

Exercícios

Nível 1

MÉTODO DE GAUSS

Exemplo 1. Resolva o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 23 \\ x + 2y - 2z = -5 \\ 3x + y - 2z = 8 \end{cases}$$

usando o método de Gauss.

SOLUÇÃO. Primeiro, montamos a matriz expandida do sistema linear e depois fazemos as operações elementares necessárias para escalonar essa matriz. O processo é feito a seguir.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 23 \\ 1 & 2 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 8 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \\ L_2 - (1/2)L_1 \\ L_3 - (3/2)L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 23 \\ 0 & 5/2 & -9/2 & -33/2 \\ 0 & 5/2 & -19/2 & -53/2 \end{array} \right) \quad L_3 - \frac{5/2}{5/2}L_2 = L_3 - L_2$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 23 \\ 0 & 5/2 & -9/2 & -33/2 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array} \right)$$

Da terceira linha, $-5z = -10 \Leftrightarrow z = 2$. Substituindo na segunda linha,

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}y - \frac{9}{2}z &= -\frac{33}{2} \Leftrightarrow 5y - 9z = -33 \\ &\Leftrightarrow 5y = -33 + 9 \cdot 2 \\ &\Leftrightarrow 5y = -15 \\ &\Leftrightarrow y = -3. \end{aligned}$$

Substituindo na primeira linha,

$$2x - y + 5z = 23 \Leftrightarrow 2x + 3 + 15 = 23 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5.$$

Portanto, a solução do sistema de equações lineares é $x = 5$, $y = -3$ e $z = 2$.

E1) Resolva os seguintes sistemas de equações lineares usando o método de Gauss.

a) $\begin{cases} -x + 4y = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}.$

b) $\begin{cases} x - 3y = -9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}.$

c) $\begin{cases} x + 4y - z = 2 \\ 4x - y + 6z = 31 \\ 3x + y - 3z = -5 \end{cases}.$

d) $\begin{cases} -x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = 13 \\ 3x - 2y + 4z = -1 \end{cases}.$

Nível 2

E1) Para quais valores do parâmetro a os sistemas de equações lineares abaixo têm solução?

$$\text{a) } \begin{cases} 6x + y = 7 \\ 3x + y = 4 \\ -6x - 2y = a \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}.$$

E2) Uma empresa fabrica móveis de escritório e, no momento, planeja sua produção para o dia. A empresa tem quase todas as peças necessárias para sua produção em estoque, mas está com uma quantidade baixa de gavetas. Ela fabrica três tipos de mesa: o primeiro tipo necessita de 2 horas de manufatura e 1 hora de montagem e utiliza 2 gavetas; o segundo necessita de 1 hora de manufatura, 1 hora de montagem e leva 4 gavetas; o terceiro precisa de 4 horas de manufatura, 2 horas de montagem e tem somente 1 gaveta. A firma tem disponíveis para esse dia 21 horas de manufatura, 11 horas de montagem e 15 gavetas.

- a) Escreva um sistema linear que represente a situação descrita acima.
- b) Resolva o referido sistema usando o método de Gauss.

E3) Um fazendeiro precisa adubar um terreno acrescentando a cada 10 m^2 190 g de nitrato, 210 g de fosfato e 280 g de potássio. Existem no mercado quatro marcas de adubo, sendo que cada kg da marca 1 contém 10 g de nitrato, 10 g de fosfato e 100 g de potássio, custando 5 reais o kg; cada kg da marca 2 contém 10 g de nitrato, 100 g de fosfato e 300 g de potássio, custando 6 reais o kg; cada kg da marca 3 contém 50 g de nitrato, 20 g de fosfato e 20 g de potássio, custando 5 reais o kg; cada kg da marca 4 contém 20 g de nitrato, 40 g de fosfato e 35 g de potássio, custando 15 reais o kg. O fazendeiro planeja pagar exatamente 75 reais a cada 10 m^2 de terra adubada. Determine o quanto de cada uma das marcas deve ser usado a cada 10 m^2 de terra do fazendeiro (arredonde os resultados para gramas).

E4) Determine os coeficientes do polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tais que $p(0) = 10$, $p(1) = 7$, $p(3) = -11$ e $p(4) = -14$.

E5) Resolva os seguintes sistemas de equações não lineares usando o método de Gauss.

$$\text{a) } \begin{cases} -\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = 2 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \cos \alpha + 3 \sin \beta - \operatorname{tg} \gamma = 2 \\ 3 \cos \alpha + \sin \beta - 3 \operatorname{tg} \gamma = -2 \\ 2 \cos \alpha - \sin \beta + 2 \operatorname{tg} \gamma = 1 \end{cases}.$$

Respostas

NÍVEL 1

- E1) a) $x = 1$ e $y = 2$. b) $x = 0$ e $y = 3$. c) $x = 2, y = 1$ e $z = 4$.
d) $x = 3, y = 1$ e $z = -2$.

NÍVEL 2

- E1) a) $a = -8$. b) $\{a \in \mathbb{R} \mid a \neq -4\}$.

E2) a)
$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 21 \\ x + y + 2z = 11 \\ 2x + 4y + z = 15 \end{cases}$$
 b) $x = 4, y = 1$ e $z = 3$.

- E3) 1 kg do adubo 1, 0 kg do adubo 2, 2 kg do adubo 3 e 4 kg do adubo 4.

- E4) $a = 1, b = -6, c = 2$ e $d = 10$.

- E5) a) $x = 1/2, y = 1$ e $z = 1$. b) $\alpha = \pi/2, \beta = \pi/2$ e $\gamma = \pi/4$.