Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física
Departamento de Física
Professor: ***Rudi Gaelzer***
Disciplina: ***Mecânica Clássica II***
Cursos: ***Bacharelados em Física***

Lista de Exercícios 5 – Oscilações Acopladas

1) Uma partícula de massa m se move sobre o semi-eixo $x>0$ com energia potencial

$$U(x)=U_0\left(e^{-kx}+Cx\right),\quad (\{U_0,k,C\}>0).$$

(a) Determine para que valores das constantes existem posições de equilíbrio e determine a estabilidade desses pontos.

(b) Encontre as frequências de oscilações de pequena amplitude em torno dos pontos de equilíbrio estável.

---

2) Uma partícula de massa m se move sobre o eixo x com energia potencial

$$U(x)=V\cos\alpha x-Fx.$$

(a) Determine para que valores das constantes existem posições de equilíbrio e determine a estabilidade desses pontos.

(b) Encontre as frequências de oscilações de pequena amplitude em torno dos pontos de equilíbrio estável.

---

3) Uma partícula de massa m se move sobre o eixo x com energia potencial

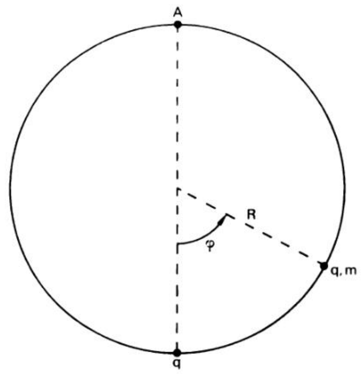
$$U(x)=V\left(\alpha^2x^2-\frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\alpha x\right).$$

(a) Determine para que valores das constantes existem posições de equilíbrio e determine a estabilidade desses pontos.

(b) Encontre as frequências de oscilações de pequena amplitude em torno dos pontos de equilíbrio estável.

---

4) Uma carga pontual q de massa m se move ao longo de uma circunferência de raio R orientada verticalmente (figura abaixo). Outra carga q é mantida fixa no ponto inferior da circunferência.



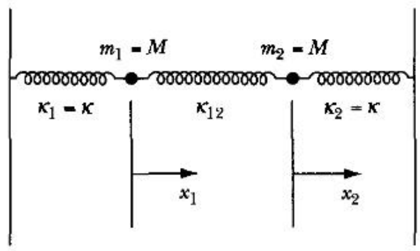
(a) Encontre a Lagrangiana do sistema e identifique as energias cinética e potencial efetiva.

(b) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema e determine as estabilidades.

(c) Encontre as frequências de pequenas oscilações em torno dos pontos de equilíbrio estável.

---

5) Considere o sistema de dois osciladores acoplados discutido em aula (figura abaixo).



(a) Obtenha novamente as soluções das equações de movimento, porém agora em termos dos modos normais de oscilação.

(b) *Acoplamento fraco.* Considere agora o caso em que $\kappa_{12}\ll\kappa$; ou seja, o acoplamento entre as massas é fraco. Imponha as condições iniciais $\eta_1(0)=\delta$, $\eta_2(0)=0$ e $\dot{\eta}_1(0)=\dot{\eta}_2(0)=0$ sobre a solução geral obtida no item *(a)* e mostre que a solução completa pode ser escrita aproximadamente como

$$\eta_1(t)=\left[\delta\cos\left(\epsilon\omega_0t\right)\right]\cos\left(\omega_0t\right)$$
$$\eta_2(t)=\left[\delta\,\mathrm{sen}\left(\epsilon\omega_0t\right)\right]\mathrm{sen}\left(\omega_0t\right),$$

onde $\epsilon = \kappa_{12}/2\kappa \ll 1$ e

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{M}}\,(1+\epsilon)\,.$$

---

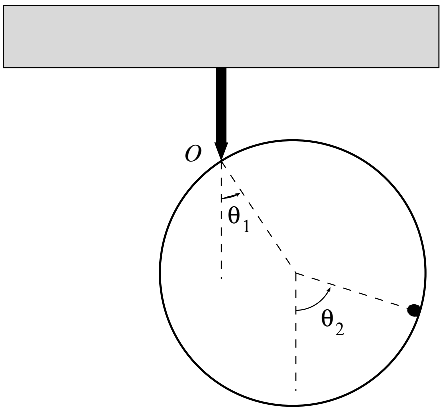
6) Considere novamente o sistema do problema **5**. Assuma agora que as três molas possuem constantes elásticas distintas ($\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \kappa_{12}$).

(a) Encontre as frequências características e compare as mesmas com as frequências naturais de oscilação na ausência de acoplamento entre m_1 e m_2.

(b) Investigue o caso de acoplamente fraco $\kappa_{12} \ll \kappa_1, \kappa_2$. Mostre que a modulação nas oscilações de cada partícula continua presente, mas o processo de transferência de energia entre as mesmas é incompleto nesta situação.

---

7) A figura abaixo ilustra um aro fino de massa m e raio R que oscila no plano vertical em torno do ponto fixo O. Ao longo do aro desliza sem atrito uma partícula também de massa m.



(a) Mostre que a Lagrangiana do sistema é

$$L = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}_2^2 + mR^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + mgR\,(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\,.$$

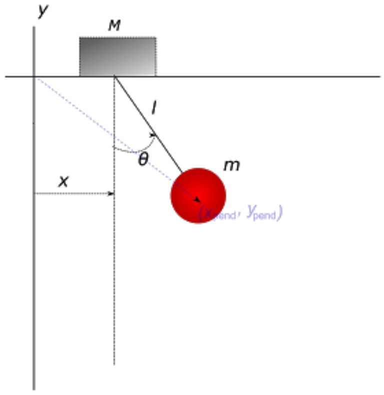
(b) Considerando pequenas oscilações, encontre as frequências características e os modos normais de vibração. Represente graficamente estes modos.

(c) Obtenha a solução das equações de movimento com as condições iniciais $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$.

(d) Determine a matriz modal e as coordenadas normais do sistema.

---

8) O sistema ilustrado abaixo consiste em um pêndulo simples de massa m e corda de extensão ℓ, pendurada em um suporte com massa M, o qual pode deslizar sem atrito sobre o eixo horizontal.



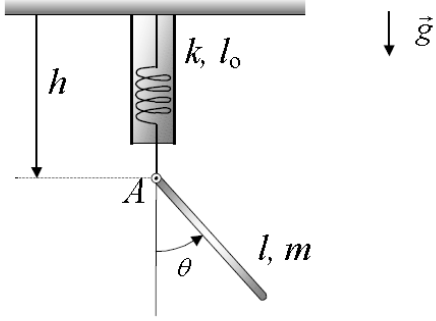
(a) Encontre a Lagrangiana do sistema.

(b) Obtenha as equações de movimento.

(c) Resolva as equações de movimento para o caso de pequenas oscilações, tomando como condições iniciais $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$.

---

9) A figura abaixo mostra um pêndulo físico composto por uma barra homogênea de massa m e extensão ℓ que pode oscilar no plano vertical, mas que tem sua extremidade presa a uma mola de constante elástica κ e comprimento de equilíbrio ℓ_0.



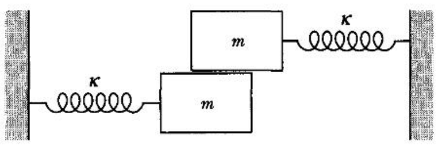
(a) Encontre a Lagrangiana do sistema.

(b) Obtenha as equações de movimento.

(c) Resolva as equações de movimento para o caso de pequenas oscilações.

---

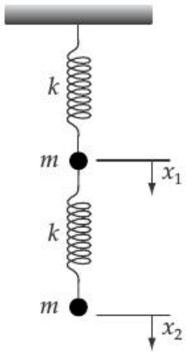
10) Dois osciladores harmônicos idênticos são posicionados de tal forma que suas paredes laterais deslizam entre si, como ilustrado na figura abaixo. A força de atrito fornece o acoplamento dos movimentos dos osciladores, uma vez que esta é proporcional à velocidade relativa instantânea.



(a) Encontre a Lagrangiana do sistema.
(b) Obtenha as equações de movimento.
(c) Resolva as equações de movimento.

---

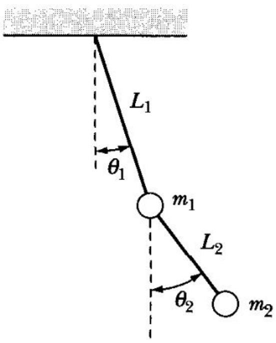
11) Um sistema com dois osciladores acoplados pode executar oscilações na direção vertical (figura abaixo).



(a) Sendo ℓ_0 a extensão de equilíbrio de cada mola, encontre a Lagrangiana do sistema.
(b) Obtenha as frequências características para oscilações na direção vertical.
(c) Descreva os modos normais de vibração do sistema.
(d) Obtenha a solução das equações de movimento.

---

12) Considere o pêndulo duplo geral ilustrado na figura abaixo, onde tanto as extensões L_1 e L_2 das cordas quanto as massas m_1 e m_2 são distintas.



(a) Encontre a Lagrangiana do sistema.
(b) Obtenha as frequências características e os modos normais para pequenas oscilações.
(c) Resolva as equações de movimento para o caso de pequenas oscilações.

---

13) Considere um sistema com n osciladores acoplados com extremos fixos. Quando as oscilações são de pequena amplitude, as forças restauradoras podem ser consideradas lineares, tanto para oscilações longitudinais quanto transversais. Neste caso, as soluções das equações de movimento podem ser escritas

$$\eta_j(t) = \sum_{r=1}^{n} \rho_{jr} \xi_r(t), \quad (j = 1, \ldots, n),$$

sendo, para $j, r = 1, \ldots, n$,

$$\rho_{jr} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \operatorname{sen}\left(\frac{jr\pi}{n+1}\right), \quad \xi_r(t) = \operatorname{Re}\left(\beta_r e^{i\omega_r t}\right)$$
$$\omega_r = 2\omega_0 \operatorname{sen}\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right).$$

As quantidades ρ_r, $\xi_r(t)$ e ω_r são, respectivamente, os vetores característicos, os modos normais e as autofrequências de oscilação. Já ω_0 é a frequência natural de oscilação de cada partícula, se os osciladores estivessem desacoplados.

(a) Demonstre a identidade[1]

$$\sum_{\ell=1}^{N-1} \operatorname{sen}\left(\frac{r\ell\pi}{N}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{s\ell\pi}{N}\right) = \frac{N}{2}\delta_{rs}.$$

(b) Use o resultado do item *(a)* para mostrar que os vetores característicos

$$\rho_r = \left(\rho_{1r}\ \rho_{2r}\ \ldots\ \rho_{(n-1)r}\ \rho_{nr}\right)^{\mathrm{T}}$$

satisfazem a condição de ortonormalidade

$$\langle \rho_r, \rho_s \rangle = \rho_r^{\mathrm{T}} \rho_s = \delta_{rs}.$$

(c) Mostre que $\xi_r(t) = \mu_r \cos\omega_r t - \nu_r \operatorname{sen}\omega_r t$, com

$$\mu_r = \sum_{\ell=1}^{n} \rho_{\ell r} \eta_{0\ell} \qquad \nu_r = -\frac{1}{\omega_r} \sum_{\ell=1}^{n} \rho_{\ell r} \dot{\eta}_{0\ell},$$

onde $\eta_{0r} \doteq \eta_r(0)$ e $\dot{\eta}_{0r} \doteq \dot{\eta}_r(0)$ são as condições iniciais.

---

14) A Lagrangiana dos osciladores acoplados do problema **13** pode ser escrita como

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \left[\dot{\eta}_j^2 - \omega_0^2 \left(\eta_j - \eta_{j-1}\right)^2\right], \quad (\eta_0 = \eta_{n+1} = 0).$$

[1] *Sugestão:* use as identidades

$$\operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 = \frac{1}{2}\left[\cos(z_1 - z_2) - \cos(z_1 + z_2)\right] \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sum_{n=0}^{m} z^n = \frac{1 - z^{m+1}}{1 - z}, \quad (z \neq 1).$$

(a) Defina a matriz de transformação A como

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{n-1} & \rho_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1(n-1)} & \rho_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{n(n-1)} & \rho_{nn} \end{pmatrix},$$

a qual irá definir as coordenadas normais $\xi_j(t)$ $(j = 1, \dots, n)$ como

$$\eta_j(t) = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}\xi_k(t), \quad (j = 1, \dots, n).$$

Mostre que a Lagrangiana pode ser escrita como

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \dot{\xi}_k^2 - \omega_0^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 - \sum_{j=1}^{n+1} \eta_j \eta_{j-1} \right).$$

(b) Demonstre a identidade[2]

$$\sum_{j=1}^{N-1} \operatorname{sen}\left(\frac{kj\pi}{N}\right) \cos\left(\frac{\ell j\pi}{N}\right) = \frac{1-(-)^{k+\ell}}{4} \left[\operatorname{cotan}\left(\frac{(k+\ell)\pi}{2N}\right) + \operatorname{cotan}\left(\frac{(k-\ell)\pi}{2N}\right) \right].$$

(c) Use o resultado anterior para mostrar que

$$\sum_{j=1}^{n+1} \eta_j \eta_{j-1} = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \xi_k^2.$$

(d) Mostre então que em termos dos modos normais $\xi_j(t)$ a Lagrangiana do sistema de osciladores acoplados fica escrita

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \left(\dot{\xi}_j^2 - \omega_j^2 \xi_j^2 \right).$$

---

15) Considere o sistema de osciladores acoplados discutido no problema **13**. Para $n = 3$, obtenha as soluções de $\eta_\ell(t)$ $(\ell = 1, 2, 3)$ para as condições iniciais

(a) $\eta_{0\ell} = 0$ $(\ell = 1, 3)$, $\eta_{02} = b$, $\dot{\eta}_{0\ell} = 0$ $(\ell = 1, 2, 3)$.
(b) $\eta_{01} = b$, $\eta_{0\ell} = 0$ $(\ell = 2, 3)$, $\dot{\eta}_{0\ell} = 0$ $(\ell = 1, 2, 3)$.
(c) $\eta_{0\ell} = 0$ $(\ell = 1, 2, 3)$, $\dot{\eta}_{0\ell} = 0$ $(\ell = 1, 3)$, $\dot{\eta}_{02} = v_0$.

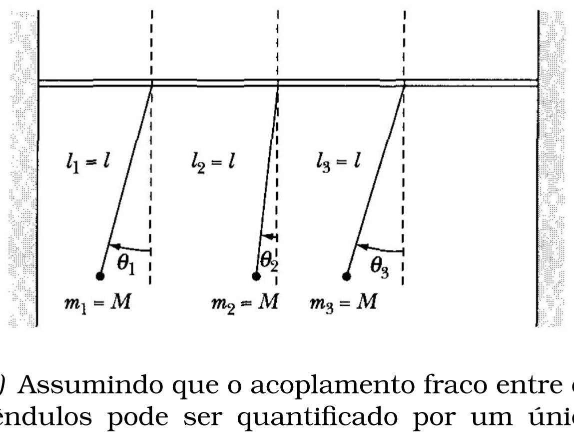
---

16) Considere o sistema de osciladores acoplados discutido no problema **13**.

(a) Encontre a solução para as condições iniciais $\eta_j(0) = \epsilon\delta_{j1}$, $\dot{\eta}_j(0) = 0$ $(j = 1, \dots, n)$.
(b) Escreva as soluções para $n = 4$ e trace o gráfico com $\eta_j(t)$ $(j = 1, \dots, 4)$.

---

17) A figura abaixo ilustra um conjunto de três pêndulos suspensos por um suporte ligeiramente elástico. Como o suporte não é totalmente rígido, a oscilação de qualquer um dos pêndulos, por menor que seja, acaba excitando oscilações nos demais. Essa tranferência de energia mecânica entre os osciladores evidencia a existência de um acoplamento fraco entre os mesmos.



(a) Assumindo que o acoplamento fraco entre os pêndulos pode ser quantificado por um único parâmetro δ $(\ll 1)$, mostre que no limite de pequenas oscilações $(|\theta_j| \ll 1,\ j = 1, 2, 3)$ a energia

[2] *Sugestão:* use as sugestões do problema **13** e as identidades

$$\operatorname{sen} z_1 \cos z_2 = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(z_1 - z_2) + \operatorname{sen}(z_1 + z_2)\right] \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

potencial deste sistema pode ser aproximada por

$$U^{(int)} = \frac{1}{2}Mgl\left[\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2 \right. \\ \left. -2\epsilon\left(\theta_1\theta_2+\theta_1\theta_3+\theta_2\theta_3\right)\right],$$

onde $\epsilon = \delta/Mgl \ll 1$.

(b) Escreva a Lagrangiana por massa $\mathcal{L} \doteq L/M$ deste sistema na forma matricial

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\eta}^T\mathsf{T}\dot{\eta} - \frac{1}{2}\eta^T\mathsf{U}\eta,$$

identificando as matrizes T e U.

(c) Obtenha as frequências características deste sistema. Mostre que duas delas são idênticas, isto é, o problema é *degenerado*. Chamando ω_3 a frequência distinta das outras, encontre o vetor característico ρ_3 através da equação

$$\left(\mathsf{U}-\omega_3^2\mathsf{T}\right)\rho_3 = 0$$

e normalize o mesmo através da condição de ortonormalização

$$\langle\rho_r,\rho_s\rangle = \rho_r^T\mathsf{T}\rho_s = \delta_{rs}.$$

(d) Para obter ρ_1 e ρ_2 ortonormais, monte um sistema de 5 equações dados por

$$\left(\mathsf{U}-\omega_1^2\mathsf{T}\right)\rho_j = 0, \quad (j=1,2)$$

e

$$\langle\rho_1,\rho_1\rangle = 1, \qquad \langle\rho_2,\rho_2\rangle = 1, \qquad \langle\rho_1,\rho_2\rangle = 0.$$

Escolha arbitrariamente uma das componentes (por exemplo, $\rho_{13}=0$) e mostre que

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \qquad \rho_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

(e) Use a solução geral fornecida no problema **13** para obter a solução com as condições iniciais $\eta_{01}=b$, $\eta_{02}=\eta_{03}=0$ e $\dot{\eta}_{0\ell}=0$ $(\ell=1,2,3)$.

---

18) Considere oscilações de uma corda contínua de extensão L fixa nas extremidades.

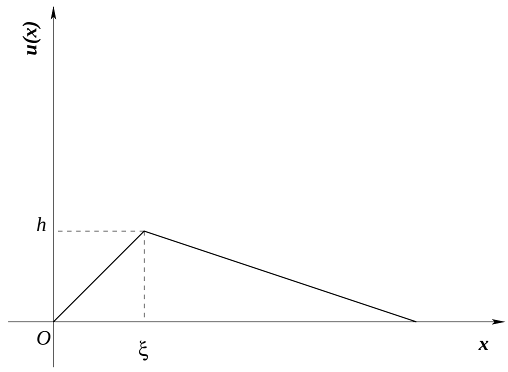
(a) Obtenha $\eta(x,t)$ quando as condições iniciais são $\eta(x,0) = A\,\mathrm{sen}\,(3\pi x/L)$ e $\eta_t(x,0)=0$.

(b) Obtenha a distribuição de energia por modo normal de oscilação.

---

19) Uma corda de comprimento L fixa nas extremidades é puxada e subitamente solta no ponto mostrado na figura abaixo, de tal forma que a sua forma inicial é dada por

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{hx}{\xi}, & (x<\xi), \\ \dfrac{h(L-x)}{L-\xi}, & (x \geqslant \xi). \end{cases}$$

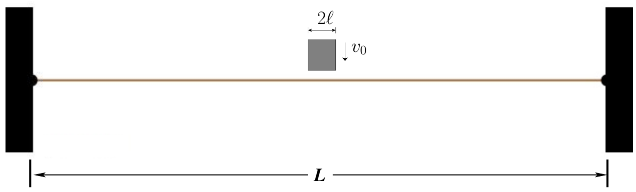


(a) Se a distribuição inicial de velocidades é zero (isto é, $u_t(x,0)=0$), encontre $u(x,t)$ para $t>0$.

(b) Obtenha a distribuição de energia por modo normal de oscilação.

---

20) Para modelar o que ocorre com uma corda de piano, considere uma corda de extensão L, densidade linear λ a qual é fixa nas extremidades e submetida a uma tensão τ. A corda está inicialmente em repouso e é colocada em movimento ao ser golpeada subitamente ao longo de uma distância 2ℓ em torno de seu centro, como ilustrado na figura abaixo. A seção central da corda ganha uma velocidade inicial $\boldsymbol{v}_0$.



(a) Descreva o movimento subsequente.

(b) Obtenha a distribuição de energia por modo normal de oscilação.

(c) Dados o comprimento (L) e a densidade linear (λ) da corda, qual deve ser a tensão (τ) da mesma para ela ser afinada na frequência do dó central f_{C_4}?[3]

---

21) Considere uma corda amortecida e submetida a um agente externo de tal forma que a correspondente equação da onda é

$$\lambda\eta_{tt} + D\eta_t - \tau\eta_{xx} = F(x,t).$$

(a) Repetindo o exemplo onde

$$F(x,t) = F_0\cos\omega t\,\delta(x-L/2),$$

e revisando os conceitos de oscilações amortecidas, quais são as condições apropriadas para amortecimento subcrítico, crítico e supercrítico?

[3]Por curiosidade, $f_{C_4} = 261{,}6\,\mathrm{Hz}$.

(b) Encontre o deslocamento $\eta(x,t)$ assumindo que o amortecimento é subcrítico para todos os modos normais.

(b) Faça um desenho do pacote de ondas no instante $t=0$ e para algum instante $t>0$.

22) Considere um pacote de ondas para o qual a distribuição de amplitudes é dada por

$$A(k)=\begin{cases}1, & |k-k_0|<\Delta k\\ 0, & |k-k_0|\geqslant \Delta k.\end{cases}$$

(a) Mostre que a função de onda pode ser escrita como

$$\Psi(x,t)=\frac{2\,\mathrm{sen}\left[\left(\omega_0't-x\right)\Delta k\right]}{\omega_0't-x}e^{i(\omega_0 t-k_0x)}.$$

23) A partir da solução geral da equação da onda,

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\sum_\sigma\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\mathcal{E}_\sigma(k)\,e^{i(kx-\omega_k^\sigma t)},$$

obtenha a solução para oscilações transversais de uma corda fixa nas extremidades.

Respostas de alguns problemas

2) *(b)*

$$\omega^2=\frac{V\alpha^2}{m}\sqrt{1-\left(\frac{F}{V\alpha}\right)^2},$$

com $F<V\alpha$.

3) *(b)*

$$\omega^2=\frac{8\pi}{3}\frac{V\alpha^4}{m}x_0^2\left(\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}\right)^2,$$

sendo $\Gamma(x)$ a função gama e x_0 determinado de

$$E=\frac{1}{3}mV\alpha^4x_0^4.$$

4) *(c)*

$$\omega^2=\frac{3g}{R}\left(1-x_0^2\right),$$
$$x_0=\left(\frac{q^2}{8mgR}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

6) *(a)*

$$\omega^2=\frac{\kappa_1+\kappa_2+2\kappa_{12}}{2M}\pm\frac{1}{2M}\sqrt{\left(\kappa_1-\kappa_2\right)^2+4\kappa_{12}^2}$$

7) *(a)*

$$\omega_1=\sqrt{\frac{2g}{R}}$$
$$\omega_2=\sqrt{\frac{g}{2R}}$$

8) *(a)*

$$L=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2+m\ell\left(\dot{x}\dot{\theta}+g\right)\cos\theta$$

(b)

$$(M+m)\ddot{x}+m\ell\ddot{\theta}\cos\theta-m\ell\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\theta=0$$
$$\ddot{x}\cos\theta+\ell\ddot{\theta}+g\,\mathrm{sen}\,\theta=0$$

9) *(a)*

$$L=\frac{1}{2}m\dot{h}^2-\frac{1}{2}m\ell\dot{h}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2+mg\left(h+\frac{1}{2}\ell\cos\theta\right)-\frac{1}{2}k\left(h-\ell_0\right)^2$$

(b)

$$\ddot{h}-\frac{1}{2}\ell\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta-\frac{1}{2}\ell\dot{\theta}^2\cos\theta-g+\frac{k}{m}\left(h-\ell_0\right)=0$$
$$2\ell\ddot{\theta}+3\left(g-\ddot{h}\right)\mathrm{sen}\,\theta=0$$

10) *(b)*

$$m\ddot{x}_1+\beta\left(\dot{x}_1-\dot{x}_2\right)+\kappa x_1=0$$
$$m\ddot{x}_2+\beta\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)+\kappa x_2=0$$

(c)

$$x_1(t)=B_{11}^+e^{i\sqrt{\kappa/m}t}+B_{11}^-e^{-i\sqrt{\kappa/m}t}+e^{-\beta t/m}\left(B_{12}^+e^{\sqrt{\beta^2-m\kappa}t/m}+B_{12}^-e^{-\sqrt{\beta^2-m\kappa}t/m}\right)$$

11) *(a)*

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2\right)+mg\left(x_1+x_2\right)-\frac{1}{2}k\left(x_1-\ell_0\right)^2-\frac{1}{2}k\left(x_2-x_1-\ell_0\right)^2$$

(b)

$$\omega_1=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\frac{k}{m}}$$
$$\omega_2=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{k}{m}}$$

12) *(b)*

$$\omega_{1,2} = \left\{ (m_1+m_2)\, g\,(L_1+L_2) \right.$$
$$\left. \pm\sqrt{(m_1+m_2)\, g^2 \left[m_1 (L_1-L_2)^2 + m_2 (L_1+L_2)^2\right]} \right\}$$
$$\times\, (2m_1 L_1 L_2)^{-1}$$

17) *(d)*

$$\eta_1(t) = \frac{2}{3} b\cos\omega_1 t + \frac{1}{3} b\cos\omega_3 t$$
$$\eta_2(t) = -\frac{1}{3} b\cos\omega_1 t + \frac{1}{3} b\cos\omega_3 t$$
$$\eta_3(t) = -\frac{1}{3} b\cos\omega_1 t + \frac{1}{3} b\cos\omega_3 t$$

18) *(a)*

$$\eta(x,t) = A\cos(\omega_3 t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$$

19) *(a)*

$$u(x,t) = \frac{2hL^2}{\pi^2\xi(L-\xi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)$$
$$\times\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega_n t)$$

20) *(a)*

$$\eta(z,t) = -\frac{4v_0}{\pi\omega_1} \sum_{\substack{r=1\\(r\ \text{ímpar})}}^{\infty} (-1)^{(r-1)/2}\, r^{-2}$$
$$\times\,\mathrm{sen}\left(\frac{r\pi}{L}\ell\right)\mathrm{sen}\left(\frac{r\pi}{L}z\right)\mathrm{sen}(\omega_r t)$$

21) *(b)*

$$\eta(x,t) = \sum_r \left[C_r e^{-Dt/2\rho}\cos\left(\sqrt{\frac{r^2\pi^2\tau}{\rho L} - \frac{D^2}{4\rho^2}}\,t - \phi_r\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2F_0\,\mathrm{sen}(r\pi/2)\cos(\omega t - \delta_r)}{\rho L\sqrt{\left(\frac{r^2\pi^2\tau}{\rho L} - \omega^2\right) + \frac{D}{\rho}\omega^2}}\right]\mathrm{sen}\left(\frac{r\pi}{L}x\right)$$