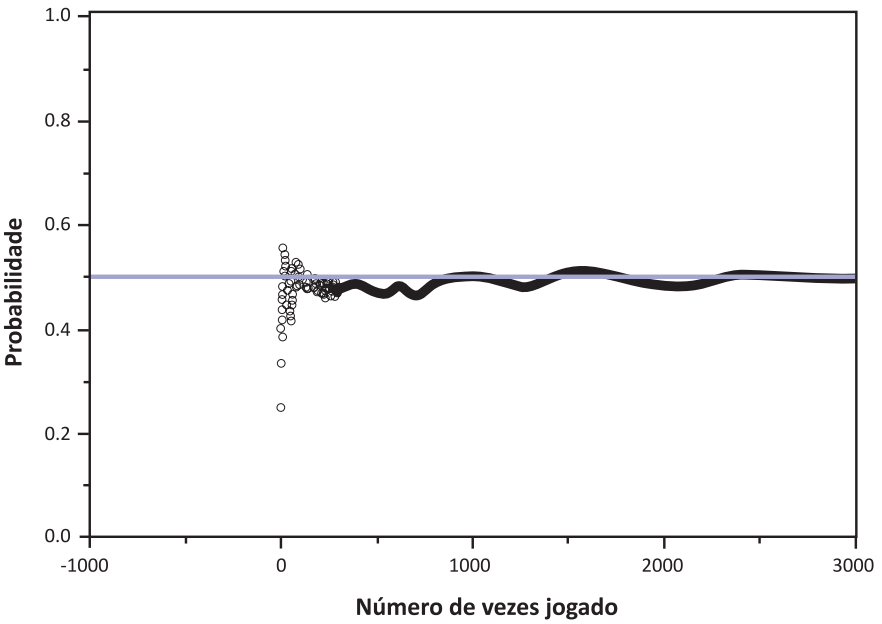


Figura 16: Experimento aleatório
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Perceba, com base nos experimentos e nas situações mencionadas, que a incerteza sempre está presente, o que quer dizer que, se esses experimentos forem repetidos em idênticas condições, não se pode determinar qual resultado exato ocorrerá.

A incerteza está associada à chance de ocorrência que atribuímos ao resultado de interesse.

Para entender melhor esse conceito, vamos considerar como exemplo o setor de atendimento de uma determinada prefeitura, o qual conta com seis funcionários. Um experimento ao acaso seria a escolha aleatória de um dos funcionários. Podemos considerar o gênero do funcionário escolhido como o que queremos verificar. Você, então, vai aplicar os conceitos já vistos de experimento aleatório. Veja que se trata mesmo de um experimento aleatório, pois sabemos quais resultados podem ocorrer, ou seja, um dos seis funcionários será o escolhido; entretanto, não podemos dizer com certeza que resultado (gênero) sairá nesse sorteio, pois dependerá da pessoa sorteada.

Agora que você entendeu o que é experimento aleatório, você irá compreender outro conceito importante: o de espaço amostral.

Espaço Amostral (Ω)

Vamos considerar a situação aleatória em que determinado funcionário público consegue ou não atingir sua meta de produtividade.

Nesse caso, quais os possíveis resultados que você pode ter?

O funcionário poderá atingir ou não a meta. Então, temos apenas dois resultados possíveis. O conjunto desses resultados possíveis, que poderiam ser mais de dois, também, no caso de outras situações, é definido como **espaço amostral*** e pode ser simbolizado por S ou Ω (ômega).

*Espaço amostral – conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

No nosso caso, teremos Ω = {atinge; não atinge}

Lembrando-nos do Diagrama de Venn, que você estudou na disciplina *Matemática para Administradores*, podemos representar o espaço amostral conforme indica a Figura 17:

Os Diagramas de Venn são úteis para mostrar a relação entre os elementos de um conjunto.

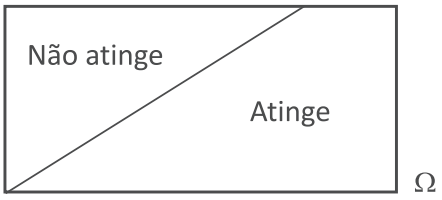


Figura 17: Representação do espaço amostral
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

A definição do espaço amostral é de fundamental importância, pois, muitas vezes, a partir dele você pode calcular probabilidades. Veremos isso um pouco mais à frente.

Nesse caso, se todos os resultados possíveis de um experimento aleatório constituem o espaço amostral, o que será cada resultado em particular?

Com intuito de responder à essa proposição, daremos continuidade ao nosso estudo. Vamos à próxima seção.

Evento

Qualquer subconjunto do espaço amostral (Ω) associado ao experimento aleatório é chamado de evento, ou seja, um determinado resultado que ocorra dentro do espaço amostral. Então, em nosso exemplo, o funcionário público que cumprir a meta será considerado como um dos eventos que compõem o espaço amostral. Nesse caso, o nosso espaço amostral apresenta dois eventos apenas (cumprir ou não cumprir a meta).

Geralmente, calculamos as chamadas probabilidades desses eventos associadas ao nosso espaço amostral. Por isso a importância de você ter esse conceito bem definido!

Imagine que algumas secretarias municipais oferecem, por cortesia, cadeiras suficientes em determinado setor para que os contribuintes possam esperar confortavelmente; e outras secretarias não ofereçam essa cortesia. Vamos ver como esse problema pode ser formulado dentro do contexto de experimento aleatório, espaço amostral e eventos.

O **experimento** é a seleção de uma secretaria e a observação do fato de essa secretaria oferecer ou não a cortesia. Há dois pontos amostrais no espaço correspondente a esse experimento:

S:{a secretaria oferece a cortesia}

N:{a cortesia não é oferecida pela secretaria}

Um ponto importante a ser considerado é o de que nem sempre as chances de ocorrência de dois eventos opostos ou mutuamente exclusivos são iguais a 50%, como no caso do lançamento de uma moeda. Nessa situação, provavelmente a chance de a secretaria oferecer a cortesia de assentos (S) poderá ser bem maior do que a de não oferecer (N).

Definições de Probabilidades

Até agora vimos diferentes e importantes conceitos relacionados à estatística. Vamos agora definir o que vem a ser probabilidade. Para entender esse conceito, imagine as seguintes situações:

- 50% de que o resultado do lançamento de uma moeda seja cara;
- 95% de certeza de que um determinado serviço será realizado por uma prefeitura em tempo hábil; e
- 1 em cada 10 servidores públicos não tem ido trabalhar pelo menos um dia na semana.

Como você pode ver, estamos falando acerca das chances de que algo venha a acontecer. Então, probabilidade pode ser assim considerada: a chance de que um determinado evento venha a ocorrer.

As probabilidades apresentam diferentes visões. As principais são mostradas a seguir. Acompanhe!

A Probabilidade Objetiva nasceu no século XVII por interesse comum de Fermat e Pascal.

Saiba mais **Pierre Fermat (1601-1665)**

Matemático francês que passou parte de sua vida como conselheiro do parlamento de Toulouse. Seu campo predileto de estudos foi o da teoria dos números, na qual se consagrou. Fermat deu considerável impulso à aritmética superior moderna, exercendo grande influência sobre o desenvolvimento da álgebra. Fermat se sobressai, ainda, no terreno do cálculo de probabilidades. Fonte: IME USP (2008).

Blaise Pascal (1623-1662)

Com apenas três anos, perdeu a mãe. O pai encarregou-se diretamente da sua educação, desenvolvendo um método singular de educação com exercícios e jogos de disciplinas, como Geografia, História e Filosofia. Contudo, seu pai acreditava que a Matemática somente deveria ser ensinada ao filho quando este fosse mais velho. Porém, Pascal descobriu cedo as maravilhas da ciência dos números. Aos 12 anos, mesmo sem professor, ele deduziu que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Fonte: IE ULISBOA (2008).

Se um **evento** pode ocorrer de N maneiras **mutuamente excludentes*** e **igualmente prováveis***, e, se m dessas ocorrências têm uma característica E, então, a probabilidade de ocorrência de E é:

$$P(E) = \frac{m}{N}$$

Onde:

m: número de eventos favoráveis à probabilidade E que se deseja calcular, ou seja, o número de vezes que E acontece; e

N: número total de ocorrências de eventos no espaço amostral.

*Mutuamente excludentes – a ocorrência de um evento exclui a possibilidade da ocorrência simultânea do outro. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

*Igualmente prováveis – ocorrem com a mesma chance ou probabilidade. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

Vejamos exemplos de probabilidades a serem obtidas:

- Um dado homogêneo tem probabilidade 1/6 de cair com a face 2 para cima.
- Em um conjunto de cartas (sem os coringas) bem embaralhadas, a probabilidade de sortearmos uma carta de copas é de 13/52.

A visão da frequência relativa depende da **reprodutibilidade*** do mesmo processo e da habilidade de contarmos o número de repetições.

Sendo assim, se algum processo é repetido um grande número de vezes, n, e se algum evento com característica E ocorre m vezes, a frequência relativa m/n é aproximadamente igual à probabilidade de E:

$$P(E) \approx m/n$$

Contudo, observe que m/n é apenas uma estimativa de P(E). Lembre-se do experimento anteriormente citado em que uma moeda é lançada três mil vezes (Figura 16).

A visão da probabilidade subjetiva é uma medida da "confiança" que temos sobre a verdade de certa proposição, apesar de não

*Reprodutibilidade – ocorrência diversas vezes de um mesmo evento. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

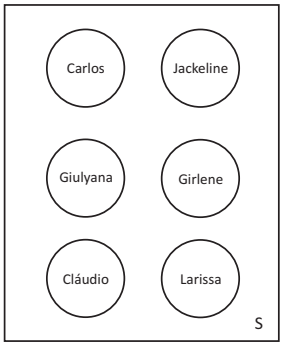
termos cálculos precisos sobre esse valor. Imagine proposições sobre a probabilidade de que o Brasil vença a próxima copa do mundo ou que em três anos teremos um modelo eficiente de gestão pública ou que as capacidades do processamento computacional se igualarão à capacidade do cérebro humano em 30 anos. São apenas estimativas educadas que não se baseiam em cálculos precisos.

Para que você entenda melhor algumas das definições de probabilidade, veja a descrição que preparamos ao longo de uma situação.

Imagine que em um determinado setor de uma prefeitura há os seguintes funcionários: Carlos, Jackeline, Giulyana, Girlene, Cláudio e Larissa, ou seja, seis funcionários. Vamos pensar agora: qual a probabilidade de se escolher um funcionário ao acaso e ele ser do gênero masculino?

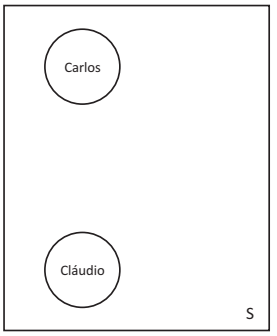
Para obtermos as respostas, vamos definir o espaço amostral e o evento desejado. Consideremos espaço amostral ou conjunto de possibilidades todos os funcionários públicos do setor.

S = {Carlos, Jackeline, Giulyana, Girlene, Cláudio, Larissa}



E, para definir o evento favorável, precisamos considerar este o conjunto de possibilidades favoráveis que nos interessa, ou seja, os funcionários do gênero masculino.

Evento = {Carlos, Cláudio}



Então, a probabilidade que estamos procurando, ou seja, a de escolher um funcionário ao acaso e ele ser do gênero masculino, pode ser apresentada conforme a descrição a seguir:

$$P(\ funcionário\ público\ gênero\ masculino\ ) = \frac{2}{6} = \frac{número\ de\ funcionários\ do\ sexo\ \ masculino}{número\ total\ de\ funcionários}$$

Considerando outros três eventos relativos aos funcionários da prefeitura, descritos anteriormente, temos:

- A (funcionário ser do sexo feminino).
- B (seu nome começar com a letra G).
- C (seu nome começar com a letra C).

Então, poderemos definir os eventos mencionados anteriormente como a seguir e calcular facilmente suas probabilidades. Faça isto como um exercício:

- A = {Jackeline, Giulyana, Girlene, Larissa}.
- B = {Giulyana, Girlene}.
- C = {Carlos, Cláudio}.

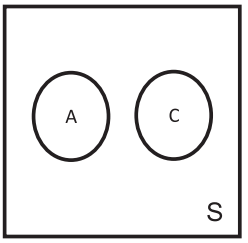
Você pode definir a probabilidade como uma função que atribui um número real aos eventos do Ω (se A é um evento do Ω, P(A) é a probabilidade de A), a qual satisfaz:

- $P(\varnothing) = 0$ (probabilidade de vazio é igual a zero).
- $P(\Omega) = 1$ (probabilidade de acontecer; todo o espaço amostral é igual a um).
- $0 \leq P(A) \leq 1$ (a probabilidade de um determinado evento, sempre estará entre zero e um).

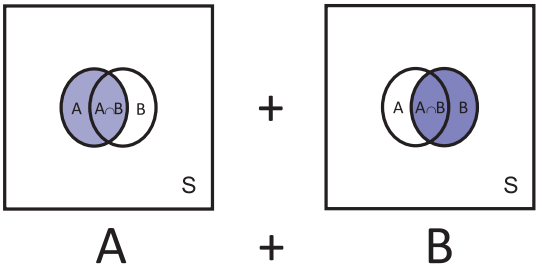
Você pode ainda utilizar a regra da soma, pela qual, dados dois **eventos mutuamente exclusivos***, A e C de Ω, temos:

*Eventos mutuamente exclusivos – são aqueles que não podem acontecer simultaneamente. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C)$$



Já no caso a seguir, em que os eventos não são mutuamente exclusivos e podem ocorrer simultaneamente, na regra da soma, devemos considerar que a intersecção (área) será contada duas vezes.



Nesse caso, devemos retirar uma vez a área de (A ∩ B) na regra da soma, pois, como você pode ver nos desenhos anteriores, a interseção (A ∩ B) é contada duas vezes.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Lembre-se de que o símbolo ∩ corresponde à interseção e ∪ corresponde à união.

Considerando os eventos A, B e C, citados anteriormente, temos as seguintes situações:

- A ∪ C é o evento em que A ocorre ou C ocorre ou, ainda, ambos ocorrem → {Carlos, Jackeline, Giulyana, Girlene, Cláudio, Larissa}.

E há chance de acontecerem dois eventos simultaneamente, como você pode observar na descrição, a seguir:

- A ∩ B é o evento em que A e B ocorrem simultaneamente → {Giulyana, Girlene}.

Em muitas situações o que nos interessa é aquilo que pertence ao espaço amostral e não pertence ao evento de interesse. A Figura 18 mostra bem isso:

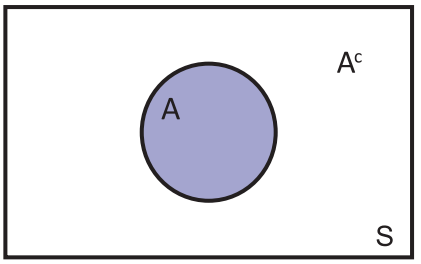


Figura 18: Espaço amostral
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

$\overline{A}$ ou A^c é o evento em que A não ocorre (complementar de A). Em nosso exemplo, consideramos que o complementar de A (funcionário ser do gênero feminino) corresponde a todas as pessoas do gênero masculino, ou seja:

$$\overline{A} \text{ ou } A^c = \{\textbf{Carlos, Claudio}\}$$

Probabilidade Condicional

A partir de agora você verá outros conceitos de probabilidade e, para tanto, deve considerar os dados, a seguir, referentes a uma prefeitura em que foram selecionados, a partir de uma amostragem estratificada (vista anteriormente), 101.850 contribuintes das classes **média-baixa** e **alta**. Posteriormente, foi feita a verificação do número de contribuintes de cada classe social que pagaram um determinado tributo em dia (evento: pagaram) e também o número de contribuintes que não pagaram em dia o tributo (evento: não pagaram). Para compreender essa descrição, observe os resultados descritos na Tabela 13:

Tabela 13: Contribuintes pagantes e não pagantes

	Média-baixa	Alta	Total
Pagaram (P)	39.577	8.672	48.249
Não Pagaram (NP)	46.304	7.297	53.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Podemos considerar então que o espaço amostral (Ω) corresponderá ao conjunto de 101.850 contribuintes.

Agora, para ampliarmos essa discussão juntos, você vai considerar os eventos apresentados, a seguir, para trabalhar com eles.

- P = contribuintes que **pagaram** o tributo em dia.
- NP = contribuintes que **não pagaram** o tributo em dia.
- MB = contribuintes da classe **média-baixa**.
- $P \cap MB$ = contribuintes que **pagaram (P)** o tributo em dia e **ao mesmo tempo** são da classe **média-baixa (MB)**.

- P ∪ MB = contribuintes que **pagaram (P)** o tributo em dia ou são da classe **média-baixa (MB)**.

Você pode obter, então, as probabilidades de alguns eventos considerados anteriormente, por exemplo:

$$P(MB) = \frac{n^o \text{ de contribuintes que são da classe MÉDIA-BAIXA}}{\text{nº total de contribuintes}} = \frac{85.881}{101.850} = 0,843$$

$$P(P) = \frac{n^o \text{ de contribuintes que pagaram em dia}}{\text{nº total de contribuintes}} = \frac{48.249}{101.850} = 0,473$$

Considerando os contribuintes que pagaram e os que não pagaram em dia, temos apenas esses dois resultados possíveis. Para obtermos a probabilidade de contribuintes que não pagaram em dia, basta obtermos a probabilidade complementar do evento P. A probabilidade de todo o espaço amostral (101.850) é igual a 1 menos a probabilidade de contribuintes que pagaram em dia (P). Nesse caso, estamos usando o conceito de eventos complementares. Este cálculo é mostrado a seguir:

$$NP = \overline{P} \text{ (não pagaram (NP ou } \overline{P}\text{) é o complementar dos que pagaram (P))}$$

$$\text{ou seja, } P(NP) = P(\overline{P}) = 1 - P(P) = 1 - 0,473 = 0,527$$

Com base nesse conhecimento, podemos calcular a probabilidade de escolher um contribuinte aleatoriamente e este ser da classe média-baixa ou ser quem paga em dia o tributo. Veja que, nesse caso, os eventos não são mutuamente exclusivos, ou seja, existem contribuintes que são comuns nas duas situações ao mesmo tempo. Assim, a probabilidade procurada será dada por:

$$\frac{39.577}{101.850} = 0,388$$

$$P(P \cup MB) = P(P) + P(MB) - P(P \cap MB)$$
$$P(P \cup MB) = 0,473 + 0,843 - 0,388$$
$$P(P \cup MB) = 0,928$$

Vamos considerar ainda o exemplo anterior. Se você souber que um contribuinte sorteado paga em dia o tributo, qual a probabilidade de que ele seja da classe média-baixa?

Agora, temos uma informação parcial e importante: o contribuinte selecionado paga em dia. Vamos então designar a probabilidade de P quando se sabe que o contribuinte paga em dia o tributo e MB quando ele é da classe social média-baixa.

Assim, a probabilidade que chamaremos de P(MB/P) é denominada de **probabilidade (condicional) de MB dado P (lembre-se que o símbolo / não corresponde a uma divisão e sim a uma condição de que outro evento já aconteceu)**. Então, nesse caso, temos o que chamamos de probabilidade condicionada, ou seja, a probabilidade de um evento **acontecer dado que, sabendo que**, outro evento já aconteceu.

Sendo assim, é natural atribuirmos:

$$P\,(MB/P) = \frac{\text{nº de contribuintes que são da classe MÉDIA-BAIXA e pagam em dia}}{\text{nº total contribuintes que pagam em dia}} = \frac{39.577}{48.249} = 0{,}820$$

Veja que, nesse caso, ocorreu uma redução no espaço amostral inicial (total de contribuintes da Tabela 13), já que tínhamos a informação anterior de que o contribuinte selecionado pagava em dia. Dessa forma, o espaço amostral total que tínhamos (101.850), foi reduzido para 48.249 (total de pagantes em dia) e, destes, interessam-nos os que são da classe social média-baixa. Sendo assim:

$$P\,(MB/P) = \frac{\dfrac{\text{nº de contribuintes da classe MÉDIA-BAIXA e que pagam em dia}}{\text{nº total de contribuintes}}}{\dfrac{\text{nº de contribuintes que pagam em dia}}{\text{nº total de contribuintes}}}$$

$$P\,(MB/P) = \frac{P(MB \cap P)}{P(P)}$$

Portanto, você pode generalizar para dois eventos A e B quaisquer de um experimento aleatório. Dessa forma, podemos dizer

que a probabilidade condicional de A dado B (escreve-se como P (A / B)) é definida por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

De posse desse conhecimento, podemos definir, a partir de agora, a regra do produto, conforme discutiremos na próxima seção.

Regra do Produto e Eventos Independentes

A partir da probabilidade condicionada definida anteriormente, obteremos a chamada **regra do produto** para a probabilidade da interseção de dois eventos A e B de um espaço amostral:

$$P(A \cap B)$$

Passe a probabilidade de ocorrência de B na probabilidade condicionada e multiplique pela probabilidade de ocorrência de A sabendo que B já aconteceu.

$$= P\,(A/B) \cdot P(B)$$

Logo, se dois eventos A e B são independentes, então P{A / B) = P{A} ou P{B / A) = P(B), já que um evento não interfere no outro.

Desse modo, se A e B forem independentes, você pode verificar que:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B)P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Então, para que dois eventos A e B quaisquer sejam considerados independentes é necessário fazer a seguinte relação:

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

Para compreender melhor essa nossa discussão, analise outra situação na qual utilizaremos os conceitos aprendidos de probabilidade. Para tanto, considere os dados a seguir, representativos da distribuição da renda anual de funcionários públicos de dois setores (A e B), apresentados na Tabela 14.

Tabela 14: Distribuição de renda anual de funcionários públicos

Faixa de renda anual (em R$1.000,00)	Setor		Total
	A	B	
15 a 20 (R1)	70	40	110
20 a 25 (R2)	15	15	30
25 a 30 (R3)	10	20	30
30 a 35 (R4)	20	10	30
Total	115	85	200

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Observando os dados descritos na Tabela 14, podemos identificar claramente a probabilidade de um funcionário aleatoriamente escolhido:

a) ser do setor A → P(A) = 115/200 = 0,575 (há 115 funcionários do setor A em um total de 200 funcionários);

b) ser do setor B → P(B) = 85/200 = 0,425 (há 115 funcionários do setor A em um total de 200 funcionários);

c) ter renda entre R$ 15.000,00 e R$ 20.000,00 → P(R1) = 110/200 =0,550 (110 funcionários correspondem aos que têm a faixa de renda solicitada);

d) ser do setor B e ter renda entre R$ 15.000,00 e R$ 20.000,00 → (intersecção), ou seja, P(B ∩ R1) = 40/200 = 0,20 (40 funcionários correspondem aos que têm a faixa de renda solicitada e ao mesmo tempo são do setor B); e

e) ter renda entre R$ 15.000,00 e R$ 20.000,00, dado que é do setor B →

$$P(R1/B) = \frac{P(R1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0,20}{0,425} = 0,4706$$

Sabendo que o funcionário é do setor B (temos 85 funcionários agora), houve uma redução no espaço amostral de 200 para 85, número que será utilizado no denominador. Logo, perguntamos: qual a chance de estar na faixa de renda solicitada? O resultado é 0,4706.

Como P(R1) ≠ P(R1/B), podemos concluir que os eventos setor e renda são dependentes. É possível visualizar um exemplo de aplicação dos conceitos de independência de eventos por meio do lançamento de uma moeda não viciada (não existe preferência para cara ou coroa) três vezes. Considere os seguintes eventos:

Para que sejam considerados independentes, a relação de independência deve ser válida para todas as intersecções presentes na Tabela 14.

A = no primeiro lançamento da moeda sai cara; e

B = no segundo lançamento da moeda sai cara.

Considere a seguinte notação: C = cara e R = coroa

Verifique se é verdadeira a hipótese de que os eventos A e B são independentes. O espaço amostral e os eventos são apresentados a seguir:

Os resultados que estão em negrito ocorrem no espaço amostral (8) somente duas vezes.

Ω = {CCC, CCR, CRC, CRR, RCC, RCR, RRC, RRR}

(A) = {**CCC, CCR**, CRC, CRR}

(B) = {**CCC**, **CCR**, RCC, RCR}

P(A ∩ B) = 2/8 = ¼

P (A) = 4/8 = ½

P (B) = 4/8 = ½

Portanto, P(A ∩ B) = P(A) · P(B) => ¼ = ½ · ½ ou

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A/B) = P(A) \Rightarrow ½ = ½$$

Perceba que os eventos são independentes, pois P(A ∩ B) = P (A) · P(B) ou P (A / B) = P (A).

Vamos ver outros exemplos relacionados a probabilidades para compreendermos melhor o que vimos.

Exemplo

Um estudante chega atrasado em 40% das aulas e esquece o material didático em 18% das aulas. Supondo que sejam eventos independentes, calcule a probabilidade de:

a) O estudante chegar na hora e com material.

b) Não chegar na hora e ainda sem material.

Como o exercício afirma que o estudante chega atrasado em 40% das aulas, entendemos que a probabilidade de ele chegar atrasado é 40% = 0,40; e a probabilidade de ele não chegar atrasado = 60% = 0,60. O exercício afirma também que ele esquece o material didático em 18% das aulas, isto é, a probabilidade de que ele esqueça o material é = 18% = 0,18; e de que ele não esqueça é =82% = 0,82.

Logo, para resolvermos a alternativa do exemplo, probabilidade de o estudante chegar na hora e com material, considerando que os eventos são independentes, temos:

$$P(\text{chegar na hora e com material}) = P(\text{chegar na hora} \cap \text{c/ material}) =$$
$$P(\text{chegar na hora}) \cdot P(\text{c/ material}) = 0{,}60 \cdot 0{,}82 = 0{,}492 \text{ ou } 49{,}2\%$$

Já para resolvermos a alternativa b, vamos considerar que:

$$P(\text{não chegar na hora e sem material}) = P(\text{ñ chegar na hora} \cap \text{s/ material}) =$$
$$P(\text{ñ chegar na hora}) \cdot P(\text{s/ material}) = 0{,}40 \cdot 0{,}18 = 0{,}072 \text{ ou } 7{,}2\%$$

Exemplo:

Vamos considerar um pesquisador que estudou o comportamento de consumo de bebidas lácteas no Brasil. Após a análise da classe econômica do consumidor e do principal aspecto determinante da escolha da marca, o pesquisador tabulou os dados conforme dispostos a seguir.

Classe/Aspecto	Preço	Qualidade	Soma
Alta	42	56	98
Média	37	21	58
Baixa	13	97	110
Total	92	174	266

Considerando esses dados, vamos calcular qual a probabilidade de um consumidor escolhido:

a) Priorizar o preço, dado que é da classe alta.

b) Priorizar a qualidade, dado que é da classe média.

c) Ser da classe baixa, dado que atribui maior importância ao fator qualidade.

Com base nos dados da tabela desse exemplo, para priorizar o preço, dado que é da classe alta, temos uma probabilidade condicional igual:

$$P\left(\text{preço}/\text{classe alta}\right)=\frac{P\left(\text{preço}\cap\text{classe alta}\right)}{P\left(\text{classe alta}\right)}=\frac{42}{98}=0{,}4286\ ou\ 42{,}86\%$$

Já para priorizar a qualidade, dado que é da classe média, temos uma probabilidade condicional dada por:

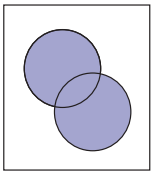
$$P\left(\text{qualidade}/\text{classe média}\right)=\frac{P\left(\text{qualidade}\cap\text{classe média}\right)}{P\left(\text{classe média}\right)}=\frac{21}{58}=0{,}3621\ ou\ 36{,}21\%$$

Por fim, para ser da classe baixa, dado que atribuiu maior importância ao fator qualidade, o cálculo é feito por:

$$P\left(\text{classe baixa}/\text{qualidade}\right)=\frac{P\left(\text{classe baixa}\cap\text{qualidade}\right)}{P\left(\text{qualidade}\right)}=\frac{97}{174}=0{,}5575\ ou\ 55{,}75\%$$

Algumas Regras Básicas de Probabilidade

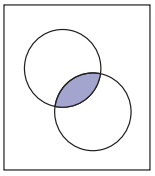
Para que você possa aplicar todos os conceitos de probabilidade aprendidos até aqui, apresentaremos, por meio da Figura 19, algumas regras básicas que irão ajudá-lo. Observe com atenção:



$A \cup B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

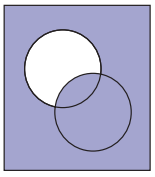
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$ eventos mutuamente exclusivos



$A \cap B$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(B).P(A/B)$$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$ eventos independentes



$\overline{A}$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Figura 19: Regras gerais da probabilidade
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Outra questão que merece destaque, quando falamos de probabilidade, é que a probabilidade condicional de A dado B é definida por:

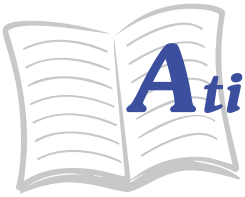
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Resumindo

Nesta Unidade, você ampliou o seu conhecimento do termo probabilidade ao estudar as abordagens clássicas das frequências relativa e subjetiva da probabilidade e conhecer o significado dos termos experimento, espaço amostral e evento.

Conheceu também a definição dos termos probabilidade condicional e probabilidade conjunta, e aprendeu a calcular as probabilidades aplicando as regras da adição e da multiplicação. Para intensificar seu estudo, viu esses conceitos aplicados a partir da apresentação de exemplos.

Caso algum conceito não tenha ficado claro, retome a leitura, pois eles serão importantes para a compreensão de novas informações que estão contidas nas próximas Unidades.



Atividades de aprendizagem

Agora que você já entendeu todos os conceitos relacionados aos cálculos de probabilidade apresentados, resolva as atividades apresentadas, a seguir, e, em caso de dúvidas, não hesite em consultar o seu tutor.

1. Considerando que as probabilidades de três fiscais A, B e C, que trabalham independentemente, efetivarem uma autuação, quando abordam uma obra, são 2/3, 4/5 e 7/10, respectivamente, se cada um abordar uma obra, qual a probabilidade de que pelo menos um deles efetive a multa?
2. Sendo A e B dois mestres que já estão suficientemente treinados em partidas de xadrez e jogam 120 partidas, das quais A ganha 60, B ganha 40 e 20 terminam empatadas; A e B concordam em jogar três partidas. Determine a probabilidade de:
    a) A ganhar todas as partidas.
    b) Duas partidas terminarem empatadas.
    c) A e B ganharem alternadamente.
3. Em um período de um mês, 100 funcionários de uma prefeitura que trabalham com resíduos tóxicos, sofrendo de determinada doença, foram tratados. As informações sobre o método de tratamento aplicado a cada funcionário e o resultado final obtido estão na tabela a seguir:

		Tratamento	
		A	B
Resultado	Cura Total	24	16
	Cura Parcial	24	16
	Morte	12	8

Sorteando-se aleatoriamente um desses funcionários, determine a probabilidade de ele ter sido:

a) Submetido ao tratamento A.

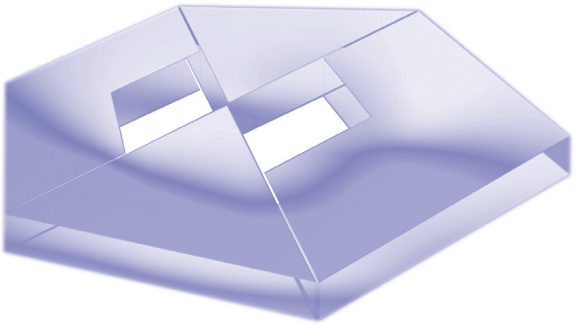
b) Totalmente curado.

c) Submetido ao tratamento A e ter sido parcialmente curado.

d) Submetido ao tratamento A ou ter sido parcialmente curado.

UNIDADE 5

Distribuição de Probabilidades Discretas e Contínuas



Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade, você deverá ser capaz de:

- Identificar e aplicar modelos probabilísticos discretos;
- Identificar e aplicar modelos probabilísticos contínuos (distribuição normal);
- Saber quando e como utilizar as distribuições amostrais;
- Calcular e interpretar intervalos de confiança; e
- Dimensionar amostras para serem utilizadas em pesquisas e projetos.

Introdução

Caro estudante,

Como você progrediu nos conhecimentos básicos de probabilidade, agora iremos trabalhar com as chamadas distribuições de probabilidades, que auxiliam no cálculo de probabilidades e, ainda, nos processos de estimação e de decisão, conforme veremos na próxima Unidade. Estudaremos as distribuições de amostragem e dimensionamento de amostras que, também, serão vistas nesta Unidade.

Bons estudos e conte conosco para auxiliá-lo sempre que necessário.

Vamos começar com alguns conceitos preliminares.

Para que você tenha condições de entender as distribuições, é necessário conhecer bem o que é uma **variável aleatória***, que pode ser discreta ou contínua.

*Variável aleatória – função que associa valores reais aos eventos de um espaço amostral. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

Um exemplo de uma variável aleatória (v.a.) discreta é a quantidade de ações que tiveram queda em um determinado dia, em uma carteira composta por cinco ações diferentes. A função será dada por:

X = "quantidade de ações que tiveram queda em um determinado dia" define uma variável aleatória discreta, que pode assumir os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Vamos considerar agora uma situação na qual se verificou o tempo gasto por um funcionário público para atender a um contribuinte. A função será:

Y= "tempo gasto por um funcionário público para atender a um contribuinte" define uma variável aleatória contínua, que pode assumir infinitos valores.

Vamos trabalhar aqui principalmente com as variáveis aleatórias discretas. Se uma variável aleatória X pode assumir os valores x_1, x_2,..., x_n com probabilidades respectivamente iguais a p_1, p_2,..., p_n, e $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, temos então definida uma **distribuição de probabilidade***.

*Distribuição de probabilidade – é um tipo de distribuição que descreve a chance associada a valores que uma variável aleatória pode assumir ao longo de um espaço amostral. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.

É importante ressaltarmos que a variável aleatória tem notação de letra maiúscula e seus possíveis valores são representados por letras minúsculas, como utilizamos anteriormente.

Se a variável X em questão for discreta, sua distribuição é caracterizada por uma **função de probabilidade (P(X=x))**, que associa probabilidades não nulas aos possíveis valores da variável aleatória X.

Distribuições Discretas

Imagine uma situação na qual somente podem ocorrer dois possíveis resultados: "sucesso" e "fracasso". Veja alguns exemplos:

- uma venda é efetuada ou não em uma ligação de *call center*;
- um contribuinte pode ser adimplente ou inadimplente;
- uma peça fabricada tem algum defeito ou não;
- uma guia recolhida pode ter seu preenchimento ocorrido de forma correta ou incorreta; e
- um consumidor que entra em uma loja pode comprar ou não comprar um produto.

Essas situações correspondem a variáveis aleatórias dicotômicas que seguem a Distribuição de Bernoulli. Ou seja, se associarmos uma variável aleatória X aos possíveis resultados do experimento de forma que X=1 se o resultado for "sucesso" e X=0 se o resultado for "fracasso", então a variável aleatória X, assim definida, tem Distribuição de Bernoulli, com p sendo a probabilidade de ocorrer "**sucesso**" e q = (1-p) a probabilidade de ocorrer "**fracasso**". Observe que q = (1 – p), porque "sucesso" e "fracasso" são eventos complementares ou mutuamente excludentes.

Neste momento você deve saber que quando estamos falando de sucesso, devemos relacioná-lo com o objetivo do exercício ou do problema a ser resolvido, o que, muitas vezes, pode não ser algo bom. Por exemplo, "sucesso" pode ser a constatação de defeito no teste de qualidade de uma peça fabricada.

Ampliando nossa discussão, é importante mencionarmos ainda que a função de probabilidade da Distribuição de Bernoulli é dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} p \text{ para } x = 1, \\ q = 1 - p \text{ para } x = 0 \\ 0 \text{ para } x \text{ diferente de } 0 \text{ ou } 1 \end{cases}$$

Sendo assim, a média, a variância e o desvio padrão serão obtidos por:

- Média = p (onde p corresponde à probabilidade de sucesso).
- Variância = p·q (onde q corresponde à probabilidade de fracasso).
- Desvio-padrão = raiz (p·q).

Obter a estimativa de média e desvio padrão torna-se importante, pois tais medidas podem ser usadas para caracterizar a situação e também para a definir a média e o desvio padrão da distribuição binomial, que iremos ver adiante.

Contextualizando a Distribuição de Bernoulli, temos a seguinte situação: a experiência tem mostrado que até fevereiro o motorista que é parado em uma *blitz* tem 60% de chance de estar adimplente em relação ao Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA). Temos, portanto, uma probabilidade de sucesso **(o motorista não estar devendo o IPVA)** de 0,6 e uma probabilidade de estar devendo de 0,4 **(vem da diferença q = 1 – 0,6)**.

Distribuição Binomial

Para que uma situação possa se enquadrar em uma distribuição binomial, deve atender às seguintes condições:

- são realizadas n repetições (tentativas) independentes;
- cada tentativa é uma prova de Bernoulli (somente podem ocorrer dois possíveis resultados); e
- a probabilidade p de sucesso em cada prova é constante.

Se uma situação atende a todas as condições anteriores, então a variável aleatória X = número de sucessos obtidos nas n tentativas terá uma distribuição binomial com n tentativas e p probabilidades de sucesso.

Agora você deve parar a sua leitura e lançar uma moeda 30 vezes para cima. Após fazer isso e anotar os resultados, veja se o experimento que acabou de fazer se encaixa em uma distribuição binomial (condições apresentadas anteriormente).

Simbolicamente, temos: $X \sim B(n, p)$ com a interpretação:

A variável aleatória X tem distribuição binomial (B) com n ensaios e uma probabilidade p de sucesso (em cada ensaio).

A função de probabilidade utilizada para cálculo de probabilidades, quando a situação se enquadra na distribuição binomial, será dada por meio da seguinte expressão:

$P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}$ onde:

p : probabilidade de "sucesso" em cada ensaio;

q = 1-p : probabilidade de "fracasso" em cada ensaio;

$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$, onde n! é o fatorial de n, é combinação de n valores tomados x a x

Lembre-se dos conceitos de análise combinatória vistos no segundo grau!

Exemplo

Vamos considerar que algumas pessoas entram em uma loja no período próximo ao dia das mães. Sabemos que a probabilidade de uma pessoa do gênero masculino comprar um presente é de 1/3. Se entrarem quatro pessoas do gênero masculino na tal loja, qual a probabilidade de que duas venham a comprar presentes?

Se essas quatro pessoas entram na loja e duas delas compram, podemos colocar as possibilidades da seguinte forma (C ➔ compra e não-C ➔ não compra). O espaço amostral associado a essa situação do experimento é:

C, C, não-C, não-C **ou** C, não-C, não-C, C **ou** C, não-C, C, não-C **ou** não-C, não-C, C, C **ou** não-C, C, não-C, C **ou** não-C, C, C, não-C

Logo, calculando as probabilidades usando as regras do **"e"** (multiplicação, pois são independentes) e do **"ou"** (soma), a **probabilidade de 2 clientes do gênero masculino comprarem presentes** é:

$$p = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$p = 6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$$

$$p = 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$p = \frac{24}{81} \cong 29{,}63\%$$

Agora, vamos calcular utilizando a função de probabilidade apresentada anteriormente e verificar que o resultado será o mesmo.

$$P(X=2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4!}{2!.(4-2)!} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} \cdot \frac{4}{81} = \frac{24}{81} \cong 0{,}2963 \quad ou \quad 29{,}63\%$$

Os valores da média e da variância da distribuição binomial são:

Média = n.p

Variância = n.p.q = n.p.(1-p)

Como na binomial são n ensaios de Bernoulli e a distribuição tem média p, a média da binomial será n.p. Raciocínio semelhante é feito para a variância.

Exemplo

Em uma determinada repartição pública, 10% das guias preenchidas estão incorretas. Essas guias correspondem a uma liberação na qual cinco delas devem estar preenchidas conjuntamente. Considere que cada uma tem a mesma probabilidade de ser preenchida incorretamente (como se houvesse repetição no experimento de retirar guias).

a) Qual a probabilidade de haver exatamente três guias incorretas nas cinco guias para liberação?

O **"sucesso"** é a ocorrência de guias preenchidas incorretamente.

p = 0,1 n = 5

$$P(X=3) = C_5^3 \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0081$$

b) Qual a probabilidade de haver duas ou mais guias incorretas nas cinco guias para liberação?

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$
$$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 0{,}0815$$

c) Qual a probabilidade de um conjunto de cinco guias não apresentar nenhuma guia incorreta?

$$P(X=0) = C_5^0 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^5 = 0{,}5905$$

Antes de prosseguir, desta vez com o estudo da Distribuição de Poisson, você deve realizar as Atividades 1 e 2, ao final

desta Unidade, para aplicar os conhecimentos já adquiridos sobre a distribuição binomial. É importante salientarmos que nesta Unidade a resolução das atividades de aprendizagem será solicitada ao longo do texto para facilitar a sua compreensão dos conceitos e de como utilizá-los. Lembre-se de que as respostas se encontram no final do livro.

Distribuição de Poisson

Você pode empregar a Distribuição de Poisson em situações nas quais não se está interessado no número de sucessos obtidos em n tentativas, como ocorre no caso da distribuição binomial. Entretanto, esse número de sucessos deve estar dentro de um intervalo contínuo, ou seja, **o número de sucessos ocorridos durante um intervalo contínuo**, que pode ser um intervalo de tempo, espaço etc.

Imagine que você queira estudar o número de suicídios ocorridos em uma cidade durante um ano ou o número de acidentes automobilísticos ocorridos em uma rodovia em um mês ou, ainda, o número de defeitos encontrados em um rolo de arame ovalado de 500m. Essas situações são exemplos daquelas que se enquadram na Distribuição de Poisson.

Note que nos exemplos anteriores não há como você determinar a probabilidade de ocorrência de um sucesso, mas sim a frequência média de sua ocorrência, como dois suicídios por ano, que denominaremos $\boldsymbol{\lambda}$.

Em uma situação com essas características, a variável aleatória X = número de sucessos em um intervalo contínuo, terá uma Distribuição de Poisson, com λ (frequência média de sucesso). Simbolicamente, podemos utilizar a notação $\mathbf{X \sim P(\lambda)}$.

A variável aleatória X tem uma Distribuição de Poisson (P) com uma frequência média de sucesso λ.

A função de probabilidade da Distribuição de Poisson será dada por meio da seguinte expressão:

$$P(X = x) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

Onde:

e =2,7182 (base dos logaritmos neperianos); e

λ corresponde à frequência média de sucesso no intervalo contínuo que se deseja calcular a probabilidade.

Exemplo

A análise dos dados dos últimos anos de uma empresa de energia elétrica forneceu o valor médio de um blecaute por ano. Pense na probabilidade de isso ocorrer no próximo ano:

a) Nenhum blecaute.

b) De 2 a 4 blecautes.

c) No máximo 2 blecautes.

Note que o exemplo afirma que a cada ano acontece em média um blecaute, ou seja, o **número de sucesso ocorrido em um intervalo contínuo**. Verificamos que a variável tem Distribuição de Poisson:

$$P(X = x) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

Veja que aqui não é necessário fazer regra de três, pois as perguntas são no intervalo de um ano. Então: $\lambda = 1$:

a) $P(x=0) = \frac{e^{-1}.1^0}{0!} = \frac{0{,}3679.1}{1} = 0{,}3679 \; ou \; 36{,}79\%$

b) $P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = \frac{e^{-1}.1^2}{2!} + \frac{e^{-1}.1^3}{3!} + \frac{e^{-1}.1^4}{4!} =$

$= 0{,}1839 + 0{,}061 + 0{,}015$

$= 0{,}2599 \; ou \; 25{,}99\%$

c) Como já temos os valores de x = 0 e x = 2 basta calcularmos para x = 1 e somarmos os resultados.

$$P(x=1) = \frac{e^{-1}.1^1}{1!} = \frac{0{,}3679.1}{1} = 0{,}3679 \text{ ou } 36{,}79\%$$

$$P(x \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) =$$

$$0{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}1839 = 0{,}9197 \text{ ou } 91{,}97\%$$

Vejamos uma aplicação da Distribuição de Poisson considerando que o Corpo de Bombeiros de uma determinada cidade recebe, em média, três chamadas por dia. Queremos saber, então, qual a probabilidade de a instituição receber:

a) 4 chamadas em um dia: verificamos que a variável tem Distribuição de Poisson, pois temos o número de chamadas (variável discreta) por dia (intervalo contínuo). A probabilidade será calculada por meio da expressão:

$$P(X = x) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$$

Como o intervalo em que se deseja calcular a probabilidade é um dia, o λ será igual a 3.

Não é necessário fazer regra de três, pois as perguntas são no intervalo de um dia e tem-se a média de chamadas por dia, então: λ = 3. Substituindo-o na expressão, teremos:

$$P(X=4) = e^{-3}\frac{3^4}{4!} = 0{,}1680$$

b) Nenhuma chamada em um dia: nesse caso, o intervalo continua sendo um dia. Logo, o lambda (λ) continua sendo o mesmo, ou seja, λ = 3. Substituindo-o na expressão, teremos:

$$P(X=0) = e^{-3}\frac{3^0}{0!} = 0{,}0498$$

c) 20 chamadas em uma semana: nesse caso o intervalo em que se deseja calcular a probabilidade é de uma

semana, ou seja, sete dias. Então, em uma semana, a frequência média de chamadas será de 7 dias vezes 3 chamadas/dia:

$\lambda = 21$ chamadas por semana.

Substituindo os valores, teremos a seguinte probabilidade:

$$P(X = 20) = e^{-21}\frac{21^{20}}{20!} = 0{,}0867$$

Uma característica da Distribuição de Poisson é que as estatísticas da distribuição (média e variância) apresentam o mesmo valor, ou seja, são iguais a λ. Então, teremos:

Média = Variância = λ

Antes de discutirmos as distribuições contínuas, vamos aplicar os conhecimentos relacionados à Distribuição de Poisson realizando a Atividade 3, ao final desta Unidade.

Distribuições Contínuas

Dentre as várias distribuições de probabilidade contínuas, abordaremos aqui apenas a distribuição normal, que é muito aplicada em pesquisas científicas e tecnológicas. Grande parte das variáveis contínuas de interesse prático segue essa distribuição, aliada ao Teorema Central do Limite (TCL), que é a base das estimativas e dos testes de hipóteses realizados sobre a média de uma população qualquer, e garante que a distribuição amostral das médias segue uma distribuição normal, independentemente da distribuição da variável em estudo, como será visto mais adiante.

Distribuição Normal

A função densidade de probabilidade da distribuição normal é dada por:

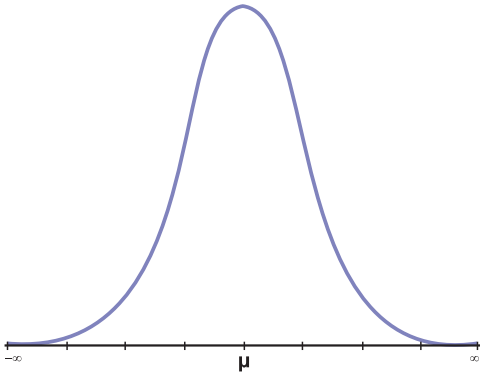
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, x \in R.$$

Onde:

μ e σ são a média e o desvio padrão, respectivamente, da distribuição de probabilidade.

π corresponde a aproximadamente 3,1415 e *exp* a uma função exponencial.

O gráfico da distribuição normal, utilizando a função mostrada anteriormente e os conceitos vistos nas disciplinas *Matemática Básica* e *Matemática para Administradores*, é dado por:

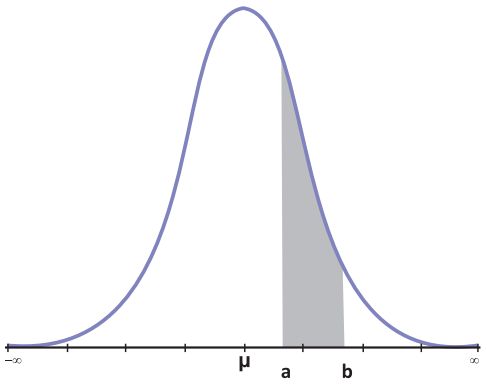


Você encontrará a seguir as principais propriedades da distribuição normal:

- é simétrica em relação ao ponto x = μ (50% abaixo e 50% acima da média);
- tem forma **campanular***;
- as três medidas de posição – média, mediana e moda – se confundem no valor de x correspondente ao ponto máximo da curva (x = μ= Md = Mo);
- fica perfeitamente definida conhecendo-se a média e o desvio padrão, pois outros termos da função são constantes; e
- toda a área compreendida entre a curva e o eixo x é igual a 1 (conceito da soma de probabilidades no espaço amostral).

*Campanular – relativo à campânula; objeto em forma de sino. Fonte: Houaiss (2009).

Portanto, a área sob a curva entre os pontos a e b – em que a < b – representa a probabilidade de a variável X assumir um valor entre a e b (área escura), como observaremos a seguir.



Desse modo, você pode associar que, no caso das distribuições contínuas, a área do gráfico corresponde a probabilidades.

Então, veja a notação utilizada para a distribuição normal:

$$X \sim N(\mu , \sigma^2)$$

A variável x tem distribuição normal com média μ e variância σ^2.

Para calcularmos as probabilidades via distribuição normal é necessário o conhecimento de cálculo integral para calcular a área sob a curva normal entre dois pontos a e b. Assim, procuramos tabelar os valores de probabilidade que seriam obtidos por meio da integração da função densidade de probabilidade normal em um determinado intervalo.

A dificuldade para se processar esse tabelamento se deve à infinidade de valores que μ(média) e σ(desvio padrão) poderiam assumir. Nessas condições, teríamos que dispor de uma tabela para cada uma das infinitas combinações de μ e σ, ou seja, em cada situação que se quisesse calcular uma probabilidade.

Para resolver esse problema, podemos obter uma nova forma para a distribuição normal que não seja influenciada por μ e σ. O problema é solucionado mediante o emprego de uma nova variável, definida por:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Essa variável transforma todas as distribuições normais em uma distribuição normal reduzida ou padronizada, de média zero e desvio padrão um. Então, temos: $Z \sim N(0,1)$.

Assim, utilizamos apenas uma tabela para o cálculo de probabilidades para qualquer que seja a curva correspondente a uma distribuição normal.

Portanto, para um valor de $x = \mu$ em uma distribuição normal qualquer, corresponde o valor:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$$ na distribuição normal reduzida.

Para $x = \mu + \sigma$, temos:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$$ e assim por diante.

Podemos definir a distribuição normal reduzida ou padronizada como sendo uma distribuição da variável Z que apresenta distribuição normal com média zero e variância 1 ($Z \sim N(0; 1)$).

Na Tabela 15, que apresenta a distribuição normal padronizada, as áreas ou probabilidades fornecidas estão entre zero e o valor de Z.

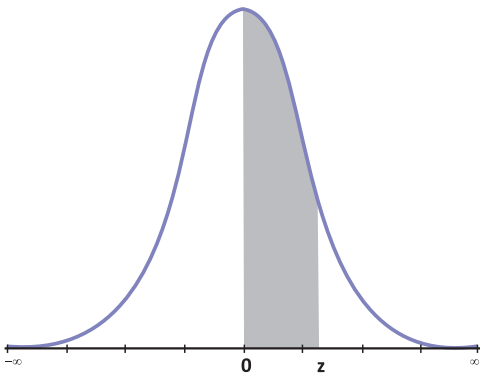


Tabela 15: Área sob a curva normal padronizada compreendida entre os valores 0 e Z

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Veja que na Tabela 15 os valores apresentados na primeira coluna correspondem à parte inteira e decimal do valor de Z (por exemplo 1,5), enquanto os valores da primeira linha correspondem à parte centesimal (por exemplo 8). Assim, teremos o valor de Z = 1,58. Já os valores encontrados no meio da tabela correspondem às probabilidades dos respectivos valores compreendidos entre zero e Z.

Observe que nessa tabela não é necessário apresentar as áreas ou probabilidade para valores negativos de Z (ou seja, abaixo da média), devido à simetria da curva.

Para que você possa entender a utilização da distribuição normal, vamos considerar a arrecadação de um tributo de uma pequena cidade. Verificamos que essa arrecadação seguia ao longo do tempo uma distribuição normal com média de R$ 60.000,00 e desvio padrão de R$ 10.000,00. Procuramos, então, responder aos seguintes questionamentos:

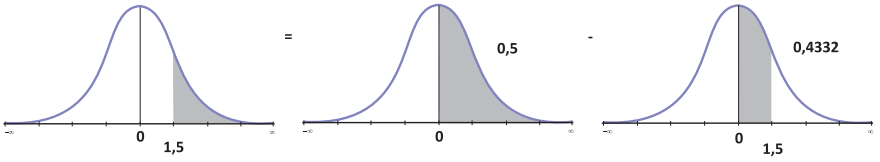
a) Qual a probabilidade de a arrecadação ser maior do que R$ 75.000,00?

Como a variável arrecadação apresenta distribuição aproximadamente normal com média 60.000 e variância de 10.000^2 [$X \sim N(60.000;10.000^2)$] e procura-se calcular a $P(X > 75.000) = ?$,

primeiramente, precisamos transformar a variável X em Z e, depois, substituindo na expressão os valores corretos, teremos:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{75000 - 60000}{10000} = 1{,}50$$

Olhando esse valor na Tabela 15, z = 1,50 (1,5 na primeira coluna e o zero na primeira linha), encontraremos no meio da tabela o valor de 0,4332, que corresponde à probabilidade de z estar entre zero e 1,5, como você pode observar a seguir.



A área escura da curva mais à esquerda (Curva 1) corresponde a P(X>75000), que é a mesma coisa que: P(z > 1,50). Então:

P(z > 1,50) [Curva 1] = P(0<z<+∞)[Curva 2] –

P(0 < z < 1,50) [Curva 3] = 0,5 – 0,4332 = 0,0668.

Retirou-se a probabilidade encontrada de 0,5, pois esse valor corresponde à probabilidade de zero até o infinito.

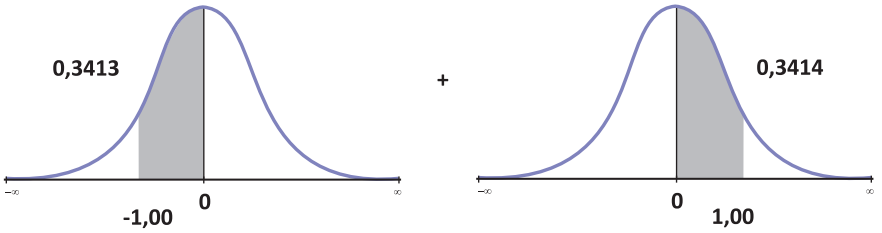
b) Qual a probabilidade de a arrecadação estar entre R$ 50.000,00 e R$ 70.000,00?

P(50.000 < X < 70.000) = ?

Primeiramente, precisamos transformar a variável X em Z e, depois, substituindo a expressão de Z, teremos valores de Z_1 e Z_2, relacionados aos valores de X_1=50.000 e X_2=70.000:

$$z_1 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{50000 - 60000}{10000} = -1{,}00$$

$$z_2 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{70000 - 60000}{10000} = 1{,}00$$



Podemos verificar que:

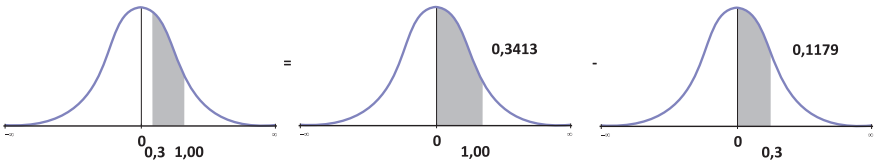
P(50.000 < X < 70.000) = P(– 1,00 < z < 1,00) = 0,3413 + 0,3413 = 0,6826 (por inspeção na Tabela 15, considerando z = 1,00 e simetria, deduzimos a área correspondente a z = -1,00).

c) Qual a probabilidade de a arrecadação estar entre R$ 63.000,00 e R$ 70.000,00?

P(63.000 < X < 70.000) = ?

$$z_1 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{63000 - 60000}{10000} = 0{,}30$$

$$z_2 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{70000 - 60000}{10000} = 1{,}00$$



$$P(63.000 < X < 70.000) = P(0,30 < z < 1,00) =$$
$$0,3413 - 0,1179 = 0,2234$$

Destacamos que existem outras distribuições, tanto discretas quanto contínuas, que não foram abordadas neste livro. Portanto, recomendamos que você procure outras fontes de conhecimento, para começar, fazendo uma pesquisa na internet sobre essas distribuições.

Antes de prosseguir, você deve realizar as Atividades 4 e 5 ao final desta Unidade, e terá a oportunidade de verificar o seu grau de compreensão sobre a distribuição normal.

DISTRIBUIÇÕES AMOSTRAIS

Com as distribuições amostrais, você pode inferir propriedades ou medidas de um agregado maior (a população) a partir de um conjunto menor (a amostra), ou seja, inferir sobre parâmetros populacionais dispondo apenas de estatísticas amostrais. Portanto, torna-se necessário um estudo detalhado das distribuições amostrais, que são a base para intervalos de confiança e testes de hipóteses.

Para que você tenha condições de fazer afirmações sobre um determinado parâmetro populacional (ex: μ), baseadas na estimativa x, obtida a partir dos dados amostrais, é necessário conhecer a relação existente entre x e μ, isto é, o comportamento de $\bar{x}$ quando se extraem todas as amostras possíveis da população, ou seja, sua distribuição amostral.

Para obtermos essa distribuição de um estimador, é necessário conhecermos o processo pelo qual as amostras foram retiradas, isto é, se as amostras foram retiradas **com reposição** ou **sem reposição**. Neste material, iremos considerar apenas as situações de amostragens com reposição.

Dessa forma, a partir do comportamento da estatística amostral, podemos aplicar um teorema muito conhecido na estatística: o Teorema do Central do Limite (TCL), o qual propõe que, se retirarmos todas as possíveis amostras de tamanho n de uma população, independente de sua distribuição, e verificarmos como as estatísticas amostrais obtidas se distribuem, teremos uma distribuição **aproximadamente normal**, com $\mu_x = \mu$ (**média das medias amostrais igual à média populacional**) e variância das médias $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$ (**variância das médias amostrais é igual à variância da população dividida pelo tamanho da amostra**), independentemente da distribuição da variável em questão.

Portanto, considerando a distribuição amostral de médias, quando se conhece a variância populacional ou a amostra é grande (n > 30), utilizamos a estatística z da distribuição normal vista anteriormente, independentemente da distribuição da população. Então, por meio do TCL, a estatística será dada por: $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Confira a indicação de um programa para cálculo amostral na seção Complementando, ao final desta Unidade.

Distribuição t de Student

Na prática, muitas vezes não conhecemos o σ^2 e trabalhamos com amostras pequenas, ou seja, menor ou igual a 30. Assim, conhecemos apenas sua estimativa s (desvio padrão amostral). Substituindo σ por seu estimador s, na expressão da variável padronizada, obtemos a seguinte variável:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$ **(expressão semelhante a Z)**

Essa variável segue uma distribuição t de Student com (n – 1) **graus de liberdade***.

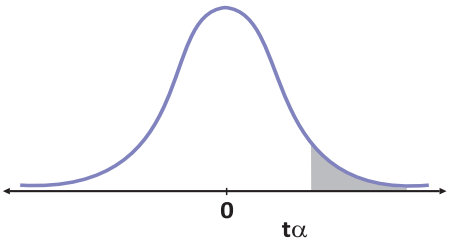
O **n – 1** corresponde ao divisor do cálculo da variância amostral, ou seja, o número de variáveis na amostra que variam livremente na definição da estatística.

A distribuição t de Student apresenta as seguintes características:

- é simétrica em relação à média, que é zero;
- tem forma campanular (semelhante à normal);
- quando n tende para infinito, a distribuição t tende para a distribuição normal. Na prática, a aproximação é considerada boa quando n >30; e
- possui n-1 graus de liberdade.

Vamos aprender a utilizar a tabela da distribuição t de Student. Na primeira linha, temos o valor de α, que **corresponde à probabilidade (área) acima de um determinado valor da tabela**. Veja a seguir o conceito de α **(área mais escura)**.

***Graus de liberdade (GL)** – é o número de determinações independentes (dimensão da amostra) menos o número de parâmetros estatísticos a serem avaliados na população. Para calcular o desvio padrão de n elementos é necessário calcular a média primeiro; por isso, nesse caso, os graus de liberdade são iguais a n - 1. Fonte: Elaborado pelo autor deste livro.



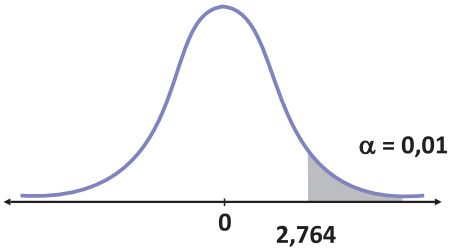
Observe que na Tabela 16 temos na primeira coluna os graus de liberdade (GL), no centro da tabela os valores da **estatística t de Student**, e na primeira linha os valores de α.

Tabela 16: Limites unilaterais da distribuição t de Student ao nível α de probabilidade

	α								
GL	0.250	0.200	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160
240	0.676	0.843	1.039	1.285	1.651	1.970	2.342	2.596	3.125
480	0.675	0.842	1.038	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586	3.107
700	0.675	0.842	1.037	1.283	1.647	1.963	2.332	2.583	3.102
1000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Para exemplificar o uso da tabela, considere que desejamos encontrar a probabilidade de ser maior do que um valor de t igual a 2,764 trabalhando com uma amostra de tamanho n = 11. Portanto, teremos 10 graus de liberdade, porque GL = n – 1; e, nessa linha, procuraremos o valor que desejamos encontrar: 2,764. Subindo na tabela em direção ao α, encontraremos um valor de 0,01 na primeira linha, ou seja, essa é a probabilidade de ser maior do que 2,764 com 10 graus de liberdade.

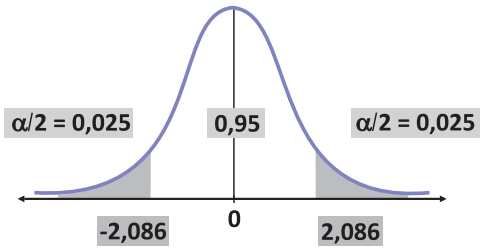


Vamos resolver outro exemplo:

Encontre o valor de t tal que a probabilidade de t (distribuição) esteja entre -t e t e seja igual a 0,95 com 20 graus de liberdade. Isso pode ser representado da forma a seguir:

$$t \,/\, P\,(-a < t < b\,) = 0{,}95 \text{ com } 20 \text{ gl}$$

As letras a e b correspondem a valores que a estatística t de Student pode assumir. A área do meio corresponde a uma probabilidade de 0,95. Então, como a probabilidade total é igual a 1, sobraram 0,05 de probabilidade para serem divididos pelas áreas do lado direito e esquerdo. Observando o valor de $\alpha/2=0{,}025$ (área à direita do valor tabelado) na tabela de t de Student e com 20 graus de liberdade, encontraremos o valor de 2,086. Do outro lado, teremos um valor negativo, pois ele está à esquerda da média igual a zero, como você pode ver:

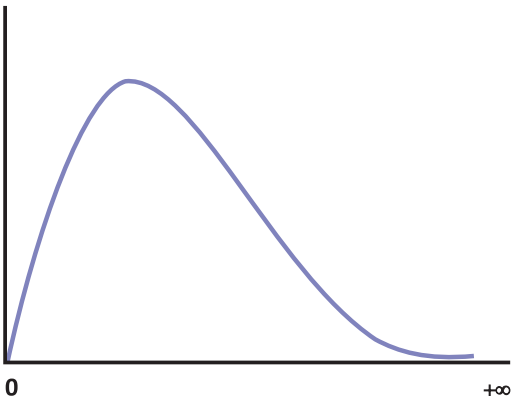


Distribuição de Qui-Quadrado

Retirando uma amostra de n elementos de uma população normal com média μ e variância σ^2, podemos demonstrar que a distribuição amostral da variância amostral segue uma **distribuição de χ^2 (qui-quadrado)** com n-1 graus de liberdade. A variável da estatística de qui-quadrado será dada por:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$ tem distribuição χ^2 com n-1 graus de liberdade.

Essa distribuição é sempre positiva, o que pode ser comprovado pela própria definição da variável. É, ainda, assimétrica à direita, como você pode ver no gráfico da distribuição:



Na Tabela 17, você pode ver como é feita a utilização da distribuição de qui-quadrado com graus de liberdade (GL).

Tabela 17: Limites unilaterais da distribuição de χ^2 ao nível α de probabilidade

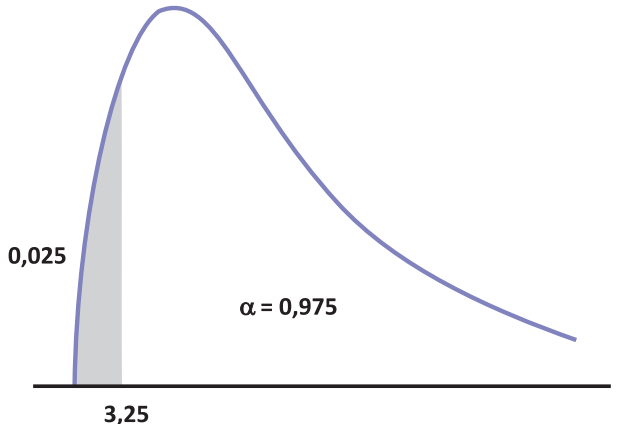
	α												
GL	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.1015	0.4549	1.3233	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	0.5754	1.3863	2.7726	4.6052	5.9915	7.3778	9.2104	10.5965
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	1.2125	2.3660	4.1083	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8381
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	1.9226	3.3567	5.3853	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8602
5	0.4118	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	2.6746	4.3515	6.6257	9.2363	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	3.4546	5.3481	7.8408	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5475
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	4.2549	6.3458	9.0371	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	5.0706	7.3441	10.2189	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9549
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	5.8988	8.3428	11.3887	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	2.1558	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	6.7372	9.3418	12.5489	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1881
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	7.5841	10.3410	13.7007	17.2750	19.6752	21.9200	24.7250	26.7569
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	8.4384	11.3403	14.8454	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2997
13	3.5650	4.1069	5.0087	5.8919	7.0415	9.2991	12.3398	15.9839	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8193
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	10.1653	13.3393	17.1169	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3194
15	4.6009	5.2294	6.2621	7.2609	8.5468	11.0365	14.3389	18.2451	22.3071	24.9958	27.4884	30.5780	32.8015
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	11.9122	15.3385	19.3689	23.5418	26.2962	28.8453	31.9999	34.2671
17	5.6973	6.4077	7.5642	8.6718	10.0852	12.7919	16.3382	20.4887	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7184
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3904	10.8649	13.6753	17.3379	21.6049	25.9894	28.8693	31.5264	34.8052	37.1564
19	6.8439	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	14.5620	18.3376	22.7178	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5821
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	15.4518	19.3374	23.8277	28.4120	31.4104	34.1696	37.5663	39.9969
21	8.0336	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	16.3444	20.3372	24.9348	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4009
22	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	17.2396	21.3370	26.0393	30.8133	33.9245	36.7807	40.2894	42.7957
23	9.2604	10.1957	11.6885	13.0905	14.8480	18.1373	22.3369	27.1413	32.0069	35.1725	38.0756	41.6383	44.1814
24	9.8862	10.8563	12.4011	13.8484	15.6587	19.0373	23.3367	28.2412	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5584
25	10.5196	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	19.9393	24.3366	29.3388	34.3816	37.6525	40.6465	44.3140	46.9280
26	11.1602	12.1982	13.8439	15.3792	17.2919	20.8434	25.3365	30.4346	35.5632	38.8851	41.9231	45.6416	48.2898
27	11.8077	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	21.7494	26.3363	31.5284	36.7412	40.1133	43.1945	46.9628	49.6450
28	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	22.6572	27.3362	32.6205	37.9159	41.3372	44.4608	48.2782	50.9936
29	13.1211	14.2564	16.0471	17.7084	19.7677	23.5666	28.3361	33.7109	39.0875	42.5569	45.7223	49.5878	52.3355
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	24.4776	29.3360	34.7997	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6719
40	20.7066	22.1642	24.4331	26.5093	29.0505	33.6603	39.3353	45.6160	51.8050	55.7585	59.3417	63.6908	66.7660
50	27.9908	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886	42.9421	49.3349	56.3336	63.1671	67.5048	71.4202	76.1538	79.4898
60	35.5344	37.4848	40.4817	43.1880	46.4589	52.2938	59.3347	66.9815	74.3970	79.0820	83.2977	88.3794	91.9518
100	67.3275	70.0650	74.2219	77.9294	82.3581	90.1332	99.3341	109.1412	118.4980	124.3421	129.5613	135.8069	140.1697
120	83.8517	86.9233	91.5726	95.7046	100.6236	109.2197	119.3340	130.0546	140.2326	146.5673	152.2113	158.9500	163.6485

Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Para obter probabilidades ou o valor da estatística de qui-quadrado, você irá proceder do mesmo modo que procedeu na tabela da distribuição t de Student. Na primeira linha, encontrará os valores de α, na primeira coluna os graus de liberdade e no meio da tabela os valores da estatística de qui-quadrado.

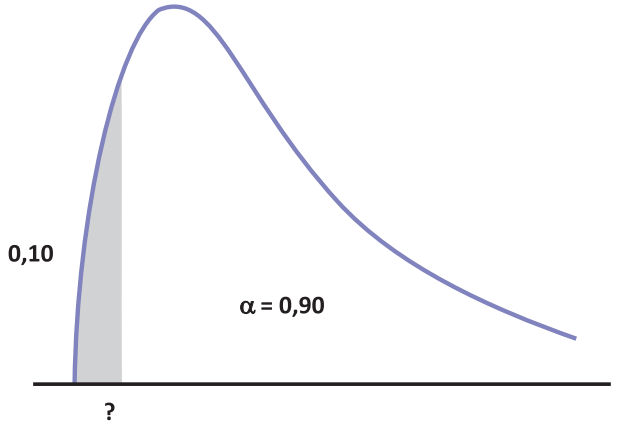
Vamos, então, aprender a olhar a tabela de qui-quadrado?

Encontre a probabilidade de o valor de qui-quadrado ser maior do que 3,25 com 10 graus de liberdade, ou seja, $P(x^2 > 3{,}25) = ?$



Para 10 graus de liberdade e um valor de 3,25 (valor aproximado) na tabela, encontraremos na parte superior um valor de $\alpha = 0{,}975$, que corresponde à probabilidade procurada.

Agora vamos ver outro exemplo. Sabemos que a probabilidade de ser maior que um determinado valor de qui-quadrado é igual a 0,90 ($P(x^2 > ?) = 0{,}9$ com 15 graus de liberdade. Então, o valor do qui-quadrado que corresponde à interrogação (?) será obtido na tabela de qui-quadrado.



Observando a tabela de qui-quadrado com 15 graus de liberdade e um valor de $\alpha = 0{,}90$ encontraremos no meio dela um valor de 8,55, que será o valor de qui-quadrado, cuja probabilidade de ser maior do que ele é de 0,90 (α).

Distribuição F

A **distribuição F ou de Fischer-Snedecor** corresponde à distribuição da razão de duas variâncias. Temos, então, duas populações que apresentam variâncias populacionais e delas são retiradas amostras nas quais são calculadas variâncias amostrais. A relação entre essas variâncias é que nos dá a distribuição F. A estatística da distribuição é apresentada a seguir:

$$F = \frac{s_A^2 / \sigma_A^2}{s_B^2 / \sigma_B^2}$$

Segue uma distribuição F com $v_1 = n_1 - 1$ e $v_2 = n_2 - 1$ graus de liberdade para o numerador e o denominador, respectivamente.

Uma das tabelas da distribuição F de Fischer-Snedecor é apresentada a seguir:

Tabela 18: Limites unilaterais da distribuição F de Fischer–Snedecor ao nível de 10% de probabilidade

GL	V1																			
V2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	40	60	120	240
1	39.864	49.500	53.593	55.833	57.240	58.204	58.906	59.439	59.857	60.195	60.473	60.705	60.902	61.073	61.220	61.740	62.529	62.794	63.061	63.194
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392	9.401	9.408	9.415	9.420	9.425	9.441	9.466	9.475	9.483	9.487
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230	5.222	5.216	5.210	5.205	5.200	5.184	5.160	5.151	5.143	5.138
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920	3.907	3.896	3.886	3.878	3.870	3.844	3.804	3.790	3.775	3.768
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297	3.282	3.268	3.257	3.247	3.238	3.207	3.157	3.140	3.123	3.114
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937	2.920	2.905	2.892	2.881	2.871	2.836	2.781	2.762	2.742	2.732
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703	2.684	2.668	2.654	2.643	2.632	2.595	2.535	2.514	2.493	2.482
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538	2.519	2.502	2.488	2.475	2.464	2.425	2.361	2.339	2.316	2.304
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416	2.396	2.379	2.364	2.351	2.340	2.298	2.232	2.208	2.184	2.172
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323	2.302	2.284	2.269	2.255	2.244	2.201	2.132	2.107	2.082	2.069
11	3.225	2.860	2.660	2.536	2.451	2.389	2.342	2.304	2.274	2.248	2.227	2.209	2.193	2.179	2.167	2.123	2.052	2.026	2.000	1.986
12	3.177	2.807	2.606	2.480	2.394	2.331	2.283	2.245	2.214	2.188	2.166	2.147	2.131	2.117	2.105	2.060	1.986	1.960	1.932	1.918
13	3.136	2.763	2.560	2.434	2.347	2.283	2.234	2.195	2.164	2.138	2.116	2.097	2.080	2.066	2.053	2.007	1.931	1.904	1.876	1.861
14	3.102	2.726	2.522	2.395	2.307	2.243	2.193	2.154	2.122	2.095	2.073	2.054	2.037	2.022	2.010	1.962	1.885	1.857	1.828	1.813
15	3.073	2.695	2.490	2.361	2.273	2.208	2.158	2.119	2.086	2.059	2.037	2.017	2.000	1.985	1.972	1.924	1.845	1.817	1.787	1.771
16	3.048	2.668	2.462	2.333	2.244	2.178	2.128	2.088	2.055	2.028	2.005	1.985	1.968	1.953	1.940	1.891	1.811	1.782	1.751	1.735
17	3.026	2.645	2.437	2.308	2.218	2.152	2.102	2.061	2.028	2.001	1.978	1.958	1.940	1.925	1.912	1.862	1.781	1.751	1.719	1.703
18	3.007	2.624	2.416	2.286	2.196	2.130	2.079	2.038	2.005	1.977	1.954	1.933	1.916	1.900	1.887	1.837	1.754	1.723	1.691	1.674
19	2.990	2.606	2.397	2.266	2.176	2.109	2.058	2.017	1.984	1.956	1.932	1.912	1.894	1.878	1.865	1.814	1.730	1.699	1.666	1.649
20	2.975	2.589	2.380	2.249	2.158	2.091	2.040	1.999	1.965	1.937	1.913	1.892	1.875	1.859	1.845	1.794	1.708	1.677	1.643	1.626
21	2.961	2.575	2.365	2.233	2.142	2.075	2.023	1.982	1.948	1.920	1.896	1.875	1.857	1.841	1.827	1.776	1.689	1.657	1.623	1.605
22	2.949	2.561	2.351	2.219	2.128	2.060	2.008	1.967	1.933	1.904	1.880	1.859	1.841	1.825	1.811	1.759	1.671	1.639	1.604	1.586
23	2.937	2.549	2.339	2.207	2.115	2.047	1.995	1.953	1.919	1.890	1.866	1.845	1.827	1.811	1.796	1.744	1.655	1.622	1.587	1.568
24	2.927	2.538	2.327	2.195	2.103	2.035	1.983	1.941	1.906	1.877	1.853	1.832	1.814	1.797	1.783	1.730	1.641	1.607	1.571	1.552
25	2.918	2.528	2.317	2.184	2.092	2.024	1.971	1.929	1.895	1.866	1.841	1.820	1.802	1.785	1.771	1.718	1.627	1.593	1.557	1.538
26	2.909	2.519	2.307	2.174	2.082	2.014	1.961	1.919	1.884	1.855	1.830	1.809	1.790	1.774	1.760	1.706	1.615	1.581	1.544	1.524
27	2.901	2.511	2.299	2.165	2.073	2.005	1.952	1.909	1.874	1.845	1.820	1.799	1.780	1.764	1.749	1.695	1.603	1.569	1.531	1.511
28	2.894	2.503	2.291	2.157	2.064	1.996	1.943	1.900	1.865	1.836	1.811	1.790	1.771	1.754	1.740	1.685	1.592	1.558	1.520	1.500
29	2.887	2.495	2.283	2.149	2.057	1.988	1.935	1.892	1.857	1.827	1.802	1.781	1.762	1.745	1.731	1.676	1.583	1.547	1.509	1.489
30	2.881	2.489	2.276	2.142	2.049	1.980	1.927	1.884	1.849	1.819	1.794	1.773	1.754	1.737	1.722	1.667	1.573	1.538	1.499	1.478
40	2.835	2.440	2.226	2.091	1.997	1.927	1.873	1.829	1.793	1.763	1.737	1.715	1.695	1.678	1.662	1.605	1.506	1.467	1.425	1.402
50	2.809	2.412	2.197	2.061	1.966	1.895	1.840	1.796	1.760	1.729	1.703	1.680	1.660	1.643	1.627	1.568	1.465	1.424	1.379	1.354
60	2.791	2.393	2.177	2.041	1.946	1.875	1.819	1.775	1.738	1.707	1.680	1.657	1.637	1.619	1.603	1.543	1.437	1.395	1.348	1.321
80	2.769	2.370	2.154	2.016	1.921	1.849	1.793	1.748	1.711	1.680	1.653	1.629	1.609	1.590	1.574	1.513	1.403	1.358	1.307	1.278
100	2.756	2.356	2.139	2.002	1.906	1.834	1.778	1.732	1.695	1.663	1.636	1.612	1.592	1.573	1.557	1.494	1.382	1.336	1.282	1.250
120	2.748	2.347	2.130	1.992	1.896	1.824	1.767	1.722	1.684	1.652	1.625	1.601	1.580	1.562	1.545	1.482	1.368	1.320	1.265	1.232
240	2.727	2.325	2.107	1.968	1.871	1.799	1.742	1.696	1.658	1.625	1.598	1.573	1.552	1.533	1.516	1.451	1.332	1.281	1.219	1.180

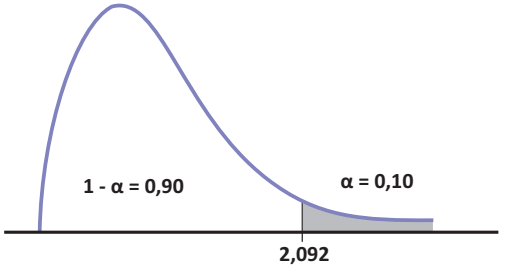
Fonte: Elaborada pelo autor deste livro

Note que, no caso da tabela da distribuição F, o valor de α, que corresponde à área extrema à direita da curva, é apresentado no título da tabela, pois para cada valor de α temos uma tabela diferente.

Encontramos uma aplicação prática da distribuição F na verificação da homogeneidade das variâncias provenientes de duas populações normais e independentes. Então, encontre o valor de F1, cuja probabilidade de ser maior do que ele é 0,10 com 5 e 25 graus de liberdade, ou seja, $P(F > F1) = 0{,}10$ com $v_1 = 5$ e $v_2 = 25$ gl.

Como temos a probabilidade de o resultado ser maior do que um valor de F, esse valor corresponde ao valor de α. Precisaremos, então, trabalhar com a tabela que apresenta 10% de probabilidade no título: a Tabela 18.

Observando $v_1 = 5$ e $v_2 = 25$, encontraremos um valor de F igual a 2,092.



Noções de Estimação

Um dos principais objetivos da estatística inferencial consiste em estimar os valores de parâmetros populacionais desconhecidos (estimação de parâmetros) utilizando dados amostrais; por exemplo, estimar uma média populacional a partir de uma média amostral. Na verdade, qualquer característica de uma população pode ser estimada a partir de uma amostra aleatória, desde que esta amostra represente bem a população.

Os parâmetros populacionais mais comuns a serem estimados são: a média, o desvio padrão e a proporção.

A estatística inferencial tem uma alta relevância, já que a utilização de dados amostrais está associada à maioria das decisões que um gestor ou um pesquisador deve tomar. Consiste em tirar conclusões válidas de uma população a partir de sua amostra representativa, tendo isso grande importância em muitas áreas do conhecimento.

A partir de uma amostra de 800 clientes (escolhidos aleatoriamente entre todos os clientes que abasteceram na primeira quinzena de um determinado mês) de um posto de gasolina que possuem carros populares, verificou-se que o consumo médio do combustível foi de R$ 200,00 por quinzena.

Reflita sobre a afirmação a seguir.

Podemos inferir que o consumo médio da população de clientes da primeira quinzena do mês em estudo, proprietários de carros populares que abastecem nesse posto de gasolina, é de R$ 200,00.

Esta é uma estimativa que chamamos de **pontual**, ou seja, inferimos sobre a população considerando apenas o valor da estimativa. Essas estimativas por ponto não nos dão uma informação confiável

quanto às margens de erro que deveriam ser aplicadas ao resultado. Tudo o que nós sabemos, por exemplo, é que o consumo médio de gasolina foi estimado em R$ 200,00 por quinzena, independentemente do tamanho da amostra e da variabilidade inerente aos dados. Se fosse usado um tamanho grande de amostra e houvesse pouca variabilidade, teríamos grandes razões para acreditar no resultado; mas não sabemos quão precisa é a nossa estimativa quando temos apenas uma estimativa por ponto.

Entretanto, podemos estimar ou fazer inferências sobre os valores da população usando uma segunda abordagem, chamada de **estimativas por intervalos** ou **intervalos de confiança**, que da o intervalo dentro do qual se espera que esteja o valor da população, com uma dada probabilidade ou um nível de confiança. Nesse caso, poderíamos inferir, por exemplo, que o consumo de carros populares que abastecem no posto de gasolina está no intervalo de R$180,00 a R$ 220,00 e, ainda, afirmaríamos isso com, por exemplo, 95% de certeza.

Como a estimativa por intervalos nos fornece uma informação mais precisa em relação ao parâmetro, esta é a melhor forma de se estimar o parâmetro populacional. Então, para você estimar parâmetros populacionais por meio de dados amostrais é necessário o conhecimento da distribuição amostral da estatística que está sendo usada como estimador.

Em resumo, podemos dizer que a estimativa pontual fornece uma estimativa única de um parâmetro e que a estimativa intervalar nos dá um intervalo de valores possíveis, nos quais se admite que esteja o parâmetro populacional com uma probabilidade conhecida.

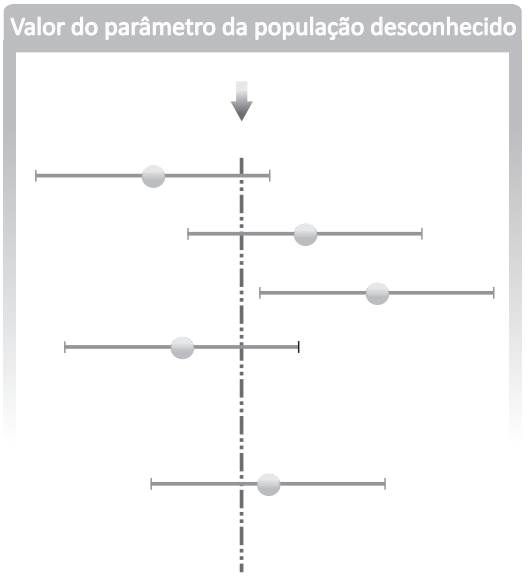
Na seção Distribuições Amostrais abordamos esse assunto. Se julgar necessário, volte lá e releia o conteúdo.

Estimação por Intervalos

Você irá ver agora que um **intervalo de confiança** dá um intervalo de valores, centrado na estatística amostral, no qual julgamos, com um risco conhecido de erro, estar o parâmetro da população.

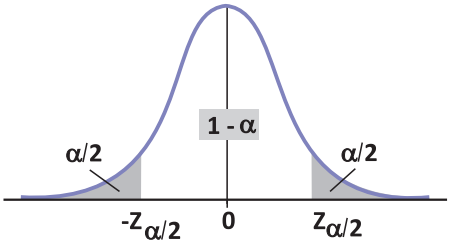
É o nível de significância que nos dá a medida da **incerteza** dessa inferência. O α geralmente assume valores entre 1 e 10%.

A partir de informações de amostras, devemos calcular os limites de um intervalo, valores críticos, que em (1-α)% dos casos inclua o valor do parâmetro a estimar e em α% dos casos não inclua o valor do parâmetro, como podemos ver no desenho abaixo.



Interpretando-se nessa figura cada segmento como um intervalo de confiança baseado numa amostra, apenas no terceiro caso o intervalo não inclui o parâmetro populacional desconhecido estimado.

O nível de confiança $1 - \alpha$ é a probabilidade de o intervalo de confiança conter o parâmetro estimado. Em termos de variável normal padrão *Z*, isso representa a área central sob a curva normal entre os pontos $-Z$ e Z.



Você pode observar que a área total sob a curva normal é unitária. Se a área central é 1 – α, o ponto *–z* representa o valor de *Z*, que deixa à sua esquerda a área α/2, e o ponto *z* representa o valor de *Z*, que deixa à sua direita a área α/2.

Vamos aprender agora a construir o intervalo de confiança para uma média quando o desvio padrão populacional é conhecido ou a amostra é grande.

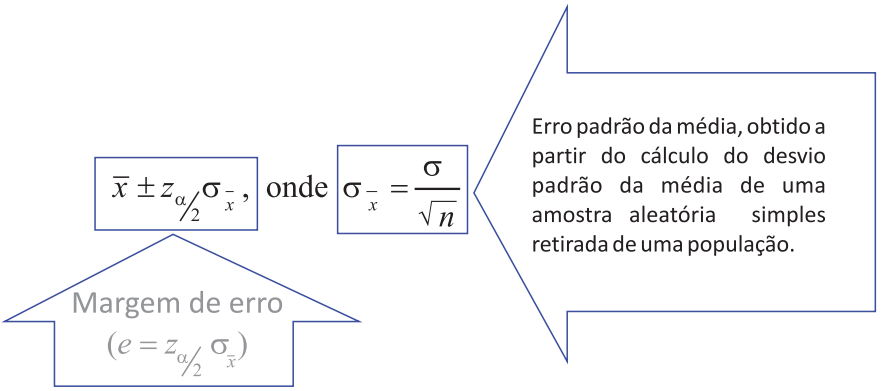
Vamos imaginar a seguinte situação: o Departamento de Recursos Humanos de uma prefeitura informa que o tempo de execução de tarefas que envolvem participação manual varia de tarefa para tarefa, mas que o desvio padrão permanece aproximadamente constante, em 3 minutos. Novas tarefas estão sendo implantadas na prefeitura. Uma amostra aleatória do tempo de execução de 50 dessas novas tarefas forneceu o valor médio de 15 minutos.

Dispondo desses dados, determine um intervalo de confiança de 95% para estimar o verdadeiro tempo médio de execução de uma dessas novas tarefas.

Primeiramente, você precisará identificar que o desvio padrão populacional é conhecido e também a amostra é considerada grande (n > 30); então, fará a construção do intervalo de confiança utilizando a média amostral; e para obter os limites de confiança, utilizará a curva normal padrão Z.

Como os limites são dados por meio da estatística calculada a partir dos dados amostrais e da margem de erro (fornecido pela estatística da distribuição multiplicada pelo desvio padrão da distribuição

das médias amostrais, também chamado de erro-padrão), teremos, nessa situação, os limites calculados por meio da seguinte expressão:



Logo, o intervalo de confiança tem centro na média amostral: Calculando, teremos:

$$1\text{-}\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025$$

Olhando na tabela de Z, encontraremos $Z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$e = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 . \frac{3}{\sqrt{50}} = 0{,}8315$$

$$P(\bar{x} - e < \mu < \bar{x} + e) = (1 - \alpha)$$

$$P(15 - 0{,}8315 < \mu < 15 + 0{,}8315) = 0{,}95$$

$$P(14{,}168 < \mu < 15{,}831) = 0{,}95$$

Interpretação do resultado: em cada grupo de 100 amostras retiradas de 50 pessoas, espera-se que, em 95 delas, a média esteja dentro do intervalo de 14,168 a 15,831, ou seja, esse intervalo com 95% de certeza deve incluir o verdadeiro e desconhecido tempo médio de execução de 50 tarefas. Observe também que a largura do intervalo de confiança é o dobro da margem de erro calculada.

Antes de continuar a leitura, você deve realizar, ao final desta Unidade, a Atividade 6, na qual irá aplicar os conhecimentos relacionados à amostra e ao intervalo de confiança. Em caso de dúvida, faça contato com seu tutor.

Dimensionamento de Amostras

Desenvolvendo a expressão de erro mostrada anteriormente, obteremos o tamanho de amostra para estimar a média populacional quando o desvio padrão populacional for conhecido, como mostramos a seguir:

$$e = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{e} \Rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{e} \right)^2 \Rightarrow n = \frac{(z_{\alpha/2})^2 \cdot \sigma^2}{e^2}$$

Imagine a seguinte situação: que tamanho de amostra será necessário para produzir um intervalo de 95% de confiança para a verdadeira média populacional, com erro de 1,0, se o desvio padrão da população é 10,0?

Substituindo esses valores na expressão, teremos:

$$n_o = \frac{Z^2_{\alpha/2} \cdot \sigma^2}{e^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 10^2}{1^2} = 384{,}16 \cong 385$$

Você pode alterar a confiança, e terá um diferente valor de Z e também o erro. Isso irá depender da precisão que você desejar nas suas estimativas.

Quando trabalhamos com proporção de sucesso, podemos substituir a variância por p.q (proporção de sucesso vezes a proporção de fracasso) da Distribuição de Bernoulli.

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2} \cdot \hat{p}\hat{q}}{e^2}$$

Onde $\hat{p}$ e $\hat{q}$ correspondem às estimativas de sucesso e de fracasso, respectivamente, obtidas a partir de resultados amostrais.

Vamos ver uma aplicação?

Um setor da prefeitura que cuida da documentação de imóveis está interessado em **estimar** a proporção de pessoas que compram novos

imóveis na cidade para melhor dimensionar o setor de atendimento. Com esse objetivo, amostrou 80 pessoas do seu cadastro, verificando que 30 delas teriam comprado imóvel no último ano. Determine o tamanho da amostra necessário para estimar com 95% de confiança essa proporção de pessoas que compram imóveis novos e com erro máximo de 4%.

Substituindo os valores, teremos:

$$\hat{p} = \frac{30}{80} = 0,375 \quad e \quad \hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,375 = 0,625$$

$$n = \frac{Z^2_{\alpha/2} \cdot \hat{p}\hat{q}}{e^2} = \frac{1,96^2 . 0,375.0,625}{0,04^2} = 562,73 \cong 563$$

Complementando

Acessando o *link* que apresentamos a seguir, você poderá fazer cálculos das distribuições de probabilidade discretas ou contínuas, de dimensionamento de amostras e de intervalos de confiança.

Programa estatístico Bioestat. Disponível em: <http://www.mamiraua.org.br/downloads/programas>. Acesso em: 21 jan. 2014.

Resumindo

Nesta Unidade, você aprendeu sobre as principais distribuições de probabilidade, discretas ou contínuas, e como utilizá-las. Também conheceu as distribuições de amostragem e quando utilizá-las; e noções básicas de estimação (intervalos de confiança) e dimensionamento de amostras. Essas informações serão muito importantes para a compreensão da próxima Unidade.

Atividades de aprendizagem

Para verificar se você está compreendendo bem o que apresentamos nesta Unidade, procure responder às atividades propostas a seguir. Se tiver dificuldades para resolvê-las, consulte seu tutor.

1. No Brasil, a proporção de microempresas que fecham em até um ano de atividade é de 10%. Em uma amostra aleatória de 20 microempresas, qual a probabilidade de 5 terem fechado em até um ano após sua criação?
2. Entre 2.000 famílias de baixa renda e com quatro crianças, considerando-se que a chance de nascer uma criança do sexo masculino ou feminino é igual, em quantas famílias se esperaria que houvesse:
    a) Dois filhos do sexo masculino.
    b) Um ou dois filhos do sexo masculino.
    c) Nenhum filho do sexo feminino.
3. A ouvidoria de uma prefeitura recebe em média 2,8 reclamações/hora, segundo uma Distribuição de Poisson. Determine a probabilidade de chegarem duas ou mais reclamações em um período de:
    a) 30 minutos.
    b) 1 hora.
    c) 2 horas.
4. As rendas mensais de funcionários do setor de arrecadação de uma prefeitura são normalmente distribuídas com uma média de R$ 2.000,00 e um desvio padrão de R$ 200,00. Qual é o valor de Z para uma renda X de R$ 2.200,00 e de R$ 1.700,00?

5. O uso diário de água por pessoa em uma determinada cidade é normalmente distribuído com média μ igual a 20 litros e desvio padrão σ igual a 5 litros.

    a) Que percentagem da população usa entre 20 e 24 litros por dia?

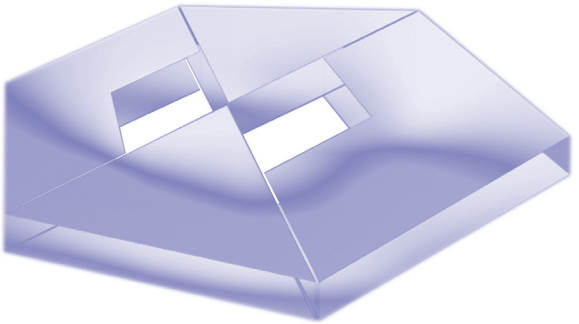
    b) Que percentagem usa entre 16 e 20 litros?

    c) Qual é a probabilidade de que uma pessoa selecionada ao acaso use mais do que 28 litros?

6. Considere que a despesa mensal com alimentação em restaurantes de comida a quilo para um casal é normalmente distribuída com desvio padrão de R$ 3,00. Uma amostra de 100 casais revelou uma despesa média de R$ 27,00. Determine o intervalo de confiança de 95% para essa despesa.

UNIDADE 6

Testes de Hipóteses



Objetivos Específicos de Aprendizagem

Ao finalizar esta Unidade, você deverá ser capaz de:

- Escolher o teste de hipótese adequado;
- Formular um teste de hipótese;
- Chegar a uma conclusão sobre uma população a partir dos resultados amostrais; e
- Interpretar os passos e os resultados de um teste de hipótese.

Introdução

Caro estudante,

Vamos conhecer agora os principais testes de hipóteses utilizados na inferência estatística.

Você, como gestor, muitas vezes terá de tomar decisões baseadas na análise de dados a partir de um exame de amostras. Portanto, esteja atento ao conteúdo que iremos apresentar a você nesta última Unidade, pois ao longo da leitura você, certamente, perceberá a importância desse assunto quando tratamos de Estatística Aplicada à Administração. Bom estudo!

Na teoria de decisão estatística, os testes de hipóteses têm uma importância fundamental, já que nos permitem dizer, por exemplo, se parâmetros de duas populações (p. ex., médias) são, de fato, iguais ou diferentes utilizando, para isso, amostras dessas populações. Sendo assim, a tomada de decisão de um gestor público deve estar baseada na análise de dados amostrais a partir de um teste de hipótese.

Você pode definir as hipóteses a serem testadas, retirar as amostras das populações a serem estudadas, calcular as estatísticas delas e, por fim, determinar o grau de aceitação de hipóteses baseadas na teoria de decisão, ou seja, se uma determinada hipótese será considerada provavelmente verdadeira ou falsa.

Para você decidir se uma hipótese é provavelmente verdadeira ou falsa, ou seja, se ela deve ser aceita ou rejeitada, considerando-se uma determinada amostra, precisa seguir uma série de passos que são:

1) Definir a hipótese de igualdade (H_0) e a hipótese alternativa (H_1) para tentar rejeitar H_0 (possíveis erros associados à tomada de decisão).
2) Definir o nível de significância (α).
3) Definir a distribuição amostral a ser utilizada.
4) Definir os limites da região de rejeição e de aceitação.
5) Calcular a estatística da distribuição escolhida a partir dos valores amostrais obtidos e tomar a decisão.

Você deve tomar a decisão baseado na seguinte regra: se o valor da estatística da distribuição calculado estiver na região de rejeição, rejeite a hipótese nula. Caso contrário, se o valor da estatística calculado caiu na região de aceitação, a decisão será que a hipótese nula não poderá ser rejeitada ao nível de significância determinada.

Supondo que você tenha amostras representativas das populações investigadas, perceba que pode cometer dois erros antes da tomada de decisão baseada em teste de hipótese: rejeitar indevidamente uma hipótese verdadeira (erro tipo I) ou não rejeitar uma hipótese falsa (erro tipo II).

A importância relativa desses erros depende do contexto. Por exemplo, no julgamento de um réu, presume-se sua inocência (hipótese: "réu é inocente"). Por princípio jurídico, considera-se pior condenar um réu injustamente (erro tipo I) do que absolver, por engano, um réu que de fato é culpado (erro tipo II). Por isso, os procedimentos legais tendem a minimizar a chance de cometer o erro tipo I, mas com o efeito colateral indesejado de aumentar a probabilidade de cometer o erro tipo II.

A maneira de reduzir, ao mesmo tempo, a chance de cometer os erros tipo I e tipo II é obter o máximo de evidências ou informações para decidir.

Testes de hipóteses bem executados têm como objetivo minimizar a probabilidade de cometer esses erros e, portanto, aumentar a chance de tomar decisões corretas com base em informação limitada.

Agora, você verá o detalhamento dos passos na formulação de um teste de hipótese. Esteja bem atento!

Estrutura dos Testes de Hipóteses

Diversos conceitos serão apresentados ao longo do detalhamento dos passos a serem seguidos na formulação de um teste de hipótese.

1) Formular as hipóteses (H_0 e H_1).

Primeiramente, vamos estabelecer as **hipóteses nula e alternativa**. Esta maneira formal de se apresentar hipóteses origina-se da demonstração de teoremas matemáticos, pela redução ao absurdo (*reductio ad absurdum*). Assim, hipóteses alternativas tendem a expressar a alegação ou intuição sobre a situação que se supõe verdadeira. Para exemplificar, você deve considerar um teste de hipótese para uma média. Então, a hipótese de igualdade é chamada de **hipótese de nulidade ou H_0**.

Suponha que você queira testar a hipótese de que o tempo médio de atendimento na retirada de uma guia, em uma prefeitura considerada modelo de atendimento, é igual a 50 segundos. Essa hipótese será simbolizada da seguinte maneira:

H_0: $\mu = 50$ (hipótese de nulidade).

Essa hipótese, na maioria dos casos, será de igualdade.

Se você rejeitar essa hipótese, irá aceitar, nesse caso, outra hipótese, que chamamos de **hipótese alternativa**. Esse tipo de hipótese é simbolizado por **H_1 ou H_a**.

A partir do nosso exemplo, as hipóteses alternativas mais comuns são as apresentadas a seguir:

- H_1: $\mu > 50$ (teste unilateral ou unicaudal à direita).

O tempo médio de retirada da guia é superior a 50 segundos (>). É importante ressaltar que nesse caso, deve-se reescrever a hipótese nula como sendo H_0: $\mu \leq 50$.

- H_1: $\mu < 50$ (teste unilateral ou unicaudal à esquerda).

  O tempo médio de retirada da guia é inferior a 50 segundos (<). Nesse caso, deve-se reescrever a hipótese nula como sendo H_0: $\mu \geq 50$.

- H_1: $\mu \neq 50$ (teste bilateral ou bicaudal).

  O tempo médio de retirada da guia pode ser superior ou inferior a 50 segundos.

Surge uma dúvida. Qual hipótese alternativa você utilizará? A resposta é bem simples.

A hipótese alternativa será definida por você em razão do tipo de decisão que deseja tomar.

Veja o seguinte exemplo: você inspeciona uma amostra, relativa a uma grande remessa de peças que chega a uma prefeitura, e constata que 8% delas apresentam defeitos. O fornecedor garante que não haverá mais de 6% de peças defeituosas em cada remessa. O que devemos responder, com auxílio dos testes de significância, é se a afirmação do fornecedor é verdadeira.

As hipóteses que você vai formular são:

H_0: $p \leq 0{,}06$

H_1: $p > 0{,}06$

A hipótese alternativa somente pode ser maior, pois o fornecedor garante que não haverá mais de 6%.

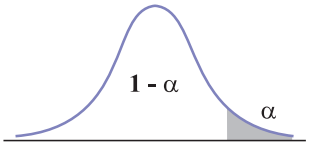
2) Definir o nível de significância.

O nível de significância de um teste é dado pela probabilidade de se cometer um erro do tipo I (**ocorre quando você rejeita a hipótese H_0 e essa hipótese é verdadeira**). Com o valor dessa

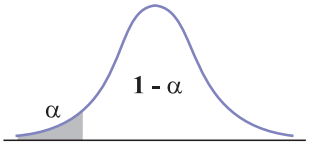
probabilidade fixada, você pode determinar o chamado **valor crítico**, que separa a chamada **região de rejeição** da hipótese H_0, da região de não rejeição da hipótese H_0.

No desenho, a seguir, as áreas escuras correspondem à significância do teste, ou seja, à probabilidade de se cometer o chamado erro tipo I (rejeitar H_0 quando ela é verdadeira). Essa probabilidade é chamada de α e geralmente os valores mais utilizados são 0,01 e 0,05. O complementar do nível de significância é chamado de nível de confiança (área clara dos gráficos) e é dado por $1 - \alpha$.

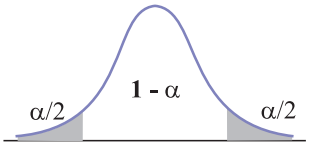
Unilateral à direita:
Ho: $\mu \leq 50$
H1: $\mu > 50$



Unilateral à esquerda:
Ho: $\mu \geq 50$
H1: $\mu < 50$



Bilateral:
Ho: $\mu = 50$
H1: $\mu \neq 50$



Note que o conhecimento das distribuições amostrais vistas na Unidade 5 é muito importante. Caso ainda tenha alguma dúvida, volte lá e relembre os conceitos das distribuições t, qui-quadrado e F, e também como utilizar as tabelas.

3) Definir a distribuição amostral a ser utilizada.

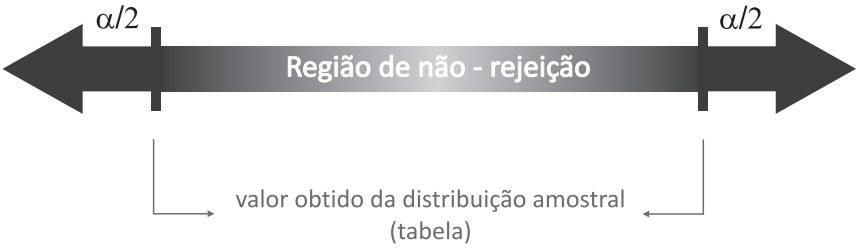
Você definirá a estatística a ser utilizada no teste em razão da distribuição amostral a qual os dados seguem. Se você fizer um teste de hipótese para uma média ou diferença entre médias, utilize a distribuição de Z ou t de Student.

Outro exemplo: se você quiser comparar a variância de duas populações, deverá trabalhar então com a distribuição F, ou seja, da razão de duas variâncias.

4) Definir os limites da região de rejeição.

Os limites entre as regiões de rejeição e de aceitação da hipótese H_0 serão definidos por você em razão do tipo de hipótese H_1, do valor de α (nível de significância) e da

distribuição amostral utilizada. Considerando **por exemplo um teste bilateral**, você terá a região de não rejeição com uma probabilidade de 1–α, e uma região de rejeição com probabilidade α (α/2 + α/2).



Por meio da amostra obtida, você deve calcular a estimativa que servirá para aceitar ou para rejeitar a hipótese nula. Neste momento, você pode estar se perguntando: **como irei calcular a estimativa, ou seja, o valor da estatística a partir dos dados amostrais?** A resposta será dada no próximo item.

5) Tomar a decisão.

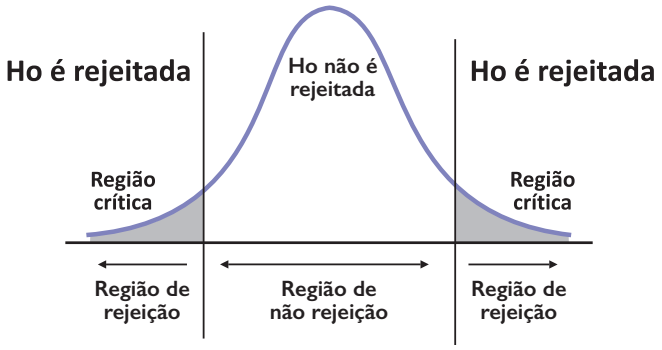
Para tomar a decisão você deve calcular a estimativa do teste estatístico que será utilizada para rejeitar ou não a hipótese H_0. A estrutura desse cálculo para a média, de forma generalista é dada por:

$$Estatistica\ da\ distribuição = \frac{(estimativa\ -\ parâmetro)}{erro\ padrão\ da\ estimativa}$$

Podemos exemplificar pela distribuição de Z, que será:

Estatística do teste → $Z_{cal} = \frac{(\bar{x} - \mu)}{(\sigma/\sqrt{n})}$ ← Variabilidade das médias

Se o valor da estatística estiver na região crítica (de rejeição), você vai rejeitar H_0; caso contrário, não rejeite H_0, pois quando decidimos por "não rejeitar" no teste, concluímos que a evidência disponível não é suficientemente forte para desacreditarmos a hipótese nula. Mas, ao tomar a decisão de não rejeitá-la, podemos cometer o erro tipo II. O esquema a seguir mostra bem a situação de decisão.


Ho é rejeitada
Ho não é rejeitada
Ho é rejeitada
Região crítica
Região crítica
Região de rejeição
Região de não rejeição
Região de rejeição

Teste de Hipótese para uma Média

Quando você retira uma amostra de uma população e calcula a média dessa amostra, é possível verificar se uma afirmação sobre o valor dessa média é provavelmente verdadeira. Para tanto, basta verificar se a estatística do teste estará ou não na região de rejeição da hipótese H_0.

Aqui, você tem duas situações distintas:

Primeira situação: se o desvio padrão da população é conhecido ou a amostra é considerada grande ($n > 30$), a distribuição amostral a ser utilizada será a Normal Padronizada ou Z e a estatística teste que você utilizará será:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Onde:

$\bar{x}$: média amostral;

μ : média populacional;

σ : desvio padrão populacional; e

n: tamanho da amostra.

Imagine a seguinte situação: um gestor público sabe que, para montar um determinado negócio em um bairro de Curitiba, é necessário que nele circulem, no mínimo, 1.500 pessoas por dia. Para o tipo de bairro em questão, é possível supor o desvio padrão populacional como sendo igual a 200 pessoas. Uma amostra aleatória formada por 12 observações revelou que passariam pelo local escolhido

1.400 pessoas por dia, em média. O negócio pode ser montado ou não? Assuma $\alpha = 5\%$ e suponha uma população normalmente distribuída.

Resolução:

Sempre, em um exercício de tomada de decisão, precisamos formular um teste de hipótese, seguindo os passos apresentados:

1) Formular as hipóteses.
2) Definir o nível de significância.
3) Definir a distribuição amostral a ser utilizada.
4) Definir os limites da região de rejeição (gráfico).
5) Tomar a decisão.

Denominamos esse desvio como populacional, pois, baseados nas características do bairro (conhecimento prévio), podemos supor o valor do desvio.

Vamos primeiramente retirar os dados do problema:

$$n = 12;\ \bar{x} = 1.400\ e\ \sigma = 200$$

Vamos estabelecer as hipóteses com base no exercício:

H_o: $\mu \geq 1.500$

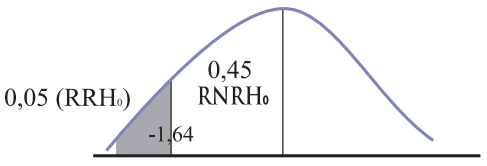
H_1: $\mu < 1.500$ (situação em que não vale a pena montar o negócio)

Caso tenhamos uma média igual a 1.500 pessoas, podemos montar o negócio. Mas se aceitarmos a hipótese H_1, não devemos indicar a montagem do negócio.

$\alpha = 0,05$

A estatística escolhida é Z. Substituindo os valores da amostra e o da hipótese H_0 na estatística de Z, teremos:

Veja que, mesmo com $n \leq 30$, o desvio padrão populacional foi informado. Quando temos essa situação, devemos sempre usar Z.



O valor $Z_t = -1,64$, que divide a RRH_0 e $RNRH_0$, foi encontrado na tabela Z procurando em seu **interior** o valor

0,4495. Como Z calculado é menor que Z tabelado, ou seja, –1,73 pertence a RRH_0, podemos afirmar com 95% de certeza que transitam menos de 1.500 pessoas por dia no local; e assim verificamos que não é viável montar o negócio naquele bairro, ou seja, a probabilidade de obtermos uma média amostral de 1.400, supondo que a média populacional é no mínimo 1.500 (H_0), é tão baixa (menor do que 5%) que é preferível apostar que a hipótese alternativa seja a correta.

Valor mais próximo de 0,45, pois este não existe na tabela.

Agora, antes de prosseguir, você deve resolver a Atividade 1, ao final desta Unidade. Caso tenha alguma dúvida, retorne à situação anterior, àquela que resolvemos juntos.

Segunda situação: se você não conhecer o desvio padrão populacional e a amostra for pequena ($n \leq 30$), a distribuição amostral a ser utilizada será a t de Student e a estatística teste será:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Onde:

$\bar{x}$: média amostral;

μ : média populacional;

s : desvio padrão amostral;

n: tamanho da amostra; e

gl: graus de liberdade = n – 1 (para consulta na tabela da distribuição *t*)

Uma observação importante: quando trabalhamos com amostras grandes, ou seja, $n \geq 30$, as distribuições Z e t de Student apresentam comportamentos e valores da estatística próximos.

Neste momento, releia os passos anteriores para que não fique nenhuma dúvida em relação à estrutura de um teste de hipótese, pois iremos trabalhar juntos em situações nas quais iremos aplicar os diferentes testes de hipóteses para uma média.

Após a releitura do conteúdo apresentado, vamos, então, analisar as situações.

Veja, abaixo, a primeira situação em que utilizaremos o teste de hipótese para uma média usando a estatística de Z (amostras grandes ou variância populacional conhecida). Para resolver essa situação, utilizaremos o teste de hipótese para uma média usando a estatística de t de Student (amostra pequena e variância populacional desconhecida).

A Construtora Estrada Forte Ltda. alega ser capaz de produzir concreto com, no máximo, 15 kg de impurezas para cada tonelada fabricada. Mas, segundo a legislação municipal, caso essa quantidade seja maior do que 15 kg, a obra deve ser embargada pela prefeitura. Dezenove amostras, de uma tonelada cada, revelaram possuir impurezas com média amostral igual a 23 kg e desvio padrão igual a 9 kg. Assumindo $\alpha = 5\%$ e população normalmente distribuída, a obra deve ser embargada ou não?

Resolução:

Retirando os dados do problema:

$n = 19$; $\bar{x} = 23$; $s = 9$; $\alpha = 0{,}05$. Vamos estabelecer as hipóteses baseando-nos na afirmação do exercício:

H_0: $\mu \leq 15$
H_1: $\mu > 15$

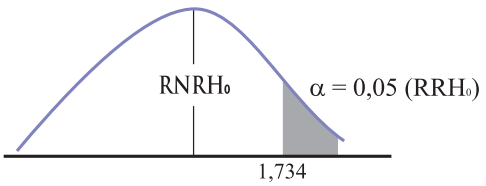
Caso a hipótese H_0 seja aceita, a obra não será embargada, pois ela está de acordo com a lei. Caso contrário, a prefeitura embarga a obra.

$\alpha = 0{,}05$

A estatística escolhida é a t de Student.

Substituindo os valores do problema na expressão, teremos:

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{23 - 15}{\frac{9}{\sqrt{19}}} = \frac{8}{2{,}06} = 3{,}87$$



Veja que o *n* foi menor ou igual a 30 ($n \leq 30$), foi informado o desvio padrão amostral e não foi apresentado o desvio padrão populacional. Nessas condições, devemos sempre usar a distribuição t de Student.

O valor $t_t = 1{,}734$ que divide a RRH_0 e $RNRH_0$ foi encontrado na tabela t procurando o grau de liberdade 18 (gl = n –1 = 19 = 1) e $\alpha = 0{,}05$. Como t calculado é maior do que t tabelado, ou seja, 1,734 pertence a RRH_0, podemos afirmar que existem evidências de que a alegação da construtora não é verdadeira. Eles não são capazes de produzir concreto com, no máximo, 15 kg de impurezas para cada tonelada fabricada. Então, concluímos que a obra deve ser embargada pela prefeitura.

Teste de Hipótese para a Razão de Duas Variâncias

Esse teste de hipótese é utilizado para saber se duas variâncias populacionais são estatisticamente iguais ou se uma é maior do que a outra. Utilizando a distribuição F, poderemos formular o teste de hipótese da razão entre duas variâncias e chegarmos à conclusão baseados apenas nas estimativas calculadas a partir das amostras.

As hipóteses H_0 e H_1 serão:

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (variâncias das duas populações são iguais).

$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (variância da população 1 é maior do que a da população 2).

Como estamos utilizando um teste unilateral à direita, por questões didáticas, então, no cálculo da estatística de F, teremos a maior variância dividida pela menor variância. Mais à frente você irá utilizar este teste de hipótese fazendo a seguinte relação: caso o teste rejeite a hipótese H_0 você irá concluir que uma variância é maior do que a outra e, por consequência, elas podem ser consideradas iguais.

A maior variância amostral encontrada será chamada de s_1^2 (proveniente de uma amostra de tamanho n_1) e a menor variância amostral será chamada s_2^2 (proveniente de amostra de tamanho n_2).

Vamos considerar duas amostras provenientes de duas populações. Desejamos saber se as variâncias das populações são estatisticamente

iguais ou se uma é maior do que a outra. Considere uma significância de 2,5%. Os resultados amostrais são apresentados a seguir:

$s_1^2 = 0{,}5184 \quad \text{com} \quad n_1 = 14$

$s_2^2 = 0{,}2025 \quad \text{com} \quad n_2 = 21$

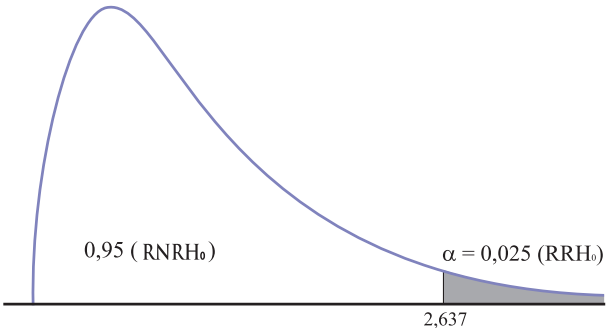
Então, a variável de teste do teste F será:

$$F = \frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2}$$

Como em H_0 estamos considerando que as variâncias populacionais são iguais, então, na expressão acima, as duas variâncias populacionais irão se cancelar. No nosso exemplo, teremos:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0{,}5184}{0{,}2025} = 2{,}56$$

O valor tabelado (crítico) da distribuição de F será obtido na tabela da distribuição com uma significância de 2,5%. Considerando os graus de liberdade iguais a 13 ($n_1 - 1$) para o numerador (v_1) e 20 ($n_2 - 1$) para o denominador (v_2), chegaremos ao seguinte resultado: valor tabelado igual a 2,637.



O valor calculado da estatística (2,56) foi menor do que o tabelado (2,637), então, o valor calculado caiu na região de não rejeição de H_0. Assim, não rejeitamos H_0 e consideramos que a variância da população 1 estatisticamente é igual à variância da população 2.

Esse teste servirá de base para a escolha do próximo teste (diferença entre médias para amostras independentes), ou seja, a escolha do tipo de teste a ser utilizado.

Teste de Hipótese para a Diferença entre Médias

Quando queremos comparar a média de duas populações, retiramos amostras delas que podem apresentar tamanhos diferentes. Vamos considerar as situações de amostras independentes (as populações não apresentam nenhuma relação entre si) e de amostras dependentes (uma população sofre uma intervenção e é avaliada antes e depois da intervenção para saber se a intervenção teve algum efeito).

1º caso: amostras independentes e grandes ($n > 30$) ou variâncias populacionais conhecidas.

2º caso: amostras independentes e pequenas ($n \leq 30$), mas que apresentam variâncias populacionais desconhecidas e estatisticamente iguais.

3º caso: amostras independentes e pequenas ($n \leq 30$), mas que apresentam variâncias populacionais desconhecidas e estatisticamente desiguais.

4º caso: amostras dependentes.

Vamos analisar cada uma dessas situações. Lembre-se de que as considerações anteriores em relação aos passos para formulação dos testes de hipóteses permanecem as mesmas.

A grande diferença, como você verá, ocorre somente na determinação das hipóteses a serem testadas. A hipótese H_0 será:

H_0: $\mu_1 - \mu_2 = d_0$

Onde:

μ_1: média da população 1;
μ_2: média da população 2; e
d_0 corresponde a uma diferença qualquer que você deseje testar.

Geralmente, quando queremos saber se as médias das duas populações são estatisticamente iguais, utilizamos o valor de d_0 igual a zero.

As hipóteses alternativas seguem a mesma linha de raciocínio, como você pode visualizar a seguir.

H_0	H_1
$\mu_1 - \mu_2 \geq d_0$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$
$\mu_1 - \mu_2 \leq d_0$	$\mu_1 - \mu_2 > d_0$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$

É importante ressaltar que, se as hipóteses alternativas forem unilaterais, o sinal da hipótese H_0 será **menor ou igual** ou **maior ou igual**, dependendo da hipótese alternativa.

Todas as outras considerações em relação aos testes de hipótese permanecem as mesmas. Vamos, então, procurar entender cada situação para os testes de hipóteses para diferença entre médias.

1º caso: amostras independentes e grandes ($n > 30$) ou variâncias populacionais conhecidas: como estamos trabalhando aqui com amostras grandes ou com desvios padrões populacionais conhecidos, devemos trabalhar com a distribuição amostral de Z (raciocínio semelhante ao utilizado no teste de hipótese para uma média). Portanto, a estatística do teste será dada por:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 / n_1 + \sigma_2^2 / n_2}}$$

Onde:

X_1: média da amostra 1; X_2: média da amostra 2; μ_1: média da população 1; μ_2:média da população 2; s_1^2: variância da população 1;

s_2^2: variância da população 2; n_1: tamanho da amostra 1 e n_2 tamanho da amostra 2.

Se trabalharmos com amostras grandes, poderemos substituir as variâncias populacionais pelas variâncias amostrais sem nenhum problema.

Vamos, então, ver como podemos aplicar o teste de hipótese para a diferença entre médias nesta situação.

Foram retiradas amostras do valor recebido em milhares de reais de um determinado imposto de duas prefeituras (A e B) de mesmo porte. Os resultados são apresentados no quadro, a seguir. Verifique se as duas prefeituras têm o mesmo recebimento ou se são diferentes, com uma significância de 0,05.

Marcas	A	B
Média	1.160	1.140
Desvio-padrão	90	80
Tamanho da amostra	100	100

Como fazer:

Vamos retirar os dados apresentados em nossa situação:

Amostra A: $n = 100$; $\bar{x} = 1.160$; $s = 90$
Amostra B: $n = 100$; $\bar{x} = 1.140$; $s = 80$

As hipóteses a serem formuladas são:

H_0: $\mu_a = \mu_b \rightarrow \mu_a - \mu_b = 0$
H_1: $\mu_a \neq \mu_b$

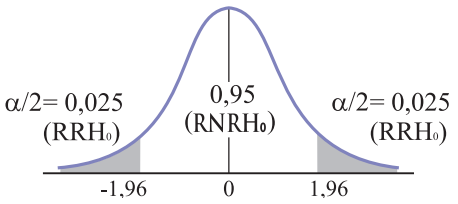
O teste t deve ser bilateral, já que a preocupação está na verificação do fato de a média da prefeitura A ser diferente da média da prefeitura B.

$\alpha = 0,05$

A estatística usada será Z, pois as amostras são grandes ($n > 30$), apesar de não termos os desvios padrões populacionais. Sendo assim, nessa situação, ainda utilizamos a estatística de Z.

Substituindo os valores na estatística, teremos:

$$Z_c = \frac{(\bar{X}_a - \bar{X}_b) - (\mu_a - \mu_b)}{\sqrt{\frac{s_a^2}{n_a} + \frac{s_b^2}{n_b}}} = \frac{(1160 - 1140) - (0)}{\sqrt{\frac{90^2}{100} + \frac{80^2}{100}}} = 1{,}67$$



Como o valor calculado Zc = 1,67 está entre os valores de –1,96 e 1,96, valores que dividem a RRH_0 da $RNRH_0$, verificamos que o valor calculado Zc = 1,67 pertence à $RNRH_0$ e podemos afirmar, com 95% de certeza, que os valores recebidos pelas duas prefeituras são estatisticamente iguais, ou seja, aquela diferença encontrada entre as amostras foi fruto do acaso.

2º caso: amostras independentes e pequenas, mas que apresentam variâncias populacionais desconhecidas e estatisticamente iguais e: você deve trabalhar com a distribuição t de Student, uma vez que as amostras que estamos trabalhando são pequenas e as variâncias populacionais desconhecidas.

Aqui, estaremos considerando que as variâncias populacionais são estatisticamente iguais, pois essa situação influenciará nos cálculos e, consequentemente, no processo decisório.

Para saber se as variâncias podem ser consideradas iguais você deve fazer um teste da razão de duas variâncias (teste F), apresentado anteriormente.

A estatística do teste será dada por:

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$$

Aqui, aparece um termo novo (Sp). Ele corresponde ao desvio padrão ponderado pelos graus de liberdade, ou seja, calculamos um novo desvio padrão cujo fator de ponderação corresponde ao grau de liberdade de cada amostra. Veja a seguir:

$$Sp = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Lembre-se de que você pode voltar à tabela t de Student quando desejar; ela se encontra na Unidade 5.

Para você encontrar o valor tabelado que limita as regiões de aceitação e de rejeição na tabela t de Student, o número de graus de liberdade (v) a ser usado na tabela será dado por:

$$v = n_1 + n_2 - 2$$

Onde:

n_1 e n_2 correspondem aos tamanhos de amostras utilizados.

Vamos resolver, agora, uma situação na qual temos a comparação entre médias de amostras pequenas e variâncias populacionais desconhecidas e estatisticamente iguais.

Situação: em uma comparação de aprovação no vestibular de uma importante universidade, seis estudantes do sexo masculino de colégios da rede pública (amostra A) preencheram o gabarito no tempo médio de 6,4 minutos e desvio padrão de 60 segundos. Outra amostra foi formada por cinco estudantes do sexo feminino selecionados aleatoriamente do mesmo universo (amostra B), e esse grupo teve um tempo médio de preenchimento do gabarito de 5,9 minutos e desvio padrão de 60 segundos (assuma variâncias populacionais iguais). A Secretaria Municipal de Educação deseja saber se existe ou não diferença no tempo médio de preencher os gabaritos de acordo com o sexo dos estudantes para definir se há necessidade de se fazer treinamentos específicos para cada sexo ou um mesmo treinamento para

ambos; e assim, poder reduzir esse tempo e melhorar a *performance* dos estudantes da rede pública no vestibular.

Resolução:

Retirando os dados do nosso exemplo, teremos:

Amostra A: $n = 6$; $\bar{x} = 6{,}4$; $s = 1$

Amostra B: $n = 5$; $\bar{x} = 5{,}9$; $s = 1$

As hipóteses a serem formuladas são:

H_0: $\mu_a = \mu_b \rightarrow \mu_a - \mu_b = 0$

H_1: $\mu_a \neq \mu_b$

O teste t deve ser bilateral, já que a atenção está voltada para a preocupação em se constatar se, de fato, ocorre diferença no tempo entre os estudantes do sexo masculino ou feminino.

$\alpha = 0{,}05$

Caso isso não seja informado no problema, você deve fazer um teste de hipótese para comparar as variâncias populacionais com base nas variâncias amostrais, como vimos anteriormente.

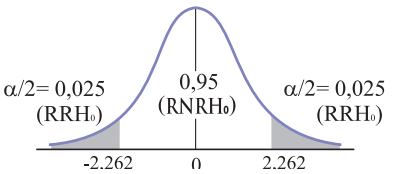
A estatística usada será t, pois as amostras são menores ou iguais a 30 ($n \leq 30$) e a variância populacional é desconhecida. Além disso, consideramos que as variâncias populacionais são estatisticamente iguais, informação que é dada no problema analisado.

Substituindo os valores nas expressões, teremos:

$$Sp = \sqrt{\frac{(n_a - 1).s_a^2 + (n_b - 1).s_b^2}{n_a + n_b - 2}} = \sqrt{\frac{5.1^2 + 4.1^2}{6 + 5 - 2}} = 1$$

$$t_c = \frac{(\bar{x}_a - \bar{x}_b) - (\mu_a - \mu_b)}{Sp\sqrt{\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b}}} = \frac{(6{,}4 - 5{,}9) - (0)}{1\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{5}}} = \frac{0{,}5}{0{,}6055} = 0{,}82$$

$v = n_a + n_b - 2 = 6 + 5 - 2 = 9$ (grau de liberdade)



O valor $t_t = 2{,}262$ que divide a RRH_0 e $RNRH_0$ foi encontrado na tabela t procurando o grau de liberdade 9 e $\alpha = 0{,}025$. Como t calculado está entre os valores que dividem a região de não rejeição de H_0, ou seja, 0,82 pertence à $RNRH_0$, podemos afirmar com 95% de certeza que o tempo de preenchimento dos estudantes e das estudantes é provavelmente o mesmo. Então, a prefeitura deve fazer o treinamento independentemente do sexo dos estudantes, ou seja, o mesmo treinamento para todos.

Antes de analisar o terceiro caso, realize a Atividade 2, ao final desta Unidade.

3º caso: amostras independentes e pequenas, mas que apresentam variâncias populacionais desconhecidas e estatisticamente desiguais: a diferença dessa situação para a anterior é que você agora considera que as populações apresentam variâncias estatisticamente desiguais. Para saber se elas são estatisticamente desiguais ou diferentes, você deve fazer um teste de hipótese para a razão de duas variâncias, visto anteriormente nesta Unidade. Também utilizaremos aqui a estatística do teste a partir da distribuição t de Student. Essa estatística será dada por:

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_1^{\,2}/n_1 + s_2^{\,2}/n_2}}$$

Outra diferença está no cálculo do número de graus de liberdade, pois, nessa situação, utilizaremos uma aproximação que é dada pela expressão a seguir:

$$v = gl = \frac{(s_1^{\,2}/n_1 + s_2^{\,2}/n_2)^2}{\frac{(s_1^{\,2}/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^{\,2}/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

Se esse valor calculado apresentar valores decimais, você deve fazer o arredondamento para um número inteiro.

Vamos resolver, a seguir, outra situação.

Situação: uma prefeitura deseja reduzir seus custos com combustíveis. Não confiando nas especificações do fabricante, já que as condições de uso dos veículos não são ideais, a prefeitura deseja saber se duas marcas de carro apresentam o mesmo consumo ou se uma delas é mais econômica. Para tomar a decisão acerca de qual comprar, foi analisada uma amostra de 22 automóveis das duas marcas, obtendo o resultado apresentado, a seguir. Seria possível afirmar que o carro Andaluz é mais econômico, isto é, que apresenta uma média populacional inferior a do Reluzente? Assuma $\alpha = 5\%$ e população normalmente distribuída.

Automóvel	Tamanho da amostra	Média de consumo	Desvio padrão
Andaluz	12 unidades	14 km/l	2 km/l
Reluzente	10 unidades	15 km/l	4 km/l

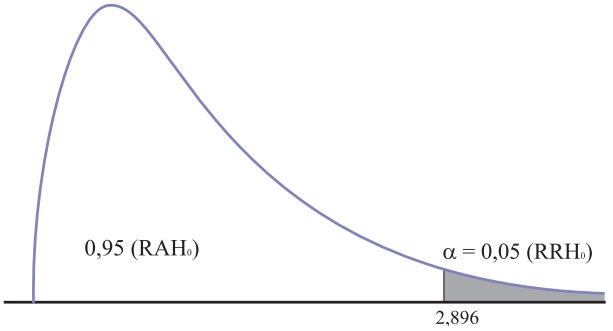
Resolução:

Nessa situação, faremos um teste de hipótese para diferença entre médias populacionais. Como as amostras são pequenas, precisamos saber se as variâncias populacionais são estatisticamente iguais ou não. Para isso, vamos testá-las por meio de teste de *F*. As hipóteses são:

$$H_0 : \sigma_R^2 = \sigma_A^2$$
$$H_1 : \sigma_R^2 > \sigma_A^2 \qquad \alpha = 0{,}05$$

$$F_c = \frac{s_R^2}{s_A^2} = \frac{16}{4} = 4$$

Como estabelecemos utilizar o teste unilateral no cálculo de F, teremos, então, a maior variância dividida pela menor variância. As variâncias populacionais não estão presentes na fórmula, devido a, na hipótese H_0, serem consideradas iguais e, assim, se cancelarem.



O valor 2,896 foi encontrado na tabela F de 5% com grau de liberdade 9 para o numerador e 11 para o denominador. Como $F_c > 2,896$, rejeita-se H_0 e, portanto, as variâncias populacionais são estatisticamente desiguais, ou seja, uma é maior do que a outra.

Agora, vamos testar as médias populacionais:

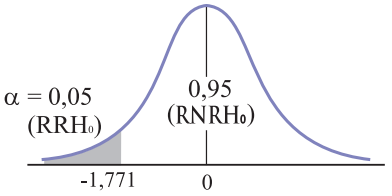
$$H_0: \mu_{andaluz} = \mu_{reluzente} \rightarrow \mu_{andaluz} - \mu_{reluzente} = 0$$
$$H_1: \mu_{andaluz} < \mu_{reluzente}$$
$$\alpha = 0,05$$

Como as amostras são independentes, pequenas e com variâncias populacionais estatisticamente desiguais, usaremos a estatística t.

Vamos encontrar o grau de liberdade:

$$V = \frac{\left(\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_R^2}{n_R}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_A^2}{n_A}\right)^2}{n_A - 1} + \frac{\left(\frac{s_R^2}{n_R}\right)^2}{n_R - 1}} = \frac{\left(\frac{4}{12} + \frac{16}{10}\right)^2}{\frac{\left(\frac{4}{12}\right)^2}{11} + \frac{\left(\frac{16}{10}\right)^2}{9}} = \frac{3,74}{0,01 + 0,28} = \frac{3,74}{0,29} = 12,89 \cong 13$$

$$t = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_R) - (\mu_{andaluz} - \mu_{reluzente})}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_R^2}{n_R}}} = \frac{(14-15)-(0)}{\sqrt{\frac{4}{12} + \frac{16}{10}}} = \frac{-1}{1,39} = -0,72$$



O valor $t_t = -1{,}771$, que divide a RRH_0 e a $RNRH_0$, foi encontrado na tabela *t* procurando o grau de liberdade 13 e $\alpha = 0{,}05$. Como *t* calculado ($t = 0{,}72$) pertence à $RNRH_0$, podemos afirmar, com 95% de certeza, que o consumo dos carros Andaluz e Reluzente é o mesmo, ou seja, tanto faz a prefeitura comprar uma marca ou outra.

Antes de passarmos ao estudo do quarto caso, resolva a Atividade 3, ao final desta Unidade. Dessa forma, você poderá aplicar os conhecimentos sobre a diferença entre médias.

4º caso: amostras dependentes: sabemos que amostras dependentes ocorrem quando fazemos uma intervenção e desejamos saber se os resultados antes dessa intervenção são iguais aos resultados depois dela. Um ponto importante, nessa situação, é que são calculadas, primeiramente, as diferenças de antes e de depois. Essas diferenças são chamadas de d_i.

Então, você pode ver que:

d_i = valor antes – valor depois

Com base nessas diferenças (d_i), você irá calcular a média (*D*) e o desvio padrão delas (S_D).

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \quad \text{e} \quad S_D = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right)}{n}}{n-1}$$

Veja que essas fórmulas são iguais as do cálculo da média e do desvio padrão apresentados anteriormente. Nesse caso, no lugar da variável x são utilizados os valores de d_i (diferenças).

Com esses valores a estatística teste será dada por:

$$t = \frac{\overline{D} - d_O}{S_D / \sqrt{n}}$$

O valor de n corresponde ao número de diferenças calculadas; e o grau de liberdade para ser olhado na tabela t de Student será dado por n – 1.

Vamos resolver uma situação em que trabalharemos com o caso de amostras dependentes.

Situação: em um estudo procurou-se investigar se a redução do valor de uma gratificação no salário iria diminuir a produtividade dos funcionários de uma prefeitura, considerando uma escala de produtividade de 0 a 12. A tabela a seguir dá os resultados de pessoas selecionadas anteriormente. No nível de 5% de significância, teste a afirmação de que a redução do valor da gratificação reduziu a produtividade, ou seja, que a diferença entre antes e depois deve ser maior do que zero.

Pessoa	A	B	C	D	E	F	G	H
Antes	6,6	6,5	9,0	10,3	11,3	8,1	6,3	11,6
Depois	6,8	2,4	7,4	8,5	8,1	6,1	3,4	2,0

Primeiramente, vamos montar as nossas hipóteses:

H_0: $\mu_D \geq 0$
H_1: $\mu_D < 0$

Veja que as escolhas dessas hipóteses estão associadas ao que queremos testar. No caso da hipótese H_0: $\mu_D = 0$, estamos testando que as médias das diferenças de antes menos depois são iguais a zero, ou seja, que a redução no valor da gratificação não interferiu na produtividade (a produtividade foi a mesma), já que estamos avaliando os mesmos indivíduos. No caso da hipótese H_1: $\mu_D > 0$, estamos testando se os valores de antes eram maiores do que os valores de depois da redução da gratificação, ou seja, se esta diferença de antes menos a de depois for maior do que zero, indica que antes da intervenção os funcionários tinham uma produtividade maior do que depois.

Poderíamos testar também, dependendo do caso, as hipóteses H_1: $\mu_D < 0$ ou H_1: $\mu_D \neq 0$.

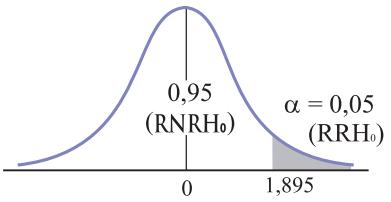
Consideramos um $\alpha = 0{,}05$.

Para calcularmos os valores de D e S_D, devemos, primeiramente, calcular as diferenças entre os valores de antes menos os de depois de cada indivíduo e com essas diferenças calcular a média das diferenças (D) e o desvio padrão das diferenças (S_D) para utilizá-los na expressão de t para amostras dependentes. Os resultados das diferenças são apresentados a seguir:

Pessoa	A	B	C	D	E	F	G	H
Antes	6,6	6,5	9	10,3	11,3	8,1	6,3	11,6
Depois	6,8	2,4	7,4	8,5	8,1	6,1	3,4	2
Diferença (antes – depois)	-0,2	4,1	1,6	1,8	3,2	2	2,9	9,6

Como as amostras são dependentes, usaremos a estatística t da seguinte forma:

$$t = \frac{\overline{D} - d_o}{S_D / \sqrt{n}} = \frac{3{,}125 - 0}{2{,}9114 / \sqrt{8}} = 3{,}03$$



O valor $t_t = 1{,}895$, que divide a RRH_0 e a $RNRH_0$, foi encontrado na tabela t quando procurávamos o grau de liberdade, 7 graus de liberdade (n –1, onde n é o número de indivíduos avaliados) e $\alpha = 0{,}05$. Como t calculado ($t = 3{,}03$) pertence à RRH_0, podemos considerar que os valores de produtividade eram maiores antes, ou seja, pioraram e, assim, a redução na gratificação influenciou na produtividade dos funcionários da prefeitura.

Teste de Hipótese para a Diferença entre Proporções

Vimos sobre a Distribuição de Bernolli na Unidade 5. Você pode retomar lá esse conceito.

Em diversas situações, o que nos interessa é saber se a proporção de sucessos (evento de interesse) em duas populações apresenta a mesma proporção ou não. Nesse caso, os dados seguem uma Distribuição de proporção Bernoulli com média p e variância pq. Portanto, a expressão da estatística teste (no caso utilizaremos a distribuição de Z) será dada por:

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}}$$

Você deve se lembrar de que a proporção de fracasso (q) é dada por um menos a proporção de sucesso.

Onde:

$\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$: correspondem à proporção de sucesso nas amostras 1 e 2, respectivamente; e

p_1 e p_2: correspondem à proporção de sucesso nas populações 1 e 2, respectivamente.

Vejamos como aplicar o teste da diferença de proporções.

Situação: uma empresa de pesquisa de opinião pública selecionou, aleatoriamente, 500 eleitores do Estado da Bahia e 600 do Estado de Pernambuco, e perguntou a cada um deles se votaria ou não no candidato Honesto Certo nas próximas eleições presidenciais. Responderam afirmativamente 80 eleitores da Bahia e 150 de Pernambuco. Existe alguma diferença significativa entre as

proporções de eleitores a favor do candidato nos dois estados? Use o nível de significância igual a 6%.

Como fazer:

Bahia: $n = 500;\ \hat{p} = \frac{80}{500} = 0{,}16;\ \hat{q} = 0{,}84$

Pernambuco: $n = 600;\ \hat{p} = \frac{150}{600} = 0{,}25;\ \hat{q} = 0{,}75$

Vamos estabelecer as hipóteses:

H_0: $p_B = p_p \rightarrow p_B - p_p = 0$
H_1: $p_B \neq p_P \rightarrow p_B - p_p \neq 0$

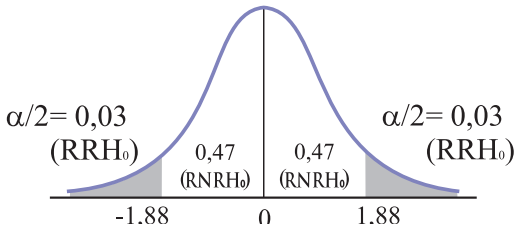
Aqui, seguem as mesmas considerações vistas anteriormente para a formulação das hipóteses.

$\alpha = 0{,}06$

A estatística usada será Z.

$$Z_c = \frac{(\hat{p}_B - \hat{p}_P) - (p_B - p_P)}{\sqrt{\left(\frac{\hat{p}_B.\hat{q}_B}{n_B}\right) + \left(\frac{\hat{p}_P.\hat{q}_P}{n_P}\right)}} = \frac{(0{,}16 - 0{,}25) - (0)}{\sqrt{\left(\frac{0{,}16.0{,}84}{500}\right) + \left(\frac{0{,}25.0{,}75}{600}\right)}} =$$

$$\frac{-0{,}09}{\sqrt{0{,}0002688 + 0{,}0003125}} = \frac{-0{,}09}{0{,}024} = -3{,}73$$



O valor 1,88 foi encontrado no **interior** da tabela Z procurando 0,4699.

Veja que 0,47 não existe na tabela, então, optamos pelo valor mais próximo.

Como Z calculado está na região de rejeição de H_0 (menor que –1,88), rejeitamos H_0 e, portanto, podemos afirmar com 94% de certeza que existe diferença significativa entre as proporções de eleitores a favor do candidato nos dois estados.

Teste do Qui-Quadrado de Independência

O teste do qui-quadrado de independência está associado a duas variáveis qualitativas, ou seja, a uma análise bidimensional. Muitas vezes, queremos verificar a relação de dependência entre as duas variáveis qualitativas a serem analisadas.

Nesse caso, procuramos calcular a frequência de ocorrência das características dos eventos a serem estudados. Por exemplo, podemos estudar a relação entre o sexo de pessoas (masculino e feminino) e o grau de aceitação do governo estadual (ruim, médio e bom). Então, obteremos, por exemplo, o número de pessoas (frequência) que são do sexo feminino e que acham o governo bom. Todos os cruzamentos das duas variáveis são calculados.

Vamos apresentar a você, como exemplo, os possíveis resultados da situação sugerida anteriormente (dados simulados).

	Grau de aceitação			
Sexo	Ruim	Médio	Bom	Total
Masculino	157	27	74	258
Feminino	206	0	10	216
Total	363	27	84	474

Podemos determinar o grau de associação entre essas duas variáveis, ou seja, determinar se o grau de aceitação do governo depende do sexo ou se existe uma relação de dependência.

As hipóteses a serem testadas são:

H_0: variável linha independe da variável coluna (no exemplo anterior, o grau de aceitação independe do sexo das pessoas).

H_1: variável linha está associada à variável coluna (no exemplo anterior, o grau de aceitação depende do sexo das pessoas).

A estatística de qui-quadrado será dada por meio da seguinte expressão:

$$\chi^2_c = \sum_{i=1}^{k} \frac{(fo_i - fe_i)^2}{fe_i} = \frac{(fo_1 - fe_1)^2}{fe_1} + \frac{(fo_2 - fe_2)^2}{fe_2} + ... + \frac{(fo_k - fe_k)^2}{fe_k}$$

Onde:

k corresponde ao número de classes (frequências encontradas). Você pode verificar que **fo** corresponde à frequência observada, ou seja, ao valor encontrado na tabela de contingência.

Já **fe** corresponde à frequência esperada caso as variáveis sejam independentes. Por causa dessa definição, o cálculo da frequência esperada (**fe**) será obtido por:

$$fe = \frac{(total\ linha).(total\ coluna)}{total\ geral}$$

Nesse caso, os graus de liberdade (v), para que possamos olhar a tabela de qui-quadrado, são dados por:

$v = (h-1)\ (k-1)$ nas tabelas com h linhas e k colunas

(no exemplo anterior: $v = (2-1) \times (3-1) = 2$ graus de liberdade).

Então, para cada célula da tabela de contingências, você irá calcular a diferença entre **fe** e **fo**. Essa diferença é elevada ao quadrado para evitar que as diferenças positivas e negativas se anulem. A divisão pela frequência esperada é feita para obtermos diferenças em termos relativos.

Vamos entender melhor o teste de qui-quadrado do tipo independência por meio da análise de outra situação.

Situação: o gestor de uma prefeitura deseja saber como seus funcionários atuam no uso da ferramenta MSN durante o trabalho. Para realizar um programa de conscientização, ele precisa saber se o fato de os funcionários usarem pouco ou muito o MSN durante o trabalho depende do sexo das pessoas; e com essa informação, pode definir se fará programas de conscientização para homens e mulheres de forma separada ou em conjunto (um único programa). Para testar essa hipótese, foram selecionados, ao acaso, 96 funcionários de ambos os sexos que usam pouco ou muito o MSN. Verifique, com uma significância de 5%, a hipótese do gestor público.

Uso do MSN		
Sexo	Pouco	Muito
Homem	8	32
Mulher	16	40

Resolução:

Definindo primeiro as hipóteses H_0 e H_1.

H_0: uso do MSN independe do sexo.
H_1: uso do MSN depende do sexo.

Agora, iremos calcular as frequências esperadas, que são os valores que estão entre parênteses. Confira os cálculos das outras frequências esperadas cujos valores (**fe**) aparecem entre parênteses.

Uso do MSN			
Sexo	Pouco	Muito	Total
Homem	8 (10)	32 (30)	40
Mulher	16 (14)	40 (42)	56
	24	72	96

$$\frac{56 \cdot 24}{96} = 14$$

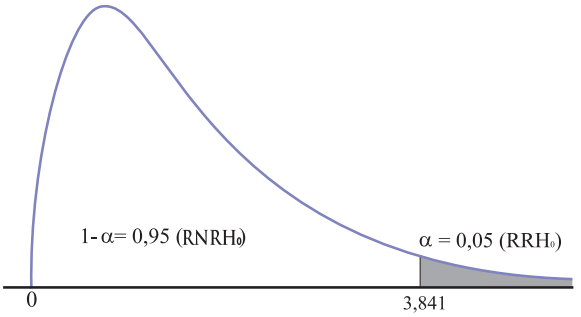
Agora, basta substituir os valores das frequências esperadas e observadas de todas as classes.

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(fo_i - fe_i)^2}{fe_i} = \frac{(8-10)^2}{10} + \ldots\ldots + \frac{(40-42)^2}{42} = 0{,}914$$

O valor do grau de liberdade é apresentado a seguir:

$\nu = (2 - 1) \cdot (2-1) = 1$ gl

Considerando um $\alpha = 0{,}05$ e olhando na tabela de qui-quadrado para 1 grau de liberdade, teremos:

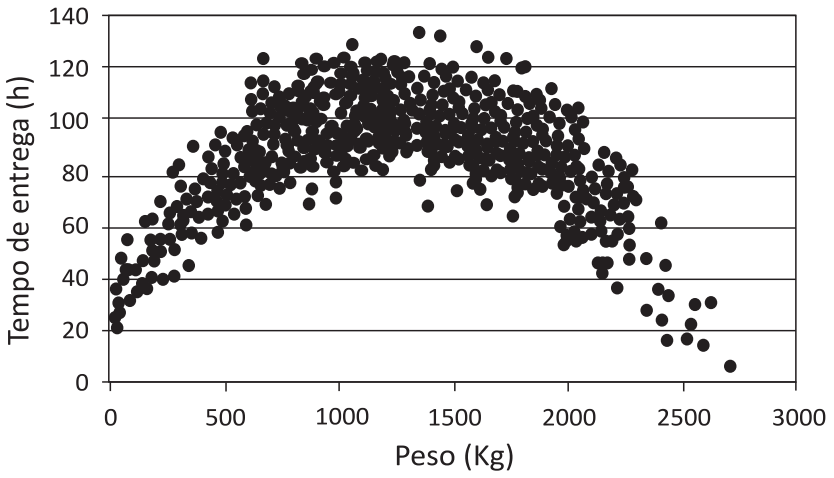


Como o valor calculado (0,914) foi menor do que o tabelado (3,841), então aquele caiu na região de aceitação de H_0. Portanto, não temos indícios para rejeitar a hipótese H_0, ou seja, o uso do MSN independe do sexo dos funcionários. Dessa forma, o gestor pode fazer um único programa de conscientização tanto para homens quanto para mulheres.

Associação entre Variáveis

Para verificar o grau de relacionamento entre duas variáveis, ou seja, o grau de associação entre elas, devemos estudar um coeficiente chamado de coeficiente de correlação. Existem vários deles; e cada um é aplicado em casos específicos. Aqui, iremos estudar o coeficiente de correlação de Pearson (r).

Para que possamos ter uma ideia da associação entre as variáveis que estamos estudando, iremos utilizar um gráfico de dispersão como o apresentado a seguir, pelo qual podemos constatar a relação entre as variáveis: o peso de um pacote e o seu tempo de entrega.



As estimativas de correlação podem ser positivas (à medida que a variável x aumenta a variável y também aumenta) ou negativas (à medida que a variável x aumenta a variável y diminui), como você pode ver nos exemplos a seguir:

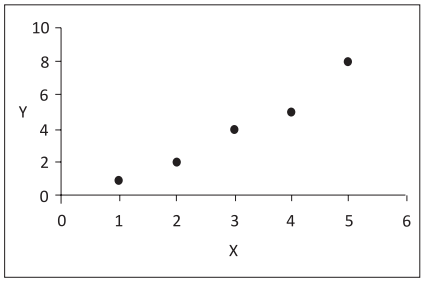
- Na correlação positiva, podemos ter como exemplo a relação entre a nota (eixo y) e o tempo dedicado aos estudos de estatística aplicada à administração, ou seja,

quanto maior o tempo de estudo, provavelmente maior será a sua nota.

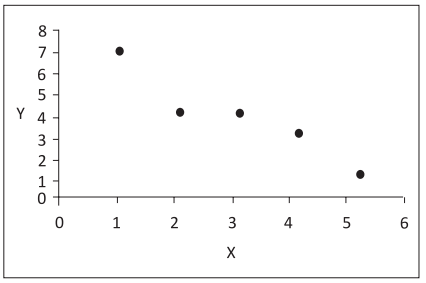
- Já em relação à correlação negativa, podemos ter como exemplo a relação entre a quantidade de batimentos cardíacos (eixo y) e a idade (eixo x), ou seja, quanto maior a idade menor a quantidade de batimentos cardíacos.

A representação gráfica das correlações positivas e negativas é mostrada nos gráficos a seguir:

Positiva		Negativa	
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5



Correlação Positiva



Correlação Negativa

O coeficiente de correlação de Pearson (r) nos dá uma ideia da variação conjunta das variáveis analisadas e pode assumir valores de –1 a +1.

Veja a expressão por meio da qual podemos obter o coeficiente de correlação de Pearson:

No exemplo que iremos trazer mais adiante, você encontrará a explicação dos somatórios dessa expressão. Não se preocupe!

$$r = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i - \sum y_i}{n}}{\left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right] \cdot \left[\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}\right]}$$

A ocorrência de um valor de r = 0 ou próximo de zero indica apenas que não há correlação **linear** entre as variáveis, porque pode existir uma forte relação não linear entre elas, como no gráfico de

dispersão do peso do pacote e respectivo tempo de entrega, onde temos uma relação não linear.

Vejamos as características que o coeficiente de correlação de Pearson pode apresentar:

- seus valores estão compreendidos entre -1 e 1;
- se o coeficiente for positivo, as duas características estudadas tendem a variar no mesmo sentido;
- se o sinal for negativo, as duas características estudadas tendem a variar em sentido contrário;
- a relação entre duas variáveis é tanto mais estreita quanto mais o coeficiente se aproxima de 1 ou –1; e
- o valor de r é uma estimativa do parâmetro ρ **(rho)**, da mesma forma que a média x é uma estimativa de μ. Para testar se o valor de r é estatisticamente igual ao parâmetro de uma população em que ρ **(rho)** = 0, podemos empregar o teste **t** definido por:

$$t_c = \frac{r - \rho}{\sqrt{1 - r^2}} . \sqrt{n-2}$$

onde:

n : número total de pares;

r^2 : coeficiente de correlação ao quadrado;

ρ : parâmetro da correlação populacional (considerado igual a zero); e

gl: graus de liberdade (para consulta na tabela *t*) = n-2.

A hipótese H_0 será de que ρ **(rho)** = 0 e a hipótese H_1, que iremos utilizar, será de que ρ **(rho)** ≠ 0.

Vamos analisar a situação, a seguir, para entender melhor esse coeficiente.

Situação:

Vamos determinar o coeficiente de correlação entre a porcentagem de aplicação do total de recursos com Educação em uma prefeitura (x) e o grau de conhecimento médio da população da cidade (y). Para isso, foram avaliadas dez cidades.

Porcentagem de aplicação do total de recursos com educação em uma prefeitura	Grau de conhecimento médio da população da cidade
5	70
10	40
20	27
30	22
40	18
50	16
60	15
70	14
80	13
90	12

Para obtermos a estimativa de correlação, precisamos calcular todos os somatórios presentes na expressão:

$$r = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i - \sum y_i}{n}}{\sqrt{\left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right] \cdot \left[\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}\right]}}$$

Calculando os somatórios, teremos:

Somatório de todos os valores de x:

$$\sum x_i = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{10} = 5 + 10 + \ldots\ldots + 90 = 455$$

Somatório de todos os valores de x elevados ao quadrado:

$$\sum x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_{10}^2 = 5^2 + 10^2 + \ldots\ldots + 90^2 = 28.525$$

Somatório de todos os valores de y:

$$\sum y_i = y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{10} = 70 + 40 + \ldots\ldots + 12 = 247$$

Somatório de todos os valores de y elevados ao quadrado:

$$\sum y_i^2 = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_{10}^2 = 70^2 + 40^2 + ... + 12^2 = 9.027$$

Somatório de todos os valores obtidos por meio do produto dos valores de x e y de cada cidade:

$$\sum x_i\, y_i = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 ..... + x_{10}\, y_{10} =$$

$$\sum x_i\, y_i = 5\ .\ 70 + 10\ .\ 40 + ... + 90\ .\ 12 = 7.470$$

Substituindo esses valores na expressão, teremos:

$$r = \frac{7.470 - \frac{455.247}{10}}{\sqrt{\left[28.525 - \frac{(455)^2}{10}\right] \cdot \left[9.027 - \frac{(247)^2}{10}\right]}} = \frac{-3.768,5}{4.784,28} = -0,7877$$

O valor de r = -0,7877 indica que existe uma associação inversa (negativa) e de média magnitude entre a variação da porcentagem de aplicação do total de recursos com educação em uma prefeitura e o grau de conhecimento médio da população da respectiva cidade, ou seja, provavelmente os recursos destinados à educação não estejam sendo bem empregados, já que a relação foi negativa quando se esperava que fosse positiva.

Para verificarmos se esse resultado é significativo, vamos fazer o seguinte teste de hipótese:

H_0: ρ **(rho)** = 0

H_1: ρ **(rho)** $\neq$ 0.

Iremos calcular a estatística por meio da expressão:

$$t_c = \frac{r - \rho}{\sqrt{1 - r^2}} \cdot \sqrt{n - 2}$$

Substituindo os valores na expressão, teremos:

$$t_c = \frac{-0,78770 - 0}{\sqrt{1 - 0,7877^2}} \cdot \sqrt{10 - 2} = -1,25 \cdot 2,82 = 3,525$$

Olhando na tabela de t para 8 graus de liberdade (10-2) e um α=0,025, já que estamos considerando uma significância de 0,05 e o

nosso teste é bilateral, teremos um valor tabelado de 2,306. Verificamos que o valor calculado de 3,525 está na região de rejeição da hipótese H_0 e, portanto, iremos aceitar a hipótese H_1, ou seja, de que ρ **(rho)** $\neq 0$. Então, o resultado encontrado na amostra (r) parece não ser fruto do acaso, considerando uma significância de 5%.

Devemos ter cuidado na interpretação do coeficiente de correlação, pois este não implica necessariamente uma medida de causa e efeito. É mais seguro interpretá-lo como medida de associação. Por exemplo, podemos encontrar uma correlação muito alta entre o aumento dos salários dos professores e o consumo de bebidas alcoólicas através de uma série de anos em uma dada região. Esse valor de r encontrado foi alto apenas porque pode ser que ambas as variáveis tenham sido afetadas por uma causa comum, ou seja, a elevação do padrão de vida dessa região.

Complementando

Através do *link* que apresentamos a seguir, você poderá fazer os testes de hipóteses e de estimativas de correlação de Pearson.

Programa estatístico Bioestat. Disponível em: <http://www.mamiraua.org.br/downloads/programas>. Acesso em: 21 jan. 2014.

Resumindo

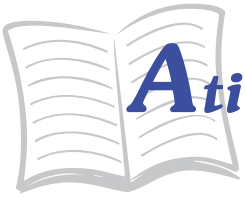
Nesta unidade, conhecemos os principais testes de hipóteses e vimos suas aplicações no dia a dia da gestão de empresas públicas.

Apresentamos a estrutura de um teste de hipótese, de testes de hipóteses para médias, para diferença entre médias e para diferença entre proporções.

Verificamos que o teste de qui-quadrado pode ser utilizado para medir a dependência entre variáveis qualitativas. Dessa forma, você terá plenas condições de aplicar e de interpretar um teste estatístico de maneira correta.

Além disso, mostramos que é necessário testar a significância estatística das correlações amostrais antes de avaliar sua importância prática.

Com esses conhecimentos, você terá plenas condições de aplicar e de interpretar corretamente os testes estatísticos mais comuns.



Atividades de aprendizagem

Chegou o momento de analisarmos se você entendeu o que estudamos até aqui! Para saber, procure resolver as atividades propostas a seguir. Lembre-se: você pode contar com o auxílio de seu tutor.

1. Um fabricante afirma que seus pneus radiais suportam em média uma quilometragem superior a 40.000 km. Uma prefeitura compra os pneus desse fabricante, mas existe uma dúvida no seu setor de compras: “A afirmação do fabricante está correta?”. Para testá-la, a prefeitura selecionou uma amostra de 49 pneus, e os testes apontaram uma média de 43.000 km. Sabe-se que a quilometragem de todos os pneus tem desvio padrão de 6.500 km. Se o comprador (gestor público) testar essa afirmação ao nível de significância de 5%, qual será sua conclusão?
2. Duas técnicas de cobrança de impostos são aplicadas em dois grupos de funcionários do setor de cobrança de uma prefeitura. A técnica A foi aplicada em um grupo de 12 funcionários e resultou em uma efetivação média de pagamento de 76% e uma variância de 50%. Já a técnica B foi aplicada em um grupo de 15 funcionários e resultou em uma efetivação média de 68% e uma variância de 75%. Considerando as variâncias estatisticamente iguais e com uma significância de 0,05, verifique se as efetivações de pagamento são estatisticamente iguais.
3. Um secretário de Educação de uma prefeitura deseja saber se há, no futuro, profissionais promissores em escolas de regiões pobres e de regiões ricas. Uma amostra de 16 estudantes de uma zona pobre

resultou, em um teste específico, numa média de 107 pontos e num desvio padrão de 10 pontos. Já 14 estudantes de uma região rica apresentaram uma média de 112 pontos e um desvio padrão de 8 pontos. Você deve verificar se a média dos pontos dos dois grupos é diferente ou igual a fim de que o gestor possa saber se ele deve investir em qualquer uma das áreas ou se uma delas é mais promissora (primeiro verifique se as variâncias são estatisticamente iguais ou diferentes).

Respostas das Atividades de aprendizagem

Unidade 1

1. a) Qualitativa Nominal.
   b) Qualitativa Ordinal.
   c) Quantitativa Discreta.
   d) Quantitativa Contínua.
2. a) Amostragem Sistemática.
   b) Amostragem por Conglomerado.
   c) Amostragem Estratificada.
   d) Amostragem Aleatória Simples.
   e) Amostragem Sistemática.
   f) Amostragem Aleatória Simples.
   g) Amostragem por Cotas.
   h) Amostragem por Conglomerado.

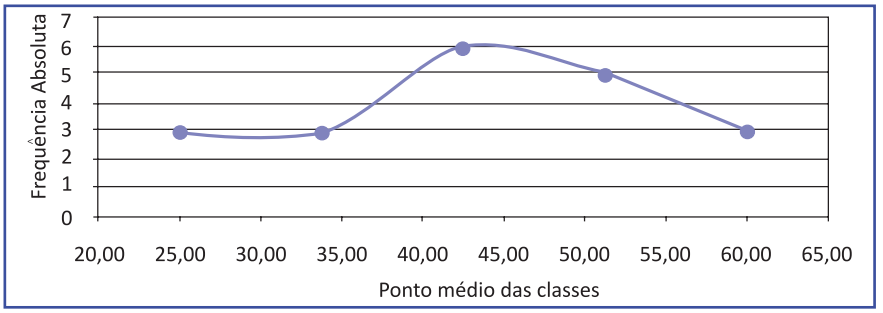
Unidade 2

1. a) n = 20, A = 35, k = 5 (aproximadamente), c = 8,75, Li_1a = 20,925.

Classes	Frequências absolutas
20,625 ⊢ 29,375	3
29,375 ⊢ 38,125	3
38,125 ⊢ 46,875	6
46,875 ⊢ 55,625	5
55,625 ⊢ 64,375	3
Total	20

Classes	Frequências absolutas
20,625 ├— 29,375	3
29,375 ├— 38,125	6
38,125 ├— 46,875	12
46,875 ├— 55,625	17
55,625 ├— 64,375	20

b)



Unidade 3

1. $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{7+42+37+25+38+...+33}{27} = 26,6$

Md = $X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} = X_{\left(\frac{27+1}{2}\right)} = X_{14} = 25$ (elemento de posição 14º)

Mo = 18,23,25 e 28, todos esses valores têm frequência 2 (multimodal)

Variância: $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{(7-26,6)^2 + ... + (33-26,6)^2}{27-1} = 94,33$

Desvio Padrão: $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{94,33} = 9,7$

Coeficiente de Variabilidade:

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{9,7}{26,6} \cdot 100 = 36,47\%$$

Obs.: Em todas as estatística calculadas a unidade a ser colocada é anos, exceto a variância, cuja unidade é dada por anos^2.

2. Média 21.0 dias
   Mediana 18.0 dias
   Moda 10.0 dias
   Desvio padrão 12.0 dias
   Coeficiente de Variação 57,3%

Unidade 4

1. R: 1-(1/3 * 1/5 * 3/10) = 0,98.

2. a) R: 0,125.
   b) R: 0,0694.
   c) R: 0,1388.

3. a) R: 60/100.
   b) R: 40/100.
   c) R: 24/100.
   d) R: 76/100.

Unidade 5

1. R:$P(X = 5) = C_{20}^{5}\, 0{,}1^{5}\, 0{,}9^{15} = 0{,}03192$.

2. Distribuição binomial com n = 4 e p = ½
   a) R: P(x=2) . 2.000 = 0,3750 . 2.000 = 750 famílias.
   b) R: [P(1) + P(2)] . 2.000 = (0,25 + 0,375) . 2.000 = 1.250 famílias.
   c) R: P(0) . 2.000 = 0,0625 . 2.000 = 125 famílias.

3. R: 1- [P(0)+P(1)], em que a distribuição de probabilidade é uma Poisson com parâmetro lambda.
   a) $\lambda = 1{,}4$ R= 0,40817
   b) $\lambda = 2{,}8$ R=0,76892
   c) $\lambda = 5{,}6$ R=0,97559

4. Para X = 2.200 ➔ $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{2.200 - 2.000}{200} = 1{,}00$

   Para X = 1.700 ➔ $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1.700 - 2.000}{200} = -1{,}50$

5. a) X = 20 ➔ Z = 0

X = 24 ➔ $Z = \frac{24-20}{5} = 0{,}8$

P(20 < X < 24) = P(0 < Z < 0,8) = 0,2881 (28,81 %)

b) X = 16 ➔ $Z = \frac{16-20}{5} = -0{,}8$

X = 20 ➔ Z = 0

P(16 < X < 20) = P (-0,8 < Z < 0) = P(0 < Z < 0,8) = 0,2881 = 28,81

c) X = 28 ➔ Z = (28 - 20)/ 5 = 1,6

P(X > 28) = P (Z > 1,6) = 0,5 - 0,4452 = 0,0548

6. 1 – α = 0,95 ➔ α = 0,05 ➔ α/2 = 0,025

$$e = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 . \frac{3}{\sqrt{100}} = 0{,}588$$

P(26,412 < μ < 27,588) = 0,95

Unidade 6

1. Sugestão: siga os passos para realizar um teste de hipótese:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_O}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{43.000 - 40.000}{6500 / \sqrt{49}} = 3{,}23 \qquad Z_{\alpha} = Z_{0{,}05} = 1{,}64$$

Conclusão: como o valor calculado foi maior do que o tabelado (1,64), ele caiu na região de rejeição de H_0.

2. $H_0 : \mu_A - \mu_B = 0$ $\qquad H_0 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = \frac{(76 - 68) - 0}{8\sqrt{1/12 + 1/15}} = 2{,}56$$

$t_{0{,}025} = 2{,}060$

Conclusão: como o valor calculado foi maior do que o tabelado (2,060), ele caiu na região de rejeição de H_0.

3. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ $\qquad H_0 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_1^2 / n_1 + s_2^2 / n_2}} = \frac{(112 - 107) - 0}{\sqrt{8^2/14 + 10^2/16}} = -1{,}52$$

$v = 29{,}7425 = 30$ (graus de liberdade obtidos pela aproximação).

$t_{0,025} = 2{,}042$ (com 30 gl)

Conclusão: como o valor calculado caiu na região de aceitação, as médias são estatisticamente iguais, o que indica que as duas regiões apresentam o mesmo potencial.

Considerações finais

Com os conhecimentos de estatística adquiridos ao longo deste livro, você agora já pode imaginar quantas análises estatísticas de dados podem ser feitas. Tais análises estão presentes até em uma simples ligação telefônica que uma empresa de crédito faz para você numa campanha de vendas. A empresa cruza informações como sexo, renda mensal e hábitos de consumo para oferecer um produto na medida certa; e com base nessa análise, seleciona clientes potenciais e os contata por telefone. No final, contabiliza o resultado das ligações em termos de vendas efetivas, recusas ou necessidade de novos contatos.

Para fazer tudo isso, é necessário, entretanto, um conhecimento básico de estatística para que empresas de Gestão Pública, ou não, venham a descobrir como transformar quantidades de números e de gráficos em informações que servirão para reduzir os custos e aumentar os lucros. O problema é que falta gente qualificada e com conhecimento de mercado para realizar as análises de dados. Para você trabalhar com conceitos estatísticos em qualquer setor, é necessário desenvolver um raciocínio lógico e, também, administrar informações, além de procurar entender como e por que as coisas acontecem.

Decidir algo importante implica avaliar os riscos e as oportunidades. Para que isso seja feito com muita precisão, é necessária a estatística!

Assim, você poderá aplicar os conhecimentos de estatística aprendidos em áreas como Recursos Humanos, Produção, Financeira e muitas outras que você irá identificar à medida que seus conhecimentos de Administração forem aumentando.

Embora não haja atalhos para se aprender a disciplina, esperamos que você tenha gostado de trabalhar com Estatística e que ela seja uma importante ferramenta a ser utilizada em seu dia a dia.

Um grande abraço e sucesso em sua vida profissional, com bastante estatística!

É o que desejamos a você.

Professor Marcelo Tavares

Referências

ARANGO, Hector G. *Bioestatística*: teórica e computacional. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2001.

BARBETTA, Pedro Alberto. *Estatística Aplicada às Ciências Sociais*. 4. ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2002.

BEIGUELMAN, Bernardo. *Curso Prático de bioestatística*. Ribeirão Preto: Revista Brasileira de Genética, 1996.

BRAULE, Ricardo. *Estatística Aplicada com Excel*: para cursos de administração e economia. Rio de Janeiro: Campus, 2001.

BUSSAB, Wilton O.; MORETTIN, Pedro. *Estatística Básica*. São Paulo: Atual, 2002.

COSTA NETO, Pedro Luiz de Oliveira. *Estatística*. São Paulo: Edgard Blucher, 2002.

DOWNING, D.; CLARK, J. *Estatística Aplicada*. São Paulo: Saraiva, 2000.

FONSECA, Jairo Simon da; MARTINS, Gilberto de Andrade. *Curso de Estatística*. Rio de Janeiro: LTC, 1982.

FREUD, Jonh E.; SIMON, Gary A. *Estatística aplicada*. Porto Alegre: Bookman, 2000.

HOUAISS, Instituto Antônio Houaiss. *Dicionário eletrônico Houaiss da Língua Portuguesa*. Versão monousuário, 3.0. Objetiva: junho de 2009. CD-ROM.

IME USP. *Pierre de Fermat.* [2008]. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/fermat.htm>. Acesso em: 6 maio 2014.

IE ULISBOA. *Blaise Pascal*. [2008]. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/pascal/biografia.htm>. Acesso em: 6 maio 2014.

LEVINE, David M.; BERENSON, Mark L.; STEPHAN, David F. *Estatística*: teoria e aplicações usando o Microsoft Excel em português. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

MORETTIN, Luiz Gonzaga. *Estatística Básica – Probabilidade*. São Paulo: Makron Books, 1999. 1 v.

_____. *Estatística Básica – Inferência*. São Paulo: Makron Books, 1999. 2 v.

SOARES, José F.; FARIAS, Alfredo A.; CESAR, Cibele C. *Introdução à Estatística*. Rio de Janeiro: LTC, 1991.

SPIEGEL, Murray R. *Probabilidade e Estatística*. São Paulo: McGraw Hill, 1993.

STEVENSON, William J. *Estatística Aplicada à Administração*. São Paulo: Harper, 1981.

TRIOLA, Mário F. *Introdução à Estatística*. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

WONNACOTT, T. H.; WONNACOTT, R. J. *Estatística Aplicada à Economia e à Administração*. Rio de Janeiro: LTC, 1981.

Minicurrículo

Marcelo Tavares

Possui Graduação (1989) e Mestrado (1993) pela Universidade Federal de Lavras, e Doutorado pela Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz/ USP (1998). Atualmente, é professor Associado IV da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Tem experiência na área de Estatística Aplicada e atua, principalmente, nos seguintes temas: modelagem estatística, estatística, amostragem, controle de qualidade e estatística multivariada. Também foi coordenador do Curso de Especialização em Estatística Empresarial do Núcleo de Estudos Estatísticos e Biométricos da Faculdade de Matemática e, foi Coordenador da Universidade Federal de Uberlândia na Universidade Aberta do Brasil (UAB) e ministro das disciplinas de Estatística para o Curso de Administração da UFU.