Intro à Probabilidade

Eduardo Horta

Apresentação

Introdução à Probabilidade - MAT02020 - U (19/1)

Prof. Eduardo Horta

e-mail: eduardo.horta@ufrgs.br

(Favor não compartilhar esse material. Solicite a versão atualizada por email para o autor)

Recomendações gerais

- Estudem todos os dias, desde o primeiro dia!
- Aprendam inglês!
- Baixem o R hoje!

Recomendações Gerais 2: Notação é importante!

- X, Y, Z não é a mesma coisa que x, y, z: é importante distinguir maiúsculas e minúsculas!
- Alfabeto grego: α, β, $\gamma\dots$
  https://pt.wikipedia.org/wiki/Alfabeto_grego

Uma citação legal

- “Probabilities permeate our lives: they show up in weather reports, science, popular reports of science, predictions about election results, chances for surviving diseases, prices on futures markets, and, of course, in casinos.” (Childers, 2013)

Aula 1

Aleatoriedade, variabilidade e incerteza

- Probabilidade e aleatoriedade (variabilidade/incerteza) são conceitos distintos, embora próximos.
- Antes de falar em *probabilidade*, é importante caracterizar o tipo de fenômeno que ela estará interessada em abordar.
- Podemos esquematizar os fenômenos em dois tipos: *determinísticos* e *aletórios*.

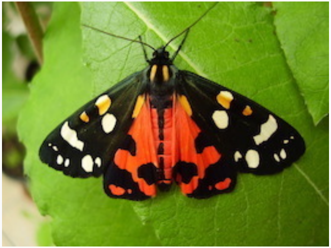
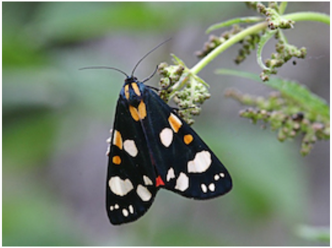
Fenômenos determinísticos

Exemplos

- Mecânica Clássica (Física)

Exemplos

- Resultado do lançamento de uma moeda
- Coloração das manchas em mariposas da espécie *Callimorpha dominula*.

- Posição de um elétron em um experimento de dupla fenda.
- Condições climáticas de amanhã.

Aleatoriedade, variabilidade e incerteza

- Certos fenômenos possuem a característica de que, dadas condições semelhantes (ou mesmo “idênticas”), observa-se um resultado (desfecho) variável ou imprevisível.
- Essa propriedade pode ser entendida como intrínseca ao fenômeno (objetiva) ou como epistêmica (isto é, relacionada a nosso desconhecimento/incerteza sobre as causas que geram a variabilidade de desfechos).

Aleatoriedade, variabilidade e incerteza

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos.

Experimentos aleatórios

- Na teoria da Probabilidade, um *experimento* (aleatório) é compreendido em sentido lato.
- Qualquer fenômeno cujo desfecho[1] é desconhecido pode ser considerado um experimento aleatório.
- Em particular, nossa noção de experimento aleatório engloba tanto estudos observacionais quanto experimentais.
- Mais geralmente, qualquer situação que envolva incerteza (parcial ou total) pode ser entendida como um experimento aleatório.
- Embora o resultado observacional não seja conhecido de antemão, assume-se que esse resultado será um dentre uma coleção conhecida de possíveis resultados.

[1] Os termos *desfecho* e *resultado* são comumente usados, mas em alguns contextos são inadequados, pois induzem a uma interpretação de que só o futuro pode ser desconhecido.

Espaço amostral

- Chamamos de **espaço amostral** ao conjunto formado por todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Usualmente o espaço amostral é denotado pela letra grega Ω (ômega maiúsculo).

Exemplo

- Experimento: lançar uma moeda e anotar a face superior.
- Possíveis resultados: cara (•) e coroa (∘).
- Espaço amostral: $\Omega = \{\bullet, \circ\}$.

Exemplo

- Experimento: lançar uma moeda três vezes consecutivas, anotando a face superior em cada lançamento.
- Possíveis resultados: “cara, cara, cara”, “cara, cara, coroa”, “cara, coroa, cara”, “cara, coroa, coroa”; “coroa, cara, cara”, “coroa, cara, coroa”, “coroa, coroa, cara” e “coroa, coroa, coroa”.
- Espaço amostral: $\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}$.

Exemplo

- Experimento: lançar uma moeda 10 vezes consecutivas, anotando a face superior em cada lançamento.
- Possíveis resultados: "strings" de comprimento 10 contendo quaisquer combinações dos símbolos $\bullet$ e $\circ$.
- Espaço amostral: $\Omega = \ldots$ boa sorte! (esse espaço amostral possui 1024 elementos)

Eventos aleatórios

- Chamamos de **evento aleatório** (ou, simplesmente, **evento**) a qualquer subconjunto do espaço amostral.
- **Evento elementar**: é cada um dos resultados (indivisíveis) do experimento aleatório (ou seja, cada elemento de Ω).
- **Evento composto**: é uma coleção de um ou mais[2] elementos de Ω.

[2] Por conveniência, vamos admitir que o conjunto vazio $\varnothing$ é, também, um evento composto.

Exemplo (continuação)

- Experimento: lançar uma moeda três vezes consecutivas, anotando a face superior em cada lançamento.
- Espaço amostral: $\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}$.
- O evento $\bullet\bullet\circ$ é um evento elementar.
- O evento $\{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ\}$ é um evento composto e corresponde ao evento "*cara* no primeiro lançamento".
- **Exercício**: seja A o evento "duas ou mais *caras* nos três lançamentos". Escreva A em termos de um subconjunto de Ω.

Combinação de eventos. Propriedades da combinação de eventos, eventos disjuntos, complemento, união e intersecção de eventos.

Combinações de eventos

- **União de eventos**: Se A e B são eventos, denotamos por $A \cup B$ ao evento correspondente à ocorrência de *pelo menos* um dos eventos A ou B. Assim, $A \cup B$ é constituído pelos eventos elementares que pertencem ou a A, ou a B, ou a ambos.

Exemplo (continuação, união de eventos)

- Experimento: lançar uma moeda três vezes consecutivas, anotando a face superior em cada lançamento.
- Espaço amostral: $\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}$.
- Seja A o evento "*cara* no primeiro lançamento", isto é, $A = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ\}$, e seja B o evento "ocorrência de duas ou mais *coroas* consecutivas", ou seja, $B = \{\bullet\circ\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}$
- Então $A \cup B = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}$. Note que o evento elementar $\bullet\circ\circ$ pertence tanto a A quanto a B.

Combinações de eventos

- **Intersecção de eventos**: Se A e B são eventos, denotamos por $A \cap B$ ao evento correspondente à ocorrência concomitante dos eventos A e B. Assim, $A \cap B$ é constituído pelos eventos elementares que pertencem tanto a A quanto a B.

Exemplo (continuação, intersecção de eventos)

- Experimento: lançar uma moeda três vezes consecutivas, anotando a face superior em cada lançamento.
- Espaço amostral: $\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}$.
- Seja A o evento "ocorrência de exatamente uma *cara* nos três lançamentos", isto é, $A = \{\bullet\circ\circ, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet\}$, e seja B o evento "ocorrência de duas ou mais *coroas* consecutivas", ou seja, $B = \{\bullet\circ\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}$
- Então $A \cap B = \{\bullet\circ\circ, \circ\circ\bullet\}$.

Aula 2

Relações entre eventos

- Dizemos que **a ocorrência do evento A implica a ocorrência do evento B**, e escrevemos $A \subseteq B$, se todo elemento de A é também elemento de B.
- Nas mesmas condiçõs, também dizemos que **a ocorrência do evento B é implicada pela ocorrência do evento A**, e escrevemos $B \supseteq A$.

Exemplo (continuação, relações entre eventos)

- Experimento: lançar uma moeda três vezes consecutivas, anotando a face superior em cada lançamento.
- Espaço amostral: $\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}$.
- Seja B o evento "ocorrência de duas ou mais *coroas* consecutivas", ou seja, $B = \{\bullet\circ\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}$, e seja A o evento "ocorrência de duas *coroas* consecutivas e ao menos uma *cara*", isto é, $A = \{\bullet\circ\circ, \circ\circ\bullet\}$.
- Claramente temos $A \subseteq B$.

Complementar de um evento

- Se A é um evento aleatório, então definimos o **evento complementar a** A, denotado por $A^{\complement}$, como sendo aquele evento constituído de todos os eventos elementares que não pertencem a A.
- Se A e B são eventos, então definimos o evento A **menos** B, denotado por $A \sim B$, pela igualdade $A \sim B = A \cap B^{\complement}$.
- Observe que, pelas definições acima, sempre vale que $A^{\complement} = \Omega \sim A$.

Exemplo (continuação, relações entre eventos)

- Experimento: lançar uma moeda três vezes consecutivas, anotando a face superior em cada lançamento.
- Espaço amostral: $\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}$.
- Seja A o evento "ocorrência de duas ou mais *coroas* consecutivas", ou seja, $A = \{\bullet\circ\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}$, e seja B o evento "ocorrência de três *coroas* consecutivas", isto é, $B = \{\circ\circ\circ\}$.

Exemplo (continuação, relações entre eventos)

- Nesse caso, temos que $A^{\complement} = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ\}$. Em palavras, A = "não ocorrência de duas ou mais *coroas* consecutivas".
- O evento $A \sim B$ é descrito pela condição "ocorrência de duas ou mais *coroas* consecutivas e não ocorrência de três *coroas* consecutivas". Logo, $A \sim B = \{\bullet\circ\circ, \circ\circ\bullet\}$.

Eventos mutuamente excludentes

- Dizemos que dois eventos A e B são **mutuamente excludentes** se eles não possuem elementos em comum, isto é, se $A \cap B = \varnothing$ (onde $\varnothing$ denota o **conjunto vazio**, isto é, o conjunto que não possui elementos).
- No exemplo acima, os eventos A = "*cara* no primeiro lançamento" e B = "coroa no primeiro lançamento" são mutuamente excludentes.

Mais algumas notações

- Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são n eventos quaisquer, definimos a sua **união** $\bigcup_{i=1}^n A_i$ por

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

- Semelhantemente, definimos sua **intersecção** $\bigcap_{i=1}^n A_i$ por

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Mais algumas notações

- Essas notações podem ser compreendidas indutivamente: por exemplo, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$, etc.
- Continuando o exemplo anterior: sejam A_1, A_2 e A_3 os eventos definidos, respectivamente, pelas condições "*cara* nos dois primeiros lançamentos", "*cara* no primeiro e terceiro lançamentos" e "*cara* nos dois últimos lançamentos".
- Temos $A_1 = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ\}$, $A_2 = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\circ\bullet\}$ e $A_3 = \{\bullet\bullet\bullet, \circ\bullet\bullet\}$.
- **Exercício**: determine $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{3} A_i$.

Probabilidade

Probabilidade de eventos

- Para cada evento $E \subseteq \Omega$, gostaríamos de atribuir um número $\mathbb{P}(E)$, chamado a $\mathbb{P}$**-probabilidade de** E. Será interessante impormos as seguintes condições:

Axiomas da Probabilidade

- (A1) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$, para qualquer evento E.
- (A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- (A3) Se E_1 e E_2 são eventos mutuamente excludentes, então $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2)$.

Interpretações da probabilidade

- Antes de prosseguirmos, será interessante nos indagarmos sobre como podemos interpretar sentenças do tipo “a $\mathbb{P}$-probabilidade de observarmos ao menos duas *caras* em três lançamentos de uma moeda é igual a $\mathbb{P}\{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet\}$”.
- Importante: não há um consenso! (sobre qual a interpretação “correta”)

Um pouco de história: interpretação clássica

- Historicamente, a Teoria da Probabilidade iniciou seu desenvolvimento como um ramo da Matemática a partir de uma troca de correspondências entre Pascal e Fermat a respeito de problemas relacionados a jogos de azar.
- Esse desenvolvimento inicial culminou na **interpretação clássica** da probabilidade, devida principalmente a J. Bernoulli e P. Laplace:

Um pouco de história: interpretação clássica

"La théorie des hasards consiste à réduire tous les évènemens du même genre, à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'évènement dont on cherche la probabilité. Le rapport de ce nombre à celui de tous les cas possibles, est la mesure de cette probabilité qui n'est ainsi qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles." (Laplace[3], 1814)

[3] https://fr.wikisource.org/wiki/Essai_philosophique_sur_les_probabilités

Um pouco de história: interpretação clássica

"A teoria da *chance* consite em reduzir todos os eventos de mesmo tipo a um certo número de casos igualmente possíveis, quer dizer, de tal forma que estejamos igualmente indecisos quanto à sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao evento cuja probabilidade se procura saber. A razão entre esse número e o número total de casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é, portanto, simplesmente uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número total de casos possíveis." (Laplace, 1814)

Exemplo (continuação)

- Experimento: lançar uma moeda três vezes consecutivas, anotando a face superior em cada lançamento.
- Espaço amostral: $\Omega = \{\bullet\bullet\bullet, \bullet\bullet\circ, \bullet\circ\bullet, \bullet\circ\circ, \circ\bullet\bullet, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet, \circ\circ\circ\}$.
- Seja A o evento "ocorrência de exatamente uma *cara* nos três lançamentos", isto é, $A = \{\bullet\circ\circ, \circ\bullet\circ, \circ\circ\bullet\}$.
- **Exercício**: Utilizando a definição clássica, obtenha $\mathbb{P}(A)$.

Interpretação subjetivista

- Uma segunda interpretação de probabilidade é a chamada **interpretação subjetivista**, a qual afirma que probabilidades como $\mathbb{P}(E)$ referem-se a graus de confiança (*degrees of belief*) subjetivos.
- Nesse contexto, não faz sentido falar em um valor "correto" de $\mathbb{P}(E)$, visto que cada indivíduo atribui um valor numérico correspondendo a suas crenças subjetivas sobre a verossimilhança do evento E.
- Algumas intepretações subjetivistas são irrestritas quanto à atribuição de probabilidades pessoais pelos indivíduos; outras exigem algum tipo de coerência (por exemplo, somente admitindo probabilidades subjetivas que satisfaçam os axiomas A1, A2 e A3 discutidos acima).

Interpretação frequentista

- As duas interpretações acima são *epistêmicas*, no sentido de que afirmam que a probabilidade de um evento não é uma qualidade objetiva do fenômeno em consideração, mas sim um aspecto do nosso grau de conhecimento sobre o fenômeno.
- Alternativamente, a **interpretação frequentista** considera que a probabilidade $\mathbb{P}(E)$ de um evento E possui um caráter objetivo, isto é, é uma propriedade material do fenômeno sob consideração.
- A interpretação frequentista afirma que a probabilidade de um evento é o limite das frequências relativas em repetições independentes do experimento aleatório.

Interpretação frequentista

- Seja E um evento associado a um experimento aleatório qualquer. Consideremos n repetições independentes desse experimento, e vamos escrever $F(n)$ para denotar o número de ocorrências do evento E nessas n repetições do experimento.
- Segundo a interpretação frequentista, vale que

$$\mathbb{P}(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{F(n)}{n}$$

Aula 3

Sumário de interpretações

https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_interpretations

Probabilidade axiomática

Probabilidade axiomática

- Os aspectos matemáticos da Teoria da Probabilidade podem ser desenvolvidos de maneira inteiramente rigorosa e independente de qualquer interpretação.
- Diversas axiomatizações existem, mas pode-se afirmar que o sistema axiomático introduzido por **Andrey Kolmogorov** em 1933 é o mais amplamente utilizado por probabilistas, estatísticos e cientistas em geral.
- A sistematização proposta por Kolmogorov utiliza conceitos introduzidos anteriormente por Richard von Mises (por exemplo, a noção de *espaço amostral*), mas do ponto de vista matemático os axiomas de Kolmogorov situam-se dentro de uma área conhecida como *Teoria da Medida*, a qual dá sentido e generalidade a noções como *comprimento*, *área*, *volume*, etc.
- Esse aspecto da axiomatização proposta por Kolmogorov incidentalmente permite que a intuição geométrica auxilie na compreensão e resolução de problemas probabilísticos.

Probabilidade axiomática

- Considera-se dado um espaço amostral, usualmente denotado pela letra grega Ω, o qual pode ser constituído de uma quantidade finita ou infinita de elementos (eventos elementares).
- Consideremos primeiramente o caso em que Ω é finito. Dizemos que uma função $\mathbb{P}$ (cujo domínio é a coleção dos eventos compostos de Ω e cujo contradomínio é a reta) é uma **medida de probabilidade** em Ω se essa função satisfizer as seguintes propriedades:

Axiomas da Probabilidade (Ω finito)

- (A1) $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$, para qualquer evento E.
- (A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- (A3) Se E_1 e E_2 são eventos mutuamente excludentes, então

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2).$$

Exemplo

- Consideremos o seguinte experimento: lançar uma moeda duas vezes consecutivas, anotando a face superior em cada lançamento.
- Possíveis resultados: “cara, cara”, “cara, coroa”, “coroa, cara”, “coroa, coroa”.
- Espaço amostral: $\Omega = \{\bullet\bullet, \bullet\circ, \circ\bullet, \circ\circ\}$.
- Associados a este espaço amostral, temos 16 possíveis eventos compostos; por exemplo

$$\varnothing, \qquad \{\bullet\bullet\}, \qquad \{\bullet\circ,\ \circ\circ\}, \qquad \{\bullet\bullet, \bullet\circ, \circ\circ\}$$

  etc.

Exemplo (continuação)

- A ideia será atribuir, a cada um desses 16 eventos, um valor numérico (a ser interpretado como sendo sua *probabilidade de ocorrência*).
- **Importante**: em geral, não há uma única maneira de se atribuir probabilidades a eventos e, em particular, não há uma maneira “correta” de se fazer essa atribuição.
- A unica restrição que a abordagem axiomática nos impõe é que devemos respeitar os 3 axiomas (A1), (A2) e (A3).

Exemplo (continuação)

- Considere agora 4 números reais, digamos p_1, p_2, p_3 e p_4, pertencentes ao intervalo unitário (isto é, tais que $0 \leq p_i \leq 1$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$) satisfazendo a condição de que

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

- **Exercício**: vamos *definir*

$$\mathbb{P}\{\bullet\bullet\} = p_1, \quad \mathbb{P}\{\bullet\circ\} = p_2, \quad \mathbb{P}\{\circ\bullet\} = p_3, \quad \mathbb{P}\{\circ\circ\} = p_4$$

- **Verifique** que, utilizando o axioma (A3), podemos obter de maneira única uma medida de probabilidade definida para cada evento composto de Ω.

Probabilidade axiomática (caso geral)

- No caso em que Ω é um conjunto infinito (isto é, existe uma infinidade de possíveis resultados do experimento aleatório em questão), algumas dificuldades aparecem.
- Primeiramente: por razões técnicas, nesse cenário nem sempre podemos considerar que todo subconjunto do espaço amostral é um evento.
- Para acomodar essa restrição, assume-se que os eventos associados ao experimento formam uma coleção $\mathscr{F}$ (tecnicamente chamada uma σ-álgebra de eventos de Ω).
- Nesse contexto, escrevemos $E \in \mathscr{F}$ simplesmente como uma forma resumida de se dizer que E *é* um evento (semelhantemente, $E \notin \mathscr{F}$ significa que E *não é* um evento).

Probabilidade axiomática (caso geral)

- Essa parte da axiomatização é um tanto sofisticada: você não precisa se preocupar muito com isso por enquanto.
- Apenas tenha em mente que, em geral, um subconjunto $E \subseteq \Omega$ pode ou não ser um evento. Quando for, escrevemos $E \in \mathscr{F}$.
- No jargão de Teoria da Probabilidade, a coleção $\mathscr{F}$ é dita uma σ-álgebra de eventos de Ω.

Probabilidade axiomática (caso geral)

- Assumimos que sempre vale o seguinte:

Axiomas da σ-álgebra

- (S1) $\varnothing \in \mathscr{F}$ (o conjunto vazio é um evento).
- (S2) se $E \in \mathscr{F}$, então $E^{\complement} \in \mathscr{F}$ (o complementar de um evento é também um evento).
- (S3) Se $E_1, E_2, \ldots$ é uma sequência de eventos dois-a-dois mutuamente excludentes, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ é também um evento.

Um parêntese: uniões e intersecções infinitas

- Conforme visto anteriormente, as notações $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ podem ser entendidas indutivamente
- Por exemplo, o conjunto $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ é obtido tomando-se primeiramente a união de A_1 com A_2 para obter-se o conjunto $A_1 \cup A_2$ e, após, tomando-se a união deste com A_3.
- No caso em que temos uma sequência infinita de conjuntos, digamos $A_1, A_2, \ldots$, esse raciocínio indutivo não funciona.

Um parêntese: uniões e intersecções infinitas

União de uma sequência infinita de eventos

- Se $A_1, A_2, \ldots$ é uma sequência de eventos, o conjunto $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ é definido pela seguinte condição:
  ω pertence ao conjunto $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ se, e somente se, ω pertence a ***pelo menos um*** *dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots$.*

Intersecção de uma sequência infinita de eventos

- Se $A_1, A_2, \ldots$ é uma sequência de eventos, o conjunto $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ é definido pela seguinte condição:
  *ω pertence ao conjunto $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ se, e somente se, ω pertence a **todos** os conjuntos $A_1, A_2, \ldots$.*

Espaço amostral infinito: um exemplo

- Consideremos o seguinte experimento: lançar uma moeda sucessivamente até o aparecimento da primeira *cara* e, então, parar.
- Supondo que estamos interessados nas sequências obtidas, os possíveis resultados desse experimento são os seguintes: $\bullet$, $\circ\bullet$, $\circ \circ \bullet$, e assim por diante.
- Nesse exemplo específico, cada sequência de lançamentos pode ser codificada (sem ambiguidades) por um número inteiro n, que interpretaremos como o "número de lançamentos até observarmos a primeira *cara*".
- Assim, o resultado $\bullet$ corresponde a $n = 1$, o resultado $\circ \circ \circ \circ \bullet$ corresponde a $n = 5$, etc.

Espaço amostral infinito: um exemplo

- Fica claro que, nesse experimento, o conjunto dos possíveis resultados corresponde ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais (possivelmente acrescido de um elemento, a saber, a “string” infinita $\circ \circ \circ \cdots$ formada apenas por *coroas*).
- Assim, temos $\Omega = \{\triangleleft, 1, 2, 3, \dots\}$, onde $\triangleleft$ denota a “string” infinita formada apenas por *coroas*.

Espaço amostral infinito: um exemplo

- Conside agora os eventos definidos, para cada $n \in \mathbb{N}$, da seguinte forma: A_n é o subconjunto dos números naturais maiores ou iguais a 2^{n-1} e menores do que $2^n - 1$.
- Assim, temos por exemplo $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{4, 5, 6, 7\}$, $\ldots$, $A_4 = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, etc.
- **Exercício**: você consegue explicitar o evento A_8?
- **Exercício**: verifique se a sequência A_1, A_2, $\ldots$ é formada por eventos dois-a-dois mutuamente excludentes (isto é, para cada par de números naturais distintos, digamos n e m com $n \neq m$, verifique se $A_n \cap A_m = \varnothing$).
- **Exercício**: explicite os eventos $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Aula 4

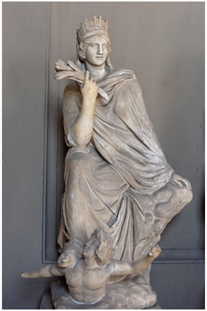
Um detour: conjuntos infinitos

- Existem diferentes ordens de infinitude.
- Ao quadro!

Mais um pouco de intuição e terminologia

- Eis uma maneira interessante de interpretar a relação entre um experimento aleatório e o espaço amostral correspondente:
- Consideremos um espaço amostral Ω, isto é, os elementos de Ω representam os *possíveis* desfechos/resultados de um experimento aleatório.
- Podemos interpretar, em um primeiro momento, cada elemento (evento elementar) $\omega \in \Omega$ como meramente potencial, isto é, algo que *pode* acontecer.

$\mathrm{T\acute{\upsilon}\chi\eta}$ intervém



- Quando efetivamente realizamos o experimento, $\mathrm{T\acute{\upsilon}\chi\eta}$ (a Deusa grega da fortuna/sorte) escolhe um, e apenas um, resultado $\omega^{\text{realizado}}$ dentre os potenciais desfechos $\omega \in \Omega$.

Linguagem sobre eventos

- Nesse contexto, dado um evento $E \subseteq \Omega$, então

$$\omega^{\text{realizado}} \in E$$

  corresponde a “**ocorrência do evento** E”.
- Similarmente,

$$\omega^{\text{realizado}} \notin E$$

  corresponde a “**não ocorrência do evento** E”.
- Evidentemente, o superscrito $^{\text{realizado}}$ é mero adorno e pode (deve!) ser omitido uma vez que tenhamos capturado a intuição trazida por essa heurística.

Exemplo

- Consideremos o experimento que consiste em lançar, uma única vez, um dado de 6 faces e anotar a face superior resultante do lançamento.
- Aqui, uma possível especificação para o espaço amostral é considerar $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- De acordo com a heurística acima, cada um dos elementos de Ω (por exemplo, $\omega = 1$) é apenas um *potencial* desfecho do lançamento do dado.
- Seja E o evento "o resultado do lançamento é um número par", isto é, $E = \{2, 4, 6\}$.

Exemplo

- Importante: o evento E não representa “2 e depois 4 e depois 6” (afinal, só lançamos o dado uma vez), mas sim “ou 2 ou 4 ou 6”.
- Digamos que lançamos o dado e $\mathrm{T}\acute{\upsilon}\chi\eta$ selecionou $\omega^{\text{realizado}} = 4$.
- Nesse caso, podemos dizer que “o evento E ocorreu” e que “o evento $E^{\complement}$ não ocorreu”.
- Remark: cuidado com os tempos verbais, pois estritamente falando eles não fazem sentido nenhum dentro do esquema de teoria dos conjuntos.

Mais alguns exemplos de espaços amostrais infinitos

Exemplo

- Considere o seguinte experimento: escolher, “ao acaso”, um número real maior ou igual a zero e menor ou igual a 1.
- Nesse caso, pela própria descrição do experimento, os possíveis resultados são quaisquer números pertencentes ao intervalo unitário:

$$\Omega = \{\omega\colon\ \omega \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \leq \omega \leq 1\} = [0, 1]$$

- (Caso você não esteja acostumado com a notação utilizada para definir conjuntos a partir de propriedades: a notação $A = \{x\colon\ \mathrm{Q}(x)\}$ deve ser lida assim: “A é o conjunto cujo elemento típico, digamos x, é tal que determinada propriedade $\mathrm{Q}(x)$ se verifica”, ou ainda “A é o conjunto dos x tais que a propriedade $\mathrm{Q}(x)$ é verdadeira”.)

Exemplo

- Considere o seguinte experimento: escolher, ao acaso, um ponto (no plano) pertencente ao disco de raio 1.
- Nesse caso, temos

$$\Omega = \{(x, y) \colon\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- (Lê-se "Ω é o conjunto de pares ordenados pertencentes ao plano cujo comprimento é menor ou igual a 1").
- **Exercício**: represente graficamente o espaço amostral Ω considerado acima. Como você representaria os eventos $E_1 = \{(x, y) \colon\ (x, y) \in \Omega \text{ e } x > 0\}$ e $E_2 = \{(x, y) \colon\ (x, y) \in \Omega \text{ e } x > y\}$?

Exemplo

- Considere o seguinte experimento: acender uma lâmpada e cronometrar seu tempo de duração (utilizando um relógio quântico, de preferência).
- Fisicamente, qualquer instrumento de medida tem precisão finita. Em termos de cronômetros, isso significa que, mesmo que o tempo seja contínuo, só podemos medi-lo até uma certa resolução (por exemplo, segundos, microsegundos, nanosegundos, etc).
- Apesar dessa dificuldade, é conveniente ignorar a natureza discreta do instrumento de mensuração e considerar que a natureza do fenômeno sendo estudado (no caso, tempo) é contínua.

Exemplo

- Assim, o tempo de duração de uma lâmpada deverá ser representado por um número real positivo, correspondente ao *tempo decorrido entre o momento em que a lâmpada foi acesa e o momento em que essa lâmpada queimou*.
- Uma possibilidade é considerarmos

$$\Omega = \{x\colon\ x \in \mathbb{R} \text{ e } x \geq 0\} = [0, +\infty)$$