Intro à Probabilidade

Eduardo Horta

Aula 5 (continuação)

Múltiplas variáveis aleatórias

Múltiplas variáveis aleatórias

- Consideremos um experimento aleatório qualquer, e tomemos como modelo formal para esse experimento um espaço amostral Ω munido de uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$.
- Em inúmeras situações, estaremos interessados em mais do que uma variável aleatória definidas nesse espaço amostral. Quer dizer, tipicamente temos interesse em mais do que um característico numérico associados a um mesmo experimento.
- **Exemplo**: se o experimento consiste em medir determinadas condições metereológicas num dado instante de tempo e numa dada localidade, então um espaço amostral possivelmente adequado seria o conjunto de todas as possíveis configurações climáticas. Nesse caso, podemos estar interessados nos característicos numéricos X = "temperatura", Y = "pressão", Z = "umidade relativa do ar", etc.

Múltiplas variáveis aleatórias: exemplo

- Voltemos ao exemplo anterior, onde o experimento consistia em lançar 3 vezes consecutivas uma moeda (possivelmente desequilibrada), anotando a *string* de resultados obtidos:

$$\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\},$$

- Já havíamos considerado a variável aleatória X = "número de **caras** observadas nos 3 lançamentos".

Múltiplas variáveis aleatórias: exemplo

- Vamos introduzir agora mais algumas variáveis aleatórias: sejam
  - Y = "número de **caras** obtidas nos 2 *primeiros* lançamentos";
  - Z = "número de **caras** obtidas nos 2 *últimos* lançamentos" e;
  - W = "número de **caras** obtidas no *primeiro* lançamento", isto é,

$$W = \mathbb{I}_{\{\bullet\bullet\bullet,\bullet\bullet\circ,\bullet\circ\bullet,\bullet\circ\circ\}}.$$

  (ainda em outros termos, W é a indicadora do evento "**cara** no primeiro lançamento")

Múltiplas variáveis aleatórias: exemplo

- Temos o seguinte esquema:

ω	●●●	●●○	●○●	●○○	○●●	○●○	○○●	○○○
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	2	2	1	1	1	1	0	0
$Z(\omega)$	2	1	1	0	2	1	1	0
$W(\omega)$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\mathbb{P}\{\omega\}$	α^3	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta\alpha$	$\alpha\beta^2$	$\beta\alpha^2$	$\beta\alpha\beta$	$\beta^2\alpha$	β^3

onde $0 \leq \alpha \leq 1$ é interpretado como o *parâmetro de desequilíbrio* (em favor de **cara**) da moeda, e onde $\beta = 1 - \alpha$.

Múltiplas variáveis aleatórias: exemplo

- Claramente, vemos que $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$, que $S_Y = S_Z = \{0, 1, 2\}$ e que $S_W = \{0, 1\}$.
- Ademais, temos:
  - $p_X(i) = \binom{3}{i}\alpha^i(1-\alpha)^{3-i}, \quad i \in S_X$
  - $p_Y(i) = p_Z(i) = \binom{2}{i}\alpha^i(1-\alpha)^{2-i}, \quad i \in S_Y$
  - $p_W(i) = \alpha^i(1-\alpha)^{1-i}, \quad i \in S_W$
- **Exercício**: Justifique detalhadamente as expressões para as funções massa de probabilidade dadas acima.

Múltiplas variáveis aleatórias: exemplo

- Esse exemplo ilustra, entre outras coisas, o fato importantíssimo de que *duas variáveis aleatórias diferentes podem ter a mesma função massa de probabilidade*! (Esse é o caso das variáveis aleatórias Y e Z acima)

Aula 6: correção da Prova 1

Aula 7

Múltiplas variáveis aleatórias

Múltiplas variáveis aleatórias

- Quando duas variáveis aleatórias discretas, digamos X e Y, possuem a mesma função massa de probabilidade, dizemos que X **e** Y **são iguais em distribuição** e escrevemos

$$X \overset{\mathrm{D}}{=} Y \tag{1}$$

- No caso geral, dizemos que duas variáveis aleatórias X e Y são **iguais em distribuição** e escrevemos (1) se X e Y possuem a mesma função de distribuição acumulada:

$$X \overset{\mathrm{D}}{=} Y \quad \Longleftrightarrow \quad F_X = F_Y$$

Função de distribuição acumulada conjunta

Função de distribuição acumulada conjunta

- Consideremos um experimento aleatório qualquer, e tomemos como modelo formal para esse experimento um espaço amostral Ω munido de uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$.
- Se X e Y são duas variáveis aleatórias associadas a esse experimento, definimos a **função de distribuição acumulada conjunta** de X e Y como sendo a função $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$F_{X,Y}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\big([X \leq x] \cap [Y \leq y]\big), \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Função de distribuição acumulada conjunta

- Semelhantemente, se X, Y e Z são variáveis aleatórias em um mesmo espaço amostral, introduzimos a **FDA conjunta de X, Y e Z** através da função $F_{X,Y,Z} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F_{X,Y,Z}(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}\big([X \leq x] \cap [Y \leq y] \cap [Z \leq z]\big), \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Função de distribuição acumulada conjunta

- É possível estender a noção de FDA conjunta para qualquer coleção finita de variáveis aleatórias: se $X_1, X_2, \ldots, X_d$ são variáveis aleatórias, escrevemos $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ e definimos a FDA conjunta de $\boldsymbol{X}$ como sendo a função $F_{\boldsymbol{X}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_d) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{d} [X_i \leq x_i]\right), \qquad (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

Múltiplas variáveis aleatórias: exemplo

- Vamos simplificar nosso exemplo anterior, passando a considerar o experimento que consiste em lançar 2 vezes consecutivas uma moeda (possivelmente desequilibrada) e anotar a *string* de resultados obtidos:

$$\Omega = \{\bullet\bullet, \bullet\circ, \circ\bullet, \circ\circ\},$$

- Consideremos as variáveis aleatórias:
  - Y = “número de **caras** obtidas nos 2 lançamentos”;
  - W = “número de **caras** obtidas no *primeiro* lançamento”

FDA conjunta: exemplo

- Temos o esquema

ω	●●	●○	○●	○○
$Y(\omega)$	2	1	1	0
$W(\omega)$	1	1	0	0
$\mathbb{P}\{\omega\}$	α^2	$\alpha(1-\alpha)$	$(1-\alpha)\alpha$	$(1-\alpha)^2$

  onde $0 \leq \alpha \leq 1$ é interpretado como o *parâmetro de desequilíbrio* (em favor de **cara**) da moeda.
- Queremos encontrar a FDA conjunta de Y e W. Primeiro, vamos explicitar as FDAs de Y e W tomadas individualmente.

FDA conjunta: exemplo

- Vê-se que

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0; \\ (1-\alpha)^2, & \text{se } 0 \leq y < 1; \\ (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha), & \text{se } 1 \leq y < 2; \\ 1, & \text{se } y \geq 2. \end{cases}$$

e, semelhantemente,

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & \text{se } w < 0; \\ 1-\alpha, & \text{se } 0 \leq w < 1; \\ 1, & \text{se } w \geq 1. \end{cases}$$

- **Exercício**: Justifique detalhadamente as expressões acima.

FDA conjunta: exemplo

- Para a FDA conjunta de Y e W, temos

$$F_{Y,W}(y,w) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0 \text{ ou } w < 0; \\ 1, & \text{se } y \geq 1 \text{ e } w \geq 1; \\ (1-\alpha)^2, & \text{se } 0 \leq y < 1 \text{ e } w \geq 0; \\ (1-\alpha)^2 + \alpha(1-\alpha), & \text{se } y \geq 1 \text{ e } 0 \leq w < 1; \\ (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha), & \text{se } y \geq 1 \text{ e } w \geq 1; \end{cases}$$

(Faça um desenho!)

FDA conjunta: mais alguns comentários

- O exemplo acima ilustra que, para variáveis aleatórias *discretas*, a FDA conjunta torna-se (possivelmente) muito complicada mesmo em casos extremamente simples.
- Voltaremos a discutir alguns exemplos de FDAs conjuntas mais adiante, no contexto de variáveis aleatórias contínuas (nesse contexto, as coisas mudam um pouco de teor; por exemplo, em muitos casos a FDA conjunta de duas variáveis aleatórias contínuas será dada por uma expressão algébrica fechada)

FDA conjunta: mais alguns comentários

- Da mesma maneira que no caso univariado, a utilidade de introduzirmos a noção de uma FDA conjunta está em sua generalidade: a FDA conjunta está bem definida para coleções de variáveis aleatórias de qualquer tipo[1] (discretas, contínuas, mistas, singulares, etc).
- A ideia é, como no caso univariado, capturar o “comportamento probabilístico conjunto” das variáveis aleatórias envolvidas.
- Todavia, como o exemplo acima ilustra, nem sempre FDAs conjuntas são a melhor ferramenta para se trabalhar.

[1] Você ainda não precisa saber isso.

FDAs marginais

- No contexto em que temos diversas variáveis aleatórias envolvidas, é usual chamarmos a FDA de cada uma delas tomada individualmente de **função de distribuição acumulada marginal**.
- Por exemplo, se X e Y são variáveis aleatórias com FDA conjunta $F_{X,Y}$, então F_X é dita a **função de distribuição acumulada marginal de** X, F_Y é dita a **FDA marginal de** Y, etc.
- A terminologia não é a melhor possível; por exemplo, se X, Y e Z são variáveis aleatórias com FDA conjunta $F_{X,Y,Z}$, em alguns contextos chama-se de FDA marginal de X e Y à função $F_{X,Y}$, etc.

Independência entre variáveis aleatórias

- **Definição**: Sejam X e Y variáveis aleatórias com FDA conjunta $F_{X,Y}$. Dizemos que X e Y são **mutuamente independentes** se valer a igualdade

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \qquad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

- Importante: na definição dada acima, não basta que valha a igualdade para *alguns* pares x, y.
- Isto é, devem valer as igualdades $F_{X,Y}(1,\sqrt{2}) = F_X(1)F_Y(\sqrt{2})$, $F_{X,Y}(\pi, 2^{10}) = F_X(\pi)F_Y(2^{10})$, etc. Quer dizer, a igualdade deve ser verificada para quaisquer valores de x e y que possamos "plugar" como argumentos nas funções em (2).

Independência entre variáveis aleatórias

- Por outro lado, para verificar que duas variáveis aleatórias X e Y não são independentes, basta encontrar um par de valores x e y para os quais $F_{X,Y}(x, y) \neq F_X(x)F_Y(y)$.
- No exemplo anterior, temos

$$F_{Y,W}(2, 0) = (1 - \alpha)^2 + \alpha(1 - \alpha) = 1 - \alpha = F_Y(2)F_W(0),$$

mas essa igualdade não é suficiente para estabelecer independência entre Y e W.

Independência entre variáveis aleatórias

- De fato, também é verdade que

$$F_{Y,W}(1,0) = (1-\alpha)^2 + \alpha(1-\alpha) = 1-\alpha$$

enquanto, por outro lado, temos

$$F_Y(1) = (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha) = 1-\alpha^2$$

e

$$F_W(0) = (1-\alpha),$$

o que nos dá

$$F_Y(1)F_W(0) = (1-\alpha^2)(1-\alpha) \neq (1-\alpha) = F_{Y,W}(1,0),$$

exceto se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

- Logo, da igualdade acima depreendemos que Y e W *não são* mutuamente independentes.

Independência entre variáveis aleatórias

- No caso geral, temos a seguinte...
- **Definição**: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_d$ variáveis aleatórias com FDA conjunta $F_{\boldsymbol{X}}$, onde $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d)$. Dizemos que as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_d$ são **(coletivamente) independentes** se valer a igualdade

$$F_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i=1}^{d} F_{X_i}(x_i), \qquad (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

- Em palavras: variáveis aleatórias $X_1, X_2, \ldots, X_d$ são independentes precisamente quando sua FDA conjunta fatora no produto das FDAs marginais.

Aula 8

FDA conjunta: propriedades

- Se X e Y são variáveis aleatórias com FDA conjunta $F_{X,Y}$ e FDAs marginais F_X e F_Y, respectivamente, então vale que:
  1. $\lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)$;
  2. $\lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y)$.
- Mais geralmente, se X, Y e Z são variáveis aleatórias com FDA conjunta $F_{X,Y,Z}$ e FDAs marginais F_X, F_Y e F_Z, respectivamente, então vale que:
  3. $\lim_{z \to \infty} F_{X,Y,Z}(x, y, z) = F_{X,Y}(x, y)$;
  4. $\lim_{z \to \infty, y \to \infty} F_{X,Y,Z}(x, y, z) = F_X(x)$, etc.
- No caso geral (isto é, quando temos variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_d$), valem propriedades semelhantes.

Função massa de probabilidade conjunta

Função massa de probabilidade conjunta

- Consideremos um experimento aleatório qualquer, e tomemos como modelo formal para esse experimento um espaço amostral Ω munido de uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$.
- Se X e Y são duas variáveis aleatórias discretas associadas a esse experimento, definimos a **função massa de probabilidade conjunta** de X e Y como sendo a função $p_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$p_{X,Y}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big), \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Função massa de probabilidade conjunta

- Semelhantemente, se X, Y e Z são variáveis aleatórias discretas em um mesmo espaço amostral, introduzimos a **FMP conjunta de X, Y e Z** através da função $p_{X,Y,Z} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$p_{X,Y,Z}(x, y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y] \cap [Z = z]\big), \qquad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Função massa de probabilidade conjunta

- É possível estender a noção de FMP conjunta para qualquer coleção finita de variáveis aleatórias discretas: se $X_1, X_2, \ldots, X_d$ são variáveis aleatórias discretas, escrevemos $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ e definimos a FMP conjunta de $\boldsymbol{X}$ como sendo a função $p_{\boldsymbol{X}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dada por

$$p_{\boldsymbol{X}}(x_1, \ldots, x_d) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{d} [X_i = x_i]\right), \qquad (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

FMP conjunta: exemplo

- Voltemos ao exemplo anterior, onde o experimento consistia em lançar 3 vezes consecutivas uma moeda (possivelmente desequilibrada), anotando a *string* de resultados obtidos:

$$\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\},$$

- Havíamos considerado as variáveis aleatórias:
  - X = “número de **caras** observadas nos 3 lançamentos”.
  - Y = “número de **caras** obtidas nos 2 *primeiros* lançamentos”;
  - Z = “número de **caras** obtidas nos 2 *últimos* lançamentos” e;
  - W = “número de **caras** obtidas no *primeiro* lançamento”.

FMP conjunta: exemplo

- Temos o seguinte esquema:

ω	●●●	●●○	●○●	●○○	○●●	○●○	○○●	○○○
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	2	2	1	1	1	1	0	0
$Z(\omega)$	2	1	1	0	2	1	1	0
$W(\omega)$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\mathbb{P}\{\omega\}$	α^3	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta\alpha$	$\alpha\beta^2$	$\beta\alpha^2$	$\beta\alpha\beta$	$\beta^2\alpha$	β^3

  onde $0 \leq \alpha \leq 1$ é interpretado como o *parâmetro de desequilíbrio* (em favor de **cara**) da moeda, e onde $\beta = 1 - \alpha$.

FMP conjunta: exemplo

- Nesse exemplo, a FMP conjunta de X, Y, Z, W é inteiramente capturada pelos valores de $\mathbb{P}\{\omega\}$ dados na tabela acima; por exemplo, tem-se que

$$p_{X,Y,Z,W}(2, 1, 2, 0) = \beta\alpha^2,$$

pois vale a igualdade de eventos

$$(X = 2) \cap (Y = 1) \cap (Z = 2) \cap (W = 0) = \{\circ\bullet\bullet\}.$$

FMP conjunta: exemplo

- Quando lidamos com a FMP conjunta de *duas* variáveis aleatórias, é usual representarmos essa FMP através de uma tabela.
- Por exemplo, para as variáveis aleatórias Y e Z acima, temos

		y			
		0	1	2	$\mathbb{P}(Z = z)$
	0	β^3	$\alpha\beta^2$	0	β^2
z	1	$\alpha\beta^2$	$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$	$\alpha^2\beta$	$2\alpha\beta$
	2	0	$\alpha^2\beta$	α^3	α^2
	$\mathbb{P}(Y = y)$	β^2	$2\alpha\beta$	α^2	

- As entradas no bloco central da tabela correspondem aos valores de $p_{Y,Z}(y, z)$.

FMPs marginais

- No contexto em que temos diversas variáveis aleatórias envolvidas, é usual chamarmos a FMP de cada uma delas tomada individualmente de **função massa de probabilidade marginal**.
- Por exemplo, se X e Y são variáveis aleatórias com FMP conjunta $p_{X,Y}$, então p_X é dita a **função massa de probabilidade marginal de** X, p_Y é dita a **FMP marginal de** Y, etc.

FMP conjunta: propriedades

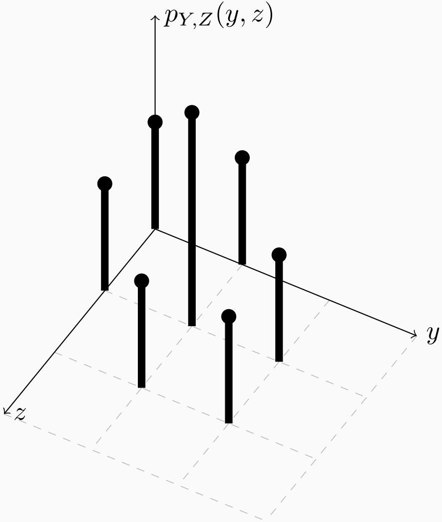
- Se X e Y são variáveis aleatórias com FMP conjunta $p_{X,Y}$ e FMPs marginais p_X e p_Y, respectivamente, então vale que:
  1. $\sum_{y \in S_Y} p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)$;
  2. $\sum_{x \in S_X} p_{X,Y}(x,y) = p_Y(y)$.
- Mais geralmente, se X, Y e Z são variáveis aleatórias com FMP conjunta $p_{X,Y,Z}$ e FMPs marginais p_X, p_Y e p_Z, respectivamente, então vale que:
  3. $\sum_{z \in S_Z} p_{X,Y,Z}(x,y,z) = p_{X,Y}(x,y)$;
  4. $\sum_{z \in S_Z} \sum_{y \in S_Y} p_{X,Y,Z}(x,y,z) = p_X(x)$, etc.
- No caso geral (isto é, quando temos variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_d$), valem propriedades semelhantes.

FMP conjunta: exemplo (continuação)

- Para ilustrar as propriedades acima, continuemos o exemplo anterior no caso particular em que a moeda é perfeitamente equilibrada, isto é, $\alpha = 1/2$, que podemos representar pela tabela:

		y = 0	y = 1	y = 2	$\mathbb{P}(Z = z)$
z	0	$1/8$	$1/8$	0	$1/4$
	1	$1/8$	$1/4$	$1/8$	$1/2$
	2	0	$1/8$	$1/8$	$1/4$
	$\mathbb{P}(Y = y)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	

- Nesse caso, é imediata a verificação das propriedades 1 a 4 enunciadas anteriormente. Abaixo, uma representação gráfica de $p_{Z,W}$.


$p_{Y,Z}(y,z)$
y
z

- Embora a definição de independência entre variáveis aleatórias seja dada em termos das funções de distribuição acumulada envolvidas (conjunta = produto das marginais), em geral não é imediato verificar-se a fatoração a partir das FDAs.
- O seguinte resultado torna as coisas um pouco mais fáceis, no caso de variáveis aleatórias discretas:

Proposição. Duas variáveis aleatórias discretas X e Y são independentes se, e somente se, valer a igualdade

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$$

para todo par de números reais x e y.

FMP e independência: exemplo (continuação)

- No exemplo anterior, vemos que as variáveis aleatórias Y e Z não são independentes, já que

$$p_{Y,Z}(2,0) = 0 \neq \alpha^2\beta^2 = p_Y(2)p_Z(0)$$

  (exceto nos casos $\alpha = 1$ ou $\alpha = 0$).
- Vejamos que as variáveis aleatórias W e Z são independentes.

FMP e independência: exemplo (continuação)

- Nesse caso, temos que a FMP conjunta $p_{Z,W}$ pode ser representada pela tabela abaixo (juntamente com as FMPs marginais de Z e W, nas marginais da tabela):

		z			
		0	1	2	$\mathbb{P}(W = w)$
w	0	β^3	$2\alpha\beta^2$	$\alpha^2\beta$	β
	1	$\alpha\beta^2$	$2\alpha^2\beta$	α^3	α
	$\mathbb{P}(Z = z)$	β^2	$2\alpha\beta$	α^2	

- Para verificar se Z e W são independentes, é preciso checar cada um dos produtos $p_Z(z)$ e $p_W(w)$, com $z = 0, 1, 2$ e $w = 0, 1$, e conferir que o valor encontrado coincide com a entrada correspondente na tabela.

Aula 9

Função massa de probabilidade condicional

Função massa de probabilidade condicional

- Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas, e fixemos um possível valor $y \in S_Y$ assumido por Y, isto é, $p_Y(y) > 0$. Definimos a **função massa de probabilidade condicional** de X dado $Y = y$ como sendo a função $p_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$p_{X\,|\,Y}(x|y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

- Da mesma maneira que no contexto de probabilidades condicionais (de eventos), se $p_Y(y) = 0$ podemos definir a FMP condicional de X dado $Y = y$ arbitrariamente. O usual é pôr, nesses casos, $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- **Importante**: Note que podemos interpretar $p_{X|Y}(\cdot\,|\,\cdot)$ como sendo uma função com dois argumentos!

Função massa de probabilidade condicional

- A noção de FMP pode ser facilmente estendida para acomodar o caso de multiplas variáveis aleatórias, tanto *condicionadas* quanto *condicionantes*: se $X_1, \ldots, X_k$ e $Y_1, \ldots, Y_d$ são variáveis aleatórias discretas, escrevemos $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_d)$ e colocamos

$$p_{\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) = \mathbb{P}\biggl(\bigcap_{i=1}^{k} (X_i = x_i) \biggm| \bigcap_{j=1}^{d} (Y_j = y_j) \biggr),$$

para cada $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ e cada $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$.

Função massa de probabilidade condicional: exemplo

- Voltemos ao exemplo anterior:

ω	●●●	●●○	●○●	●○○	○●●	○●○	○○●	○○○
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$Y(\omega)$	2	2	1	1	1	1	0	0
$Z(\omega)$	2	1	1	0	2	1	1	0
$W(\omega)$	1	1	1	1	0	0	0	0
$\mathbb{P}\{\omega\}$	α^3	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta\alpha$	$\alpha\beta^2$	$\beta\alpha^2$	$\beta\alpha\beta$	$\beta^2\alpha$	β^3

- Vamos obter a FMP condicional de Y dado $Z = z$, para cada $z \in \{0, 1, 2\}$.

Função massa de probabilidade condicional: exemplo

- Informalmente, é fácil determinar $p_{Y|Z}(\cdot|0)$, $p_{Y|Z}(\cdot|1)$ e $p_{Y|Z}(\cdot|2)$: de fato, dado $Z = 0$ (isto é, duas **coroas** nos dois primeiros lançamentos) vemos que Y (o número de **caras** obtidas no segundo e terceiro lançamentos) só pode ser 0 ou 1, e isso ocorre com probabilidades $1 - \alpha$ e α, respectivamente.
- Quer dizer, de acordo com a heurística acima, deve valer

$$p_{Y|Z}(y|0) = \alpha^y (1-\alpha)^{1-y}, \qquad y \in \{0, 1\}$$

- Um argumento semelhante pode ser aplicado para obtermos as FMPs de Y dado $Z = 1$ e dado $Z = 2$. Vejamos primeiro que a derivação acima nos conduziu à resposta correta.

Função massa de probabilidade condicional: exemplo

- Já havíamos encontrado a função massa de probabilidade conjunta, bem como as FMPs marginais, de Y e Z.

		y			
		0	1	2	$\mathbb{P}(Z = z)$
	0	β^3	$\alpha\beta^2$	0	β^2
z	1	$\alpha\beta^2$	$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$	$\alpha^2\beta$	$2\alpha\beta$
	2	0	$\alpha^2\beta$	α^3	α^2
	$\mathbb{P}(Y = y)$	β^2	$2\alpha\beta$	α^2	

- Aplicando a definição, vemos que

$$p_{Y|Z}(0|0) = \frac{p_{Y,Z}(0,0)}{p_Z(0)} = \frac{\beta^3}{\beta^2} = \beta = 1 - \alpha$$

Função massa de probabilidade condicional: exemplo

- Semelhantemente,

$$p_{Y|Z}(1|0) = \frac{\alpha\beta^2}{\beta^2} = \alpha, \qquad p_{Y|Z}(2|0) = \frac{0}{\beta^2} = 0.$$

- Logo, o argumento intuitivo usado acima de fato nos levou à FMP condicional correta (não precisamos considerar a FMP condicional com $y \notin \{0, 1, 2\}$ pois, nesses casos, a FMP conjunta já vale zero).
- Por um procedimento análogo, podemos obter $p_{Y|Z}(\cdot|1)$ e $p_{Y|Z}(\cdot|2)$.

Função massa de probabilidade condicional: propriedades

- Tendo em vista que FMPs condicionais nada mais são do que probabilidades condicionais de eventos associados a variáveis aleatórias, é imediato que podemos traduzir resultados como a Lei da Probabilidade Total e o Teorema de Bayes para esse contexto. Temos o seguinte:
- **Proposição**. Valem as seguintes propriedades:
  1. $p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{X|Y}(x|y) p_Y(y)$.
  2. $p_{X|Y}(x|y) p_Y(y) = p_{Y|X}(y|x) p_X(x)$.