Intro à Probabilidade

Eduardo Horta

Área II

Variáveis aleatórias

Aula 1

Variáveis aleatórias

- Até aqui: consideramos um **experimento aleatório**[1] cujo conjunto de possíveis resultados, chamado o **espaço amostral**, é constituído de objetos de natureza bastante arbitrária/flexível (no caso, os próprios resultados do experimento em questão).
- **Exemplo**: tomemos o experimento que consiste em lançar, três vezes consecutivas, uma moeda equilibrada.
- Nesse caso, o espaço amostral pode ser representado como

$$\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\},$$

onde, por exemplo, $\bullet\bullet\circ$ representa o *resultado* “**cara** no primeiro e segundo lançamentos, **coroa** no terceiro”.

[1] Entendido em sentido lato.

Variáveis aleatórias

- Em muitas circunstâncias, estamos de fato interessados em um característico numérico associado a um experimento aleatório.
- Por exemplo, no espaço amostral proposto acima, um possível característico numérico associado ao experimento é o “número de **caras** observadas nos três lançamentos”.
- Esse característico numérico pode ser introduzido *formalmente* através de uma *função* X cujo domínio é o espaço amostral Ω e cujo contradomínio é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, conforme o esquema a seguir:

Variáveis aleatórias

- No espaço amostral

$$\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\},$$

  definimos o "número de **caras** observadas nos três lançamentos" como sendo a *função* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} X(\bullet\bullet\bullet) &= 3, \quad X(\bullet\bullet\circ) = 2, \\ X(\bullet\circ\bullet) &= 2, \quad X(\bullet\circ\circ) = 1 \\ X(\circ\bullet\bullet) &= 2, \quad X(\circ\bullet\circ) = 1, \\ X(\circ\circ\bullet) &= 1, \quad X(\circ\circ\circ) = 0 \end{aligned}$$

Variáveis aleatórias

- Nesse exemplo, podemos sumarizar a função X através de uma tabela:

ω	●●●	●●○	●○●	●○○	○●●	○●○	○○●	○○○
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0

Variáveis aleatórias: DEFINIÇÃO

- **Definição**: uma função X cujo domínio é o espaço amostral Ω e cujo contradomínio é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é dita uma **variável aleatória**.
- **Importante**: em geral, denotamos variáveis aleatórias por letras maiúsculas X, Y, Z, V, W, etc.
- Dizemos que uma variável aleatória X é **discreta** se sua imagem for um subconjunto enumerável da reta.
    - Isto é, X é discreta se o conjunto de possíveis valores assumidos pela *função* X for da forma $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ ou $\{a_1, a_2, \ldots\}$, onde os a_j's são números reais distintos entre si.

Variáveis aleatórias (exemplos)

- No exemplo anterior, evidentemente que a variável aleatória X = "número de **caras** observadas nos três lançamentos" é discreta, pois os possíveis valores por ela assumidos são os números 0, 1, 2 ou 3.
  - (Isto é, sua imagem é o conjunto $\{0, 1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{R}$)
- Falaremos de variáveis aleatórias não-discretas (em particular, contínuas) mais adiante, mas apenas para dar alguns exemplos, considere o espaço amostral $\Omega = (0, 1]$ correspondente ao modelo para o experimento que consiste em selecionar, ao acaso, um número no intervalo unitário.
  - (Note que, nesse espaço amostral, a natureza dos próprios resultados do experimento já é numérica!)

Variáveis aleatórias (exemplos)

- Alguns exemplos de variáveis aleatórias nesse espaço amostral são:

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \omega, && 0 < \omega \leq 1, \\
Y(\omega) &= \cos(2\pi\omega), && 0 < \omega \leq 1,
\end{aligned}
$$

as funções do Cálculo (polinômios, trigonométricas, exponencial, logaritmo, etc), a função

$$
Z(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < \omega \leq 1/3 \\ 1, & \text{se } 1/3 < \omega \leq 1 \end{cases}
$$

- Faça um desenho!
- Aqui, Z é uma variável aleatória discreta (pois os possíveis valores por ela assumidos são 0 ou 1), mas X e Y (e as funções do Cálculo, em geral) *não são discretas*!
  - De fato, a imagem de X é o conjunto $(0, 1]$, e a imagem de Y é o conjunto $[-1, 1]$, nenhum dos quais é enumerável.

Alguns comentários:

- Na terminologia, uma variável aleatória é *variável* no sentido de que seu valor depende do resultado de um processo/fenômeno subjacente; é *aleatória* no sentido de que esse processo subjacente envolve incerteza.
- Os possíveis valores de uma variável aleatória podem representar os possíveis desfechos de um experimento ainda não executado, ou os possíveis resultados de um experimento ou fenômeno passado mas cujo resultado (já realizado) permanece desconhecido, ou podem ser decorrentes de nosso conhecimento incompleto a respeito de uma quantidade.

Exemplo: funções indicadoras

- Consideremos um dado espaco amostral Ω, e tomemos um evento $E \subseteq \Omega$ qualquer.
- A variável aleatória $\mathbb{I}_E$ definida por

$$\mathbb{I}_E(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in E \\ 0, & \text{se } \omega \notin E \end{cases}$$

  é dita a **função indicadora do evento E.**

Exemplo: funções indicadoras

- **Exemplo**: no espaço amostral

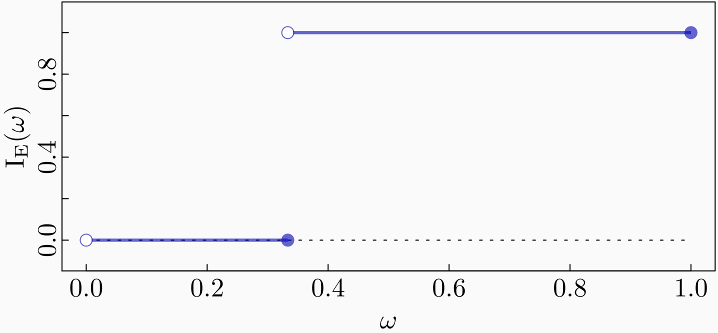
$$\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\},$$

  considere o evento $E = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ\}$ = "**cara** nos dois primeiros lançamentos".
- Nesse caso, $\mathbb{I}_E(\omega) = 1$ se $\omega = \bullet\bullet\bullet$ ou $\omega = \bullet\bullet\circ$, e $\mathbb{I}_E(\omega) = 0$ para os demais valores de ω:

ω	$\bullet\bullet\bullet$	$\bullet\bullet\circ$	$\bullet\circ\bullet$	$\bullet\circ\circ$	$\circ\bullet\bullet$	$\circ\bullet\circ$	$\circ\circ\bullet$	$\circ\circ\circ$
$\mathbb{I}_E(\omega)$	1	1	0	0	0	0	0	0

Exemplo: funções indicadoras

- **Exemplo**: no espaço amostral $\Omega = (0, 1]$ do exemplo anterior, a variável aleatória Z de fato é a função indicadora do evento $E = (^1/_3, 1]$.



- Τύχη!

Uma observação importante

- É preciso ter algum cuidado para distinguir a noção formal de variável aleatória vis-à-vis a noção intuitiva segundo a qual se interpreta como sendo uma variável aleatória o próprio fenômeno que está sendo modelado.
- Por exemplo, é usual considerarmos (em linguagem informal) que são variáveis aleatórias
    - O preço, na bolsa de valores, de uma ação da Microsoft amanhã.
    - A temperatura no centro de Porto Alegre daqui a uma semana.
    - O número de páginas do *De Superstitione* de Sêneca.
    - A sua nota na Prova 2 de Intro à Prob®.
    - O número de manchas nas asas de um espécime de *Callimorpha dominula*.

Uma observação importante

- Na prática, o que propomos é um *modelo probabilístico* para fenômenos como os acima, em que um espaço amostral bem definido está dado, e onde uma variável aleatória é apenas uma função matemática sem qualquer relação material com o fenômeno de interesse[2].

[2] Evidentemente, o que desejamos é que o modelo proposto tenha alguma utilidade (descritiva, preditiva, inferencial, etc) a respeito do fenômeno sendo estudado.

Eventos associados a variáveis aleatórias

- Continuemos com o exemplo de três lançamentos de uma moeda equilibrada e da variável aleatória "número de **caras** observadas".
- Escrevemos, por exemplo, $(X = 2)$ para denotar o *evento*

$$\{\omega\colon\ \omega \in \Omega \text{ e } X(\omega) = 2\}.$$

- Nesse caso, portanto, $(X = 2)$ é o evento

$$(X = 2) \quad = \quad \{\bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \circ\bullet\bullet\}.$$

Eventos associados a variáveis aleatórias

- Mais geralmente: consideremos um dado espaço amostral Ω e uma variável aleatória X definida nesse espaço amostral.
- Se $B \subseteq \mathbb{R}$ é um subconjunto da reta, escrevemos[3]

$$(X \in B) \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega\colon\ \omega \in \Omega \text{ e } X(\omega) \in B\} \tag{1}$$

- Dado um número real x qualquer, também escrevemos, e.g.,

$$(X = x), \qquad (X \leq x), \qquad (X > x),$$

  etc, para designar os *eventos* correspondentes, com as definições semelhantes a eq. (1).
- Por exemplo,

$$(X > x) = \{\omega\colon\ \omega \in \Omega \text{ e } X(\omega) > x\}.$$

[3] Isto é mera notação; você deve ter sempre em mente que ela refere-se a um evento contido no espaço amostral!

Eventos associados a variáveis aleatórias: exemplos

- Consideremos novamente o espaço amostral

$$\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\},$$

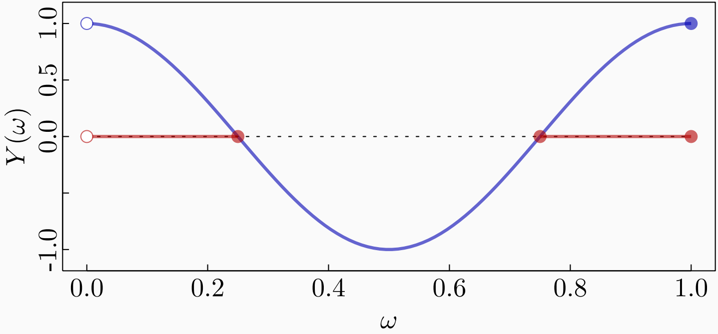
  e a variável aleatória “número de **caras** observadas”.
- Nesse caso, o evento $(X \leq 2)$ corresponde a

$$(X \leq 2) = \{\bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}$$

Eventos associados a variáveis aleatórias: exemplos

- Consideremos novamente o espaço amostral $(0, 1]$ e a variável aleatória $Y(\omega) = \cos(2\pi\omega)$, $0 < \omega \leq 1$.
- Nesse caso o evento $(Y \geq 0)$ corresponde à união dos intervalos $(0, 1/4]$ e $[3/4, 1]$:

$$(Y \geq 0) = (0, 1/4] \cup [3/4, 1]$$



Aula 2

Função de Distribuição Acumulada

Função de Distribuição Acumulada

- Consideremos dados um espaço amostral Ω e uma medida de probabilidade[4] $\mathbb{P}$.
- Se X é uma variável aleatória, definimos sua **Função de Distribuição Acumulada** (FDA) como sendo a função $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X \leq x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

- Essa é uma definição genérica, sendo válida para *qualquer* variável aleatória. Em outras palavras, dados um espaço amostral Ω e uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$, *toda variável aleatória possui uma respectiva função de distribuição acumulada*.

[4] Observe que, até aqui, em nossa discussão sobre variáveis aleatórias não havíamos feito menção a medidas de probabilidade.

FDA: Exemplos

- **Exemplo**: Consideremos novamente o espaço amostral

$$\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\},$$

  e a variável aleatória X = "número de **caras** observadas".
- Apenas para lembrar: nesse caso, podemos sumarizar a variável aleatória X através da seguinte tabela (mas agora vamos acrescentar uma informação concernente à probabilidade dos eventos envolvidos):

ω	$\bullet\bullet\bullet$	$\bullet\bullet\circ$	$\bullet\circ\bullet$	$\bullet\circ\circ$	$\circ\bullet\bullet$	$\circ\bullet\circ$	$\circ\circ\bullet$	$\circ\circ\circ$
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$\mathbb{P}\{\omega\}$	α^3	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta\alpha$	$\alpha\beta^2$	$\beta\alpha^2$	$\beta\alpha\beta$	$\beta^2\alpha$	β^3

  onde $0 \leq \alpha \leq 1$ é interpretado como o *parâmetro de desequilíbrio* (em favor de **cara**) da moeda, e onde $\beta = 1 - \alpha$.

FDA: Exemplos

- Nosso objetivo é calcular a FDA[5] de X.
- Para determinar a regra da função F_X (a FDA de X), precisamos primeiramente especificar os eventos $(X \leq x)$ para cada x real.

[5] Note que a FDA de X vai depender do valor de p. Esse fato é bastante importante: a distribuição de probabilidades de uma variável aleatória não é intrínseca à variável aleatória, mas depende do modelo probabilístico $\mathbb{P}$ sendo utilizado.

FDA: Exemplos

- Lembrando que $(X \leq x)$ denota, por definição, o evento $\{\omega\colon\ \omega \in \Omega \text{ e } X(\omega) \leq x\}$, podemos ver que vale o seguinte esquema:

$$(X \leq x) = \begin{cases} \varnothing, & \text{se } x < 0 \\ \{\circ\circ\circ\}, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \{\bullet\circ\circ, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \Omega \sim \{\bullet\bullet\bullet\}, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ \Omega, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

- **Exercício**: justifique cuidadosamente as igualdades acima.

FDA: Exemplos

- Visto que, por definição, temos $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, se aplicarmos $\mathbb{P}$ nos eventos acima obtemos

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ (1-\alpha)^3, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ (1-\alpha)^3 + 3\alpha(1-\alpha)^2, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ (1-\alpha)^3 + 3\alpha(1-\alpha)^2 + 3\alpha^2(1-\alpha), & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

- **Exercício**: justifique cuidadosamente as igualdades acima.

FDA: Exemplos

- Para dar um exemplo concreto, vamos considerar o caso em que $\alpha = 1/2$, isto é, estamos admitindo que a moeda seja perfeitamente equilibrada:

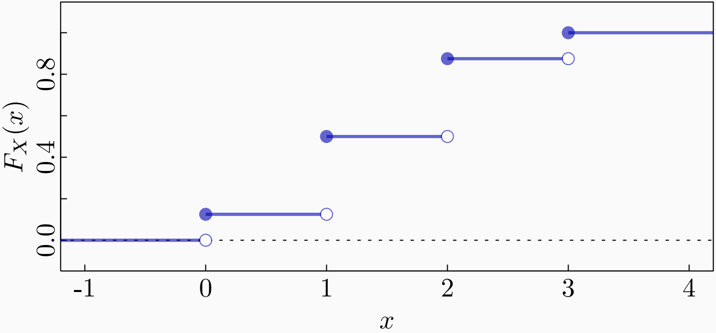
ω	●●●	●●○	●○●	●○○	○●●	○●○	○○●	○○○
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$\mathbb{P}\{\omega\}$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$

- Nesse caso, a regra de F_X se simplifica:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1/8, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 4/8, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 7/8, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

FDA: Exemplos

- O gráfico de F_X está representado na figura abaixo:



FDA: Exemplos

- Consideremos novamente o espaço amostral $(0, 1]$, agora munido da medida de probabilidade $\mathbb{P}$ definida por

$$\mathbb{P}(a, b] = b - a, \qquad 0 < a \leq b \leq 1,$$

  isto é, $\mathbb{P}$ é o modelo correspondente ao sorteio uniforme de um número $\omega \in (0, 1]$.
- Nesse espaço de probabilidade, vamos considerar a variável aleatória

$$X(\omega) = \begin{cases} -\log(1-\omega), & \text{se } 0 < \omega < 1 \\ +\infty, & \text{se } \omega = 1 \end{cases}$$

FDA: Exemplos

- Nesse caso, os eventos $(X \leq x)$, para x real, são facilmente obtidos: como, por definição, temos

$$(X \leq x) = \{\omega \colon \omega \in \Omega \text{ e } -\log(1-\omega) \leq x\},$$

segue que, se $x \leq 0$, então o evento $(X \leq x)$ é vazio, enquanto (por outro lado) se $x > 0$, a condição $-\log(1-\omega) \leq x$ é equivalente a $\omega \leq 1 - e^{-x}$.

- Consequentemente, temos

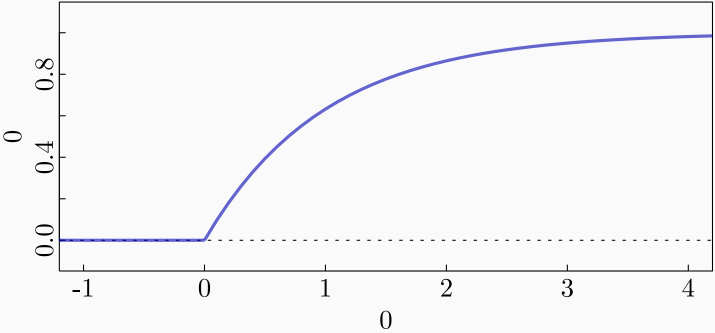
$$(X \leq x) = \begin{cases} \varnothing, & \text{se } x \leq 0 \\ (0, 1 - e^{-x}], & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

FDA: Exemplos

- Ainda, como $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ e, pela definição dada, $\mathbb{P}(a, b] = b - a$, obtemos

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- A figura abaixo ilustra a função F_X:

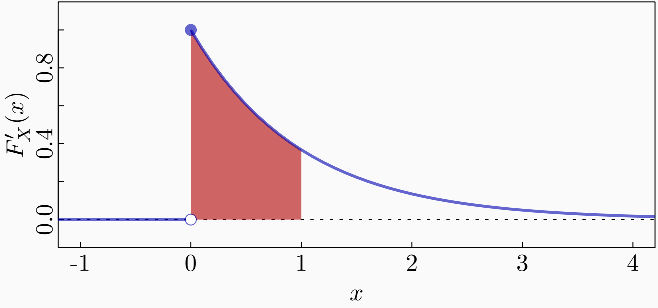


FDA: Exemplos

- Note que, nesse caso, a função F_X é derivável (exceto no ponto $x = 0$), com

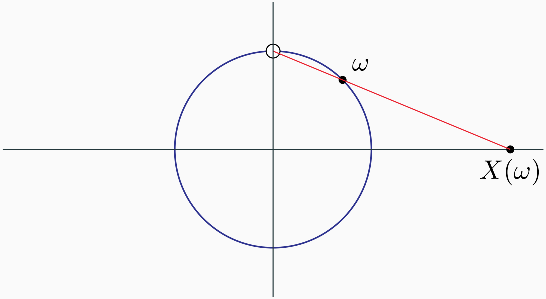
$$F'_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ e^{-x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- Por conveniência, vamos arbitrar que $F'_X(0) = 1$. O gráfico abaixo ilustra a função F'_X (em azul), bem como a probabilidade $\mathbb{P}(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} F'_X(x)\,\mathrm{d}x$ (área em vermelho).



Aula 3

Aula 4


ω
$X(\omega)$

Aula 5

Propriedades da FDA

- Considere uma variável aleatória X, e seja F_X sua função de distribuição acumulada. Então valem as seguintes propriedades:

1. $F_X(x) \leq F_X(y)$ sempre que $x \leq y$;
   - (FDAs são não-decrescentes)
2. $\lim_{h \downarrow 0} F_X(x+h) = F_X(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$;
   - (FDAs são contínuas à direita)
3. $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$;
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$;
5. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, para quaisquer reais $a \leq b$.

Função Massa de Probabilidade

Função Massa de Probabilidade

- Considere uma variável aleatória discreta X em um espaço amostral Ω, este por sua vez munido de uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$.
- Definimos a **função massa de probabilidade (FMP) de** X como sendo a função $p_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$p_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X = x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Função Massa de Probabilidade

- Pela definição de variável aleatória discreta, existe um subconjunto enumerável $S_X \subseteq \mathbb{R}$, digamos $S_X = \{a_1, a_2, \ldots\}$, dito o *conjunto de possíveis valores assumidos por* X, tal que, qualquer que seja o resultado ω do experimento, tem-se que o valor $X(\omega)$ assumido por X é igual a um dos a_j's pertencentes a S.
- Isto é, se X é variável aleatória discreta com conjunto de possíveis valores $S_X \subseteq \mathbb{R}$, então vale que $X(\omega) \in S_X$ para todo $\omega \in \Omega$.

Função Massa de Probabilidade

- Nas condições acima, vemos que a função massa de probabilidade de X é da forma

$$p_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x), & \text{se } x \in S_X, \\ 0, & \text{se } x \notin S_X. \end{cases}$$

- Evidentemente, a especificação acima é redundante, pois $\mathbb{P}(X = x) = 0$ quando $x \notin S_X$, mas de qualquer forma ela ilustra o fato de que a função massa de probabilidade só pode ser positiva em alguns pontos do seu domínio (a saber, em S_X).
- Em vista disso, em algumas circunstâncias é conveniente considerar que o domínio da função massa de probabilidade é o conjunto S_X de possíveis valores assumidos por X, e não a reta.
- Na maior parte dos exemplos tem-se S_X como um subconjunto de $\mathbb{Z}$.

FMP: Exemplos

- **Exemplo**: Consideremos novamente o espaço amostral

$$\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\},$$

  e a variável aleatória X = "número de **caras** observadas".
- Apenas para lembrar: nesse caso, podemos sumarizar a variável aleatória X através da seguinte tabela:

ω	$\bullet\bullet\bullet$	$\bullet\bullet\circ$	$\bullet\circ\bullet$	$\bullet\circ\circ$	$\circ\bullet\bullet$	$\circ\bullet\circ$	$\circ\circ\bullet$	$\circ\circ\circ$
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$\mathbb{P}\{\omega\}$	α^3	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta\alpha$	$\alpha\beta^2$	$\beta\alpha^2$	$\beta\alpha\beta$	$\beta^2\alpha$	β^3

  onde $0 \leq \alpha \leq 1$ é interpretado como o *parâmetro de desequilíbrio* (em favor de **cara**) da moeda, e onde $\beta = 1 - \alpha$.

FMP: Exemplos

- Nosso objetivo é calcular a FMP de X.
- Para determinar a regra da função p_X (a FMP de X), precisamos primeiramente especificar os eventos $(X = x)$ para cada x real.
- Nesse caso, vemos que S_X é o conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, isto é, o número de **caras** em três lançamentos de uma moeda necessariamente assume um dos valores 0 ou 1 ou 2 ou 3.

FMP: Exemplos

- Lembrando que $(X = x)$ denota, por definição, o **evento** $\{\omega \colon \omega \in \Omega \text{ e } X(\omega) = x\}$, podemos ver que vale o seguinte esquema:

$$(X = x) = \begin{cases} \varnothing, & \text{se } x \notin S_X \\ \{\circ\circ\circ\}, & \text{se } x = 0 \\ \{\bullet\circ\circ, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet\}, & \text{se } x = 1 \\ \{\bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \circ\bullet\bullet\}, & \text{se } x = 2 \\ \{\bullet\bullet\bullet\}, & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

- **Exercício**: justifique cuidadosamente as igualdades acima.

FMP: Exemplos

- Segue que, aplicando $\mathbb{P}$ nos eventos acima, obtemos

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin S_X \\ (1-\alpha)^3, & \text{se } x = 0 \\ 3\alpha(1-\alpha)^2, & \text{se } x = 1 \\ 3\alpha^2(1-\alpha), & \text{se } x = 2 \\ \alpha^3, & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

- **Exercício**: justifique cuidadosamente as igualdades acima.

FMP: Exemplos

- Para dar um exemplo concreto, vamos considerar o caso em que $\alpha = {}^1\!/_2$, isto é, estamos admitindo que a moeda seja perfeitamente equilibrada:

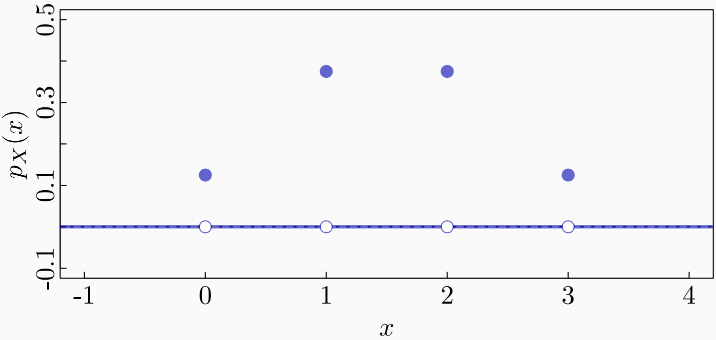
ω	●●●	●●○	●○●	●○○	○●●	○●○	○○●	○○○
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0
$\mathbb{P}\{\omega\}$	${}^1\!/_8$	${}^1\!/_8$	${}^1\!/_8$	${}^1\!/_8$	${}^1\!/_8$	${}^1\!/_8$	${}^1\!/_8$	${}^1\!/_8$

- Nesse caso, a regra de p_X se simplifica:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin S_X \\ {}^1\!/_8, & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 3 \\ {}^3\!/_8, & \text{se } x = 1 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$$

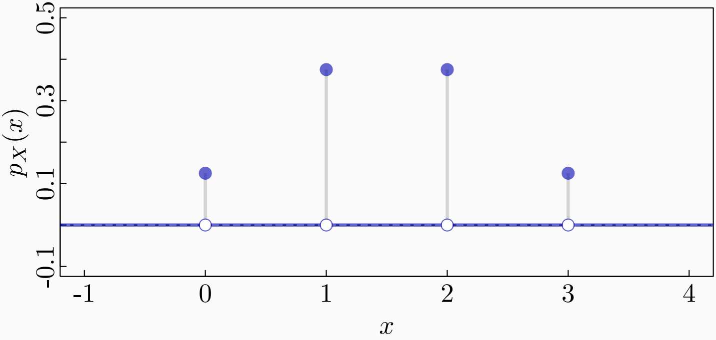
FMP: Exemplos

- O gráfico de p_X está representado na figura abaixo:



FMP: Exemplos

- Em alguns casos, é costumeiro acrescentarem-se ao gráfico barras verticais indicando os pontos de massa positiva de X:



Relação entre a FMP e a FDA

- Se X é uma variável aleatória discreta com função de distribuição acumulada F_X e função massa de probabilidade p_X, então vemos que vale a relação

$$F_X(x) = \sum_{\substack{u \in S_X, \\ u \leq x}} p_X(u)$$

onde o somatório acima percorre todos os números reais u tais que $u \in S_X$ e $u \leq x$.

Relação entre a FMP e a FDA

- Para ilustrar: tomando $x = 2.3$ no exemplo anterior, temos $F_X(x) = p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) = 1/8 + 3/8 + 3/8$.