Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto de Física
Departamento de Física
Professor: ***Rudi Gaelzer***
Disciplina: ***Mecânica Clássica II***
Cursos: ***Bacharelados em Física***

Lista de Exercícios 4

Dinâmica de Corpos Rígidos

1) Considere o tensor de inércia de um cubo homogêneo de massa M e lado ℓ em relação a um sistema de coordenadas cuja origem coincide com um dos vértices do cubo e cujos eixos estão ao longo das respectivas arestas. Se o cubo é posto a girar em torno do eixo x_3 com velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_3\,\hat{\mathbf{e}}_3$, determine o seu momento angular e o ângulo que este faz com $\boldsymbol{\omega}$.

---

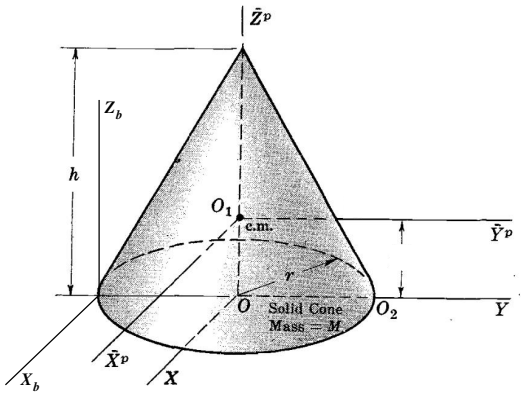
2) Considere uma esfera homogênea de raio R e massa M.

(a) Calcule os momentos de inércia em relação ao centro da esfera.

(b) Considere agora um novo referencial cuja origem dista do centro da esfera por uma distância $R_0 < R$ e encontre o tensor de inércia em relação ao mesmo.

---

3) Considere um cone homogêneo de massa M, altura h e com base de raio r, como na figura abaixo.



Orientando o eixo $x_3 = z$ do sistema de coordenadas ao longo do eixo de simetria do cone, encontre:

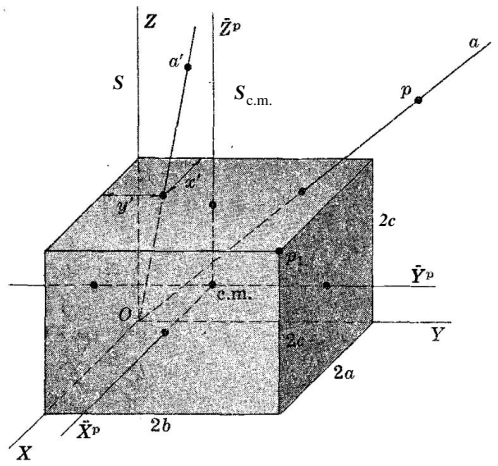
(a) O tensor de inércia em relação ao referencial em que o plano $X - Y$ está na base do cone.

(b) A posição do centro de massa do cone e os componentes do tensor de inércia em relação ao mesmo.

(c) O tensor de inércia em relação ao sistema X_b, Y_b, Z_b mostrado na figura.

---

4) Considere o paralelepípedo homogêneo da figura abaixo.



(a) Calcule o tensor de inércia em relação ao referencial S (eixos X, Y, Z).

(b) Encontre o tensor de inércia em relação ao centro de massa, *i. e.*, no referencial $S_{\text{c.m.}}$, com os eixos $\bar{X}_p, \bar{Y}_p, \bar{Z}_p$.

(c) Retorne ao referencial S e execute uma rotação de eixos sobre O de forma a encontrar os momentos e eixos principais de inércia.

---

5) ***(Teorema do eixo perpendicular)*** Demonstre o teorema:

Dada uma placa plana de formato e distribuição de massa arbitrários, a soma de seus momentos de inércia em relação a quaisquer dois eixos perpendiculares contidos no plano da placa é igual ao momento de inércia em relação ao eixo perpendicular à placa e que parte da intersecção dos eixos no plano.

---

6) ***(Planos e eixos de simetria)*** Dado um corpo rígido uniforme, este possui um:

Plano de simetria se a distribuição de massa for simétrica ao longo de qualquer reta perpendicular a este plano, *i. e.*, se a distribuição de massa em um lado do plano for a imagem especular da distribuição no outro lado.

Eixo de simetria se o corpo for um sólido de revolução em torno deste eixo, *i. e.*, se a distribuição de massa não depender do ângulo de rotação em torno do eixo de simetria.

Com base nestas definições, demonstre os lemas a seguir.

Lema 1. *Se um corpo rígido possui um plano de simetria que contém a origem do referencial em relação ao qual é calculado o tensor de inércia, então qualquer eixo perpendicular a este plano é um eixo principal de inércia.*

Lema 2. *Se um corpo rígido possui um eixo de simetria, então este é um eixo principal de inércia. Quaisquer dois eixos mutuamente ortogonais entre si e ao eixo de simetria também são eixos principais de inércia e os seus correspondentes momentos principais de inércia são iguais entre si.*

---

7) Calcule os momentos principais de inércia I_1, I_2 e I_3 de um elipsóide homogêneo com massa M, cujos eixos têm comprimentos $2a > 2b > 2c$.

---

8) Considere uma barra homogênea de comprimento ℓ e massa m fixa em uma das extremidades.

(a) Calcule o momento de inércia.

(b) Encontre o ponto no qual, se toda a massa estivesse ali concentrada, o momento de inércia da partícula em relação ao eixo de rotação é igual ao momento de inércia da barra. A distância desse ponto ao eixo é denominada *raio de giro*.

---

9) Mostre que nenhum dos momentos principais de inércia pode exceder a soma dos outros dois.

---

10) Um sistema de três partículas consiste nas massas e coordenadas (x_1, x_2, x_3) tais que

$$m_1 = 3m,\ (b, 0, b) \quad m_2 = 4m,\ (b, b, -b)$$
$$m_3 = 2m,\ (-b, b, 0)\,.$$

(a) Encontre o tensor de inércia.

(b) Diagonalize o tensor e encontre os momentos e os eixos principais de inércia.

---

11) Determine os eixos e os momentos principais de inércia de um hemisfério homogêneo de raio b e massa m, em relação ao seu centro de massa.

---

12) Considere uma placa homogênea orientada sobre o plano $x_1 - x_2$.

(a) Mostre que o tensor de inércia tem a forma genérica

$$\mathsf{I} = \begin{pmatrix} A & -C & 0 \\ -C & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}.$$

(b) Se o sistema de coordenadas é rotado por um ângulo θ em torno do eixo x_3, mostre que o tensor de inércia transforma-se para

$$\mathsf{I}' = \begin{pmatrix} A' & -C' & 0 \\ -C' & B' & 0 \\ 0 & 0 & A'+B' \end{pmatrix},$$

onde

$$A' = A\cos^2\theta - C\,\mathrm{sen}\,2\theta + B\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$
$$B' = A\,\mathrm{sen}^2\,\theta + C\,\mathrm{sen}\,2\theta + B\cos^2\theta$$
$$C' = C\cos 2\theta - \frac{1}{2}\,(B - A)\,\mathrm{sen}\,2\theta.$$

(c) Mostre então que os eixos x_1' e x_2' tornam-se eixos principais de inércia se o ângulo de rotação é

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2C}{B-A}\right).$$

---

13) Calcule os momentos de inércia dos sólidos de revolução mostrados na tabela 2.2 da Apostila.

---

14) Considere uma placa homogênea de densidade superficial σ delimitada pelas retas $\theta = 0$, $\theta = \pi$ e pela espiral logaritmica $r = ke^{\alpha\theta}$. A placa está orientada sobre o plano $x_1 - x_2$.

(a) Obtenha o tensor de inércia em relação ao eixo x_3.

(b) Realize uma rotação do sistema de coordenadas em torno de x_3 para obter os momentos principais de inércia. Use os resultados do problema (**12**) para mostrar que estes são dados por

$$I_1' = \sigma k^4 P\,(Q - R) \quad I_2' = \sigma k^4 P\,(Q + R) \quad I_3' = I_1' + I_2',$$

onde

$$P = \frac{e^{4\pi\alpha} - 1}{16\,(1 + 4\alpha^2)} \quad Q = \frac{1 + 4\alpha^2}{2\alpha} \quad R = \sqrt{1 + 4\alpha^2}.$$

---

15) Considere o tensor de inércia, ou qualquer outro tensor de posto 2.

(a) O ***traço*** do tensor é definido como a soma dos elementos da diagonal:

$$\mathrm{Tr}\left(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\right) = \sum_{k=1}^{3} I_{kk}.$$

Mostre que o traço de $\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}$ é invariante frente a uma transformação de similaridade,[1] ou seja, que

$$\mathrm{Tr}\left(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\right) = \mathrm{Tr}\left(\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}'}\right),$$

onde $\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}'}$ é o tensor de inércia em relação ao sistema de coordenadas rotado.

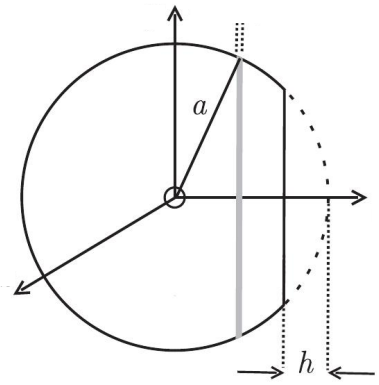
(b) Mostre que o determinante da matriz formada pelos elementos do tensor $\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}$ também é uma quantidade invariante frente a uma transformação de similaridade.

[1] ***Transformação de similaridade:*** Dado a matriz M de ordem m, uma transformação de similaridade sobre a mesma é realizada por uma outra matriz inversível S, também de ordem m, através da operação $\mathsf{M}' = \mathsf{S}\mathsf{M}\mathsf{S}^{-1}$.

(c) Verifique as propriedades *(a)* e *(b)* para o tensor de inércia do cubo considerado no problema (**1**).

---

16) Considere um sólido homogêneo de massa M na forma de uma esfera da qual foi removida uma calota de altura h, como na figura abaixo.



(a) Empregando os lemas apresentados no problema (**6**), encontre o tensor de inércia em relação ao sistema de coordenadas ilustrado.

(b) Encontre a posição do centro de massa do sólido.

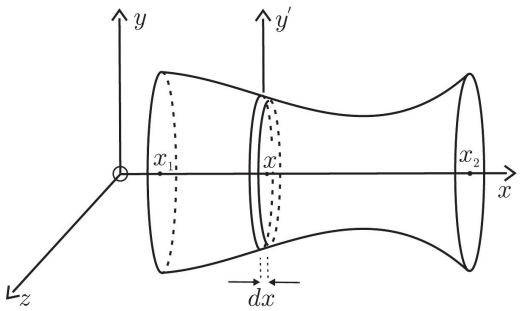
(c) Encontre o tensor de inércia em relação ao centro de massa.

---

17) Encontre os momentos principais de inércia de uma esfera de raio R e massa M, homogênea e maciça, exceto por uma cavidade esférica de raio $r < R$ tangente à sua superfície (*i. e.*, o centro da cavidade está a uma distância $R - r$ do centro da esfera).[2]

---

18) Considere um sólido de revolução homogêneo, gerado pela rotação da função $y = f(x)$, para $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, em torno do eixo x, como na figura abaixo.



(a) Mostre que a matriz de inércia é diagonal.

(b) Mostre que os momentos de inércia I_x e I_y são dados por

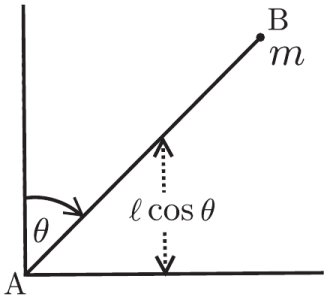
$$I_x = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{x_1}^{x_2} f^4(x)\,dx$$

$$I_y = \frac{1}{2}I_x + \pi\rho \int_{x_1}^{x_2} x^2 f^2(x)\,dx,$$

onde $\rho = M/V$ é a densidade do corpo. Quanto vale I_z?

[2] *Sugestão:* Se V_m é o volume de um corpo maciço, V_c é o volume da cavidade e V é o volume do corpo com cavidade, então o tensor de inércia do corpo V é dado por $I_{ij} = (I_{ij})_m - (I_{ij})_c$.

19) A figura abaixo mostra uma barra AB fina e uniforme de massa M e extensão 2ℓ, com a extremidade A afixada à base de uma parede e inclinada por um ângulo θ_0 em relação à vertical. Uma massa pontual m é então presa à extremidade B da barra e a mesma é liberada a partir do repouso.



(a) Mostre que o momento de inércia da barra em relação ao eixo de rotação que passa por A é

$$I_A = \frac{4}{3}M\ell^2.$$

(b) Obtenha a Lagrangiana deste sistema.

(c) Derive a(s) equação(ões) de movimento.

(d) Sendo τ_0 o tempo que a barra leva para bater no chão sem a massa m na sua extremidade e τ_m o mesmo tempo com m, mostre que

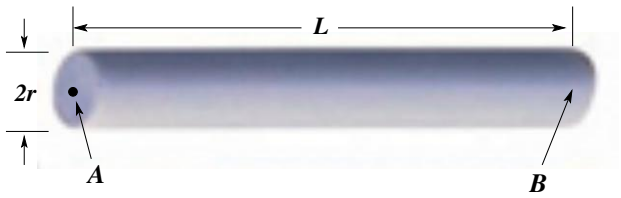
$$\tau_m = \sqrt{\frac{M+3m}{M+2m}}\,\tau_0.$$

---

20) A figura abaixo ilustra uma barra cilíndrica de comprimento L e de raio de base r. A densidade da barra varia ao longo de sua extensão de acordo com

$$\rho(z) = \rho_A + \frac{\Delta_\rho}{L}z, \text{ sendo } \Delta_\rho = \rho_B - \rho_A$$

e sendo ρ_A e ρ_B respectivamente as densidades nos pontos A e B (extremidades da barra).



(a) Mostre que a massa M da barra pode ser escrita como

$$M = \pi r^2 L\bar{\rho},$$

sendo $\bar{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_A + \rho_B)$ o valor médio da densidade da barra.

(b) Mostre que o centro de massa da barra está a uma distância

$$R = \frac{1}{3}\left(\frac{\rho_A + 2\rho_B}{\rho_A + \rho_B}\right)L$$

do ponto A.

(c) O ponto A é afixado a um fulcro que permite oscilações sem ocorrência de atrito. Derive a matriz de inércia da barra a partir deste ponto.

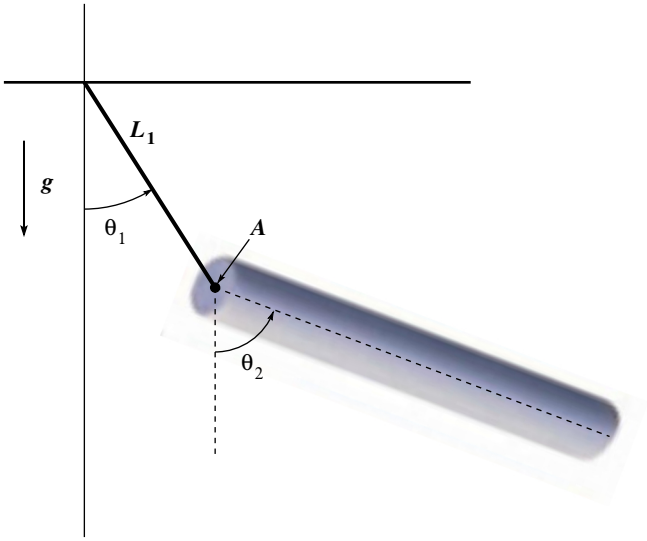
(d) Obtenha a Lagrangiana da barra e a equação de movimento para oscilações em torno do ponto A.

(e) Calcule a frequência de oscilações de pequena amplitude.

(f) Repita o procecimento do item *(c)* quando o ponto B é afixado ao fulcro.

(g) Repita os itens *(d)* e *(e)* nesta situação.

(h) O ponto A é agora preso na extremidade de uma uma outra barra rígida de massa desprezível e comprimento L_1, de tal forma que o cilindro pode oscilar livremente em torno deste ponto. Por sua vez, a outra extremidade da barra é afixada no fulcro original, podendo também oscilar livremente. O conjunto forma assim um pêndulo físico duplo, ilustrado na figura abaixo.



Assumindo que as oscilações deste pêndulo ocorrem no plano, obtenha a Lagrangiana e as equações de movimento.

---

21) A partir da definição dos ângulos de Euler e dos vetores $\dot{\boldsymbol{\phi}}$, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ e $\dot{\boldsymbol{\psi}}$, apresentados em aula, mostre em detalhes que as componentes do vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ são dadas por:

(a) No referencial do corpo:

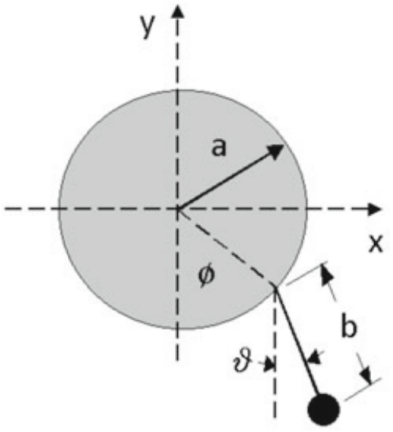
$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi\\ \omega_2 &= \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\psi\\ \omega_3 &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}.\end{aligned}$$

(b) No referencial fixo (inercial):

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= \dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + \dot{\theta}\cos\phi\\ \omega'_2 &= -\dot{\psi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + \dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi\\ \omega'_3 &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}.\end{aligned}$$

---

22) A figura abaixo mostra um sistema composto por um disco homogêneo de massa M e raio a, o qual é livre para rodar sem atrito em torno de um eixo perpendicular que passa pelo seu centro, e uma partícula de massa m, a qual está presa à borda do disco por uma barra rígida, de massa desprezível e extensão b.



(a) Obtenha a Lagrangiana deste sistema.

(b) Obtenha as equações de movimento.

(c) Considere o caso particular de oscilações de pequena amplitude e linearize as equações de movimento.

(d) Resolva as equações de movimento derivadas em *(c)* para o caso em que $\mathsf{b} = \mathsf{a}$.

(e) Retorne à Lagrangiana obtida em *(a)* e obtenha a Hamiltoniana deste sistema.

---

23) Retornando ao exemplo realizado em aula, a respeito do disco que rola plano inclinado abaixo, obtenha a solução das equações de movimento quando $\dot{\phi}_0 = 0$.

---

24) Considere uma esfera homogênea de raio R e massa M rolando sem deslizar a partir do repouso sobre um plano inclinado.

(a) Resolva as equações de movimento da esfera.

(b) Considere duas esferas com os mesmos raios e massas, porém uma sendo maciça enquanto que a outra é oca. Calcule a razão t_2/t_1, entre os tempos que cada uma leva para percorrer o plano inclinado.

---

25) Um pião simétrico com um ponto fixo entra em movimento com as seguintes condições iniciais (assume-se $I_3 = 2I_1$):

$$\theta_0 = 60^\circ \qquad \dot{\theta}_0 = 0$$
$$\dot{\phi}_0 = 2\sqrt{\frac{mgh}{3I}} \qquad \dot{\psi}_0 = I\sqrt{\frac{mgh}{12I^3}}.$$

(a) Encontre os valores de p_ϕ, p_ψ e $V_{\mathrm{ef}}\,(\theta_0)$.

(b) Esboce o gráfico de $V_{\mathrm{ef}}\,(\theta)$ para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ e analise a nutação subsequente.

(c) Mostre que a equação para $\dot{\theta}$ pode ser colocada na forma

$$\dot{u}^2 = \frac{mgh}{I}\,(1-u)^2\,(2u-1)\,,$$

onde $u = \cos\theta$.

(d) Prove que a solução da EDO acima é

$$\sec\theta(t) = 1 + \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{mgh}{I}}t\right).$$

Trace o gráfico de $\theta(t)$.

(e) O comportamento de $\theta(t)$ está de acordo com a análise qualitativa do item *(b)*? Estude também o comportamento de $\phi(t)$ e $\psi(t)$.

---

26) Uma barra uniforme de comprimento ℓ é colocada verticalmente sobre uma superfície plana. Devido a uma pequena perturbação, a barra se inclina levemente e então cai sobre o piso. Qual é a velocidade angular da barra quando a mesma atinge o solo?

---

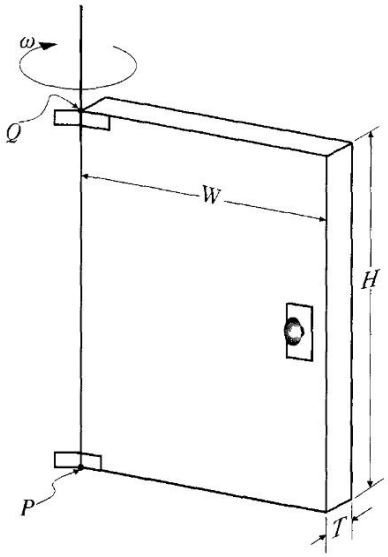
27) Encontre a frequência para oscilações de pequena amplitude de uma placa homogênea delgada na forma de um triângulo equilátero se a oscilação ocorrer no plano da placa e se a mesma for suspensa por:

(a) O ponto médio de uma de suas arestas.

(b) Um dos vértices.

---

28) Uma porta homogênea de massa M, altura H, largura W e espessura T está se fechando com uma velocidade angular ω constante, como ilustrado na figura abaixo.



(a) Colocando a origem do referencial fixo à porta no ponto P e orientando x_3 ao longo do eixo de rotação, encontre as componentes do momento angular $\boldsymbol{L}$.

(b) Encontre as componentes de $\boldsymbol{L}$ no referencial inercial S', cuja origem coincide com P e orientado de tal forma que $x'_3 = x_3$.

(c) Encontre o torque $\boldsymbol{N}$ sobre o ponto P.

(d) No limite $T = 0$, determine o que for possível a respeito das forças que as dobradiças aplicam à porta.

Algumas Respostas

1)

$$\boldsymbol{L} = \left(-\frac{1}{4}\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \frac{1}{4}\,\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \frac{2}{3}\,\hat{\boldsymbol{e}}_3\right) M\ell^2\omega_3 \qquad\qquad \theta_{\boldsymbol{L},\boldsymbol{\omega}} = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{32}{41}}\right) \approx 27,94^\circ.$$

---

2)

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}MR^2.$$

---

3) *(a)*

$$\mathsf{I} = \frac{M}{20}\begin{pmatrix} 3r^2+2h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3r^2+2h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6r^2 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\mathsf{I}_{cm} = \frac{3M}{80}\begin{pmatrix} 4r^2+h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2+h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8r^2 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\mathsf{I}_b = \frac{M}{20}\begin{pmatrix} 23r^2+2h^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3r^2+2h^2 & -5rh \\ 0 & -5rh & 26r^2 \end{pmatrix}.$$

---

4) *(a)*

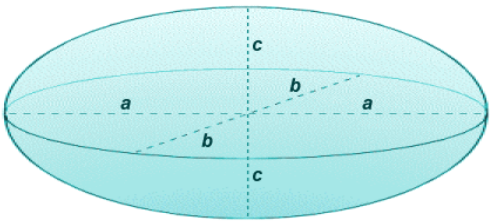
$$\mathsf{I} = M\begin{pmatrix} \frac{4}{3}\left(b^2+c^2\right) & ab & ac \\ ab & \frac{4}{3}\left(a^2+c^2\right) & bc \\ ac & bc & \frac{4}{3}\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\mathsf{I} = \frac{1}{3}M\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}.$$

---

7) Dado o elipsoide



Temos:

$$I_a = \frac{1}{5}M\left(b^2+c^2\right) \qquad I_b = \frac{1}{5}M\left(a^2+c^2\right) \qquad I_c = \frac{1}{5}M\left(a^2+b^2\right).$$

---

11)

$$I_{11} = I_{22} = \frac{83}{320}mb^2 \qquad\qquad I_{33} = \frac{2}{5}mb^2.$$

---

14) *(a)*

$$I_{11} = A = \frac{\sigma k^4}{2\alpha}P \qquad I_{22} = B = \frac{\sigma k^4}{2\alpha}P\left(1+8\alpha^2\right) \qquad I_{12} = -C = \sigma k^4 P.$$

---

16) Chamando de V_{e-c} o volume da esfera menos a calota, temos

$$\rho = \frac{3M}{4\pi a^3 \left(1-\epsilon\right)^2 \left(1+2\epsilon\right)}, \text{ onde } \epsilon = \frac{h}{2a}.$$

(a) Em termos de ϵ,

$$\mathsf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \text{ onde } \begin{cases} I_1 = \dfrac{2}{5}Ma^2\left(1 - \dfrac{9}{2}\dfrac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}\epsilon^2\right) \\ I_3 = \dfrac{2}{5}Ma^2\left(1-\epsilon\right)\left(1 + \dfrac{1+6\epsilon}{1+2\epsilon}\epsilon\right). \end{cases}$$

(b) A posição do centro de massa é

$$\boldsymbol{R} = (0,0,Z_c), \text{ onde } Z_c = -\frac{3a\epsilon^2}{1+2\epsilon}.$$

(c) A matriz de inércia em relação ao centro de massa é

$$\mathsf{I}_c = \begin{pmatrix} I_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{c1} & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \text{ onde } I_{c1} = I_1 - MZ_c^2 = \frac{2}{5}Ma^2\left[1 - \frac{9}{2}\frac{\left(1+\epsilon^2\right)\epsilon^2}{\left(1+2\epsilon\right)^2}\right].$$

---

17)

$$I_{11} = I_{22} = \frac{2}{5}M\frac{R^5 - r^5 - \frac{5}{2}r^3\left(R-r\right)^2}{R^3 - r^3} \qquad I_{33} = \frac{2}{5}M\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}.$$

---

19) *(b)*

$$L = 2\left(m + \frac{1}{3}M\right)\ell^2\dot{\theta}^2 - \left(2m+M\right)g\ell\cos\theta.$$

(c)

$$\ddot{\theta} - \frac{3g}{4\ell}\frac{M+2m}{M+3m}\operatorname{sen}\theta = 0.$$

---

20) *(c)*

$$\mathsf{I}_A = \begin{pmatrix} I_1^A & 0 & 0 \\ 0 & I_1^A & 0 \\ 0 & 0 & I_3^A \end{pmatrix}, \text{ sendo } \begin{cases} I_1^A = \dfrac{1}{8}\pi r^2 L\left[\left(r^2 + \dfrac{2}{3}L^2\right)\rho_A + \left(r^2+2L^2\right)\rho_B\right] \\ I_3^A = \dfrac{1}{2}\pi r^4 L\bar{\rho} = \dfrac{1}{2}Mr^2. \end{cases}$$

(d) Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + MgR\cos\theta.$$

Eq. de movimento:

$$\ddot{\theta} + \frac{MgR}{I_1}\operatorname{sen}\theta = 0.$$

(e) Frequencia:

$$\Omega^2 = \frac{MgR}{I_1} = \frac{4}{3}g\frac{\left(\rho_A + 2\rho_B\right)L}{\left(r^2+\frac{2}{3}L^2\right)\rho_A + \left(r^2+2L^2\right)\rho_B}.$$

(f), (g):

$$I_1^B = I_1^A + \frac{1}{6}\pi r^2 L\left(\rho_A - \rho_B\right)L^2 = \frac{1}{8}\pi r^2 L\left[\left(r^2+2L^2\right)\rho_A + \left(r^2+\frac{2}{3}L^2\right)\rho_B\right]$$
$$I_3^B = I_3^{\mathrm{CM}} = I_3^A.$$

Lagrangiana: trocar $I_1^A \to I_1^B$.

$$\Omega^2 = \frac{MgR_B}{I_1^B} = \frac{4}{3}g\frac{\left(2\rho_A + \rho_B\right)L}{\left(r^2+2L^2\right)\rho_A + \left(r^2+\frac{2}{3}L^2\right)\rho_B}.$$

(h):

$$L = \frac{1}{2}ML_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_2^2 + ML_1R\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + Mg(L_1\cos\theta_1 + R\cos\theta_2)$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \dfrac{R}{L_1}\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + \dfrac{R}{L_1}\dot{\theta}_2^2\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) + \dfrac{g}{L_1}\operatorname{sen}\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \dfrac{ML_1R}{I_1}\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - \dfrac{ML_1R}{I_1}\dot{\theta}_1^2\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) + \dfrac{MgR}{I_1}\operatorname{sen}\theta_2 = 0. \end{cases}$$

---

22) *(a)*

$$L\left\{\phi,\vartheta,\dot{\phi},\dot{\vartheta}\right\} = \frac{1}{2}a^2\left(m+\frac{1}{2}M\right)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m\left(b^2\dot{\vartheta}^2 + 2ab\cos(\phi-\vartheta)\,\dot{\phi}\dot{\vartheta}\right) + mg(a\cos\phi + b\cos\vartheta).$$

(b)

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + \dfrac{mb}{(m+M/2)\,a}\cos(\phi-\vartheta)\,\ddot{\vartheta} + \dfrac{mb}{(m+M/2)\,a}\operatorname{sen}(\phi-\vartheta)\,\dot{\vartheta}^2 + \dfrac{mg}{(m+M/2)\,a}\operatorname{sen}\phi = 0 \\ \ddot{\vartheta} + \dfrac{a}{b}\cos(\phi-\vartheta)\,\ddot{\phi} - \dfrac{a}{b}\operatorname{sen}(\phi-\vartheta)\,\dot{\phi}^2 + \dfrac{g}{b}\operatorname{sen}\vartheta = 0. \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \ddot{\phi} + \left(\dfrac{m}{m+M/2}\right)\dfrac{b}{a}\ddot{\vartheta} + \left(\dfrac{m}{m+M/2}\right)\dfrac{g}{a}\phi = 0 \\ \ddot{\vartheta} + \dfrac{a}{b}\ddot{\phi} + \dfrac{g}{b}\vartheta = 0. \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} \phi(t) = \bar{c}_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - \bar{c}_2\beta_1\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \vartheta(t) = \bar{c}_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - \bar{c}_2\beta_2\cos(\omega_2 t + \phi_2), \end{cases}$$

sendo

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_s^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + s\sqrt{1+\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right)^2}\right]\omega_0^2, \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{a}, \qquad \alpha = \frac{m}{m+M/2}.$$

(e)

$$H(\phi,\vartheta,p_\phi,p_\vartheta) = \frac{mb^2p_\phi^2 + \left(m+\frac{1}{2}M\right)a^2p_\vartheta^2 - 2mab\cos(\phi-\vartheta)\,p_\phi p_\vartheta}{2ma^2b^2\left[\frac{1}{2}M + m\operatorname{sen}^2(\phi-\vartheta)\right]} - mg(a\cos\phi + b\cos\vartheta).$$

---

24) *(a)*

$$\ddot{y} = \frac{gMR^2\operatorname{sen}\alpha}{MR^2+I}.$$

---

25) *(a)*

$$p_\phi = \sqrt{3Imgh} \quad p_\psi = \sqrt{3Imgh} \quad V_{\text{ef}}(\theta_0) = mgh.$$

---

26)

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}.$$

---

27) *(a)*

$$\omega = \sqrt{\sqrt{3}\frac{g}{a}}.$$

(b)

$$\omega = \sqrt{\frac{12}{5\sqrt{3}}\frac{g}{a}}.$$

---

28) *(a)*

$$\boldsymbol{L} = M\omega\left(\frac{1}{4}WH\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 + \frac{1}{4}TH\,\hat{\boldsymbol{e}}_2 - \frac{1}{3}\left(W^2+T^2\right)\,\hat{\boldsymbol{e}}_3\right).$$

(b)

$$\begin{pmatrix} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \end{pmatrix} = M\omega \begin{pmatrix} L_1 \cos\phi - L_2 \operatorname{sen}\phi \\ L_1 \operatorname{sen}\phi + L_2 \cos\phi \\ L_3 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{4} M\omega^2 H \left(T\,\hat{\boldsymbol{e}}_1 - W\,\hat{\boldsymbol{e}}_2\right).$$

(d)

$$F_{P1} = \frac{1}{2} MW \left(\frac{g}{H} - \frac{1}{2}\omega^2\right), \quad F_{P2} = 0, \quad F_{P3} + F_{Q3} = Mg.$$